Arithmétique fondamentale : grandeurs et proportions - HEPHC

François Mansy - Notes provisoires

Table des matières

Première partie

Rappels concernant le calcul écrit

Chapitre 1

Addition

Le calcul écrit permet d'additionner des nombres entiers à la main, c'est-à-dire avec papier et crayon.

1.1 Addition de nombres entiers

L'addition de nombres entiers tels que $3 + 5 = 8$ ou $9 + 7 = 16$ est en général acquise asserz vite dans un parcours scolaire classique. Mais comment calculer $12 + 53$?

Il faut d'abord savoir décomposer les nombres à deux chiffres en unités et dizaines.

Exemple : 53 se décompose en 3 unités et 5 dizaines.

Tout d'abord on remarque que :

- Somme des unités : $2 + 3 < 10$
- Somme des dizaines : $1 + 5 < 10$

Donc il suffit de calculer la somme des unités et des dizaines indépendamment !

Cela se fait comme suit :
- Somme des unités : $2 + 3 = 5$
- Somme des dizaines : $1 + 5 = 6$

Donc on a 5 aux unités et 6 aux dizaines, soit : 65.

Pour bien comprendre, poser les opérations, en inscrivant l'un sous l'autre les deux nombres à additionner et en prenant soin de bien aligner en colonne les unités sous les unités et les dizaines avec les dizaines. Le résultat s'écrira alors aligné en dessous, séparé par une ligne.

On pose donc :

$$\begin{array}{r|r} \text{dizaines} & \text{unités} \\ \hline 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{crr} & \text{dizaines} & \text{unités} \\ & 1 & 2 \\ + & 5 & 3 \\ \hline = & & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{crr} & \text{dizaines} & \text{unités} \\ & 1 & 2 \\ + & 5 & 3 \\ \hline = & 6 & 5 \end{array}$$

1.1.1 Report

Comment calculer $36 + 57$? On remarque que la somme des unités : $6 + 7 > 10$ donc il nous faudra faire un report à la dizaine.

On pose donc :

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 6 \\ + & 5 & 7 \\ \hline = & & \end{array} \longrightarrow 6+7=13 \longrightarrow \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 3 & 6 \\ + & 5 & 7 \\ \hline = & & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 3 & 6 \\ + & 5 & 7 \\ \hline = & 9 & 3 \end{array}$$

Autre exemple : comment calculer $96 + 38$?

On pose donc :

$$\begin{array}{ccc} & 9 & 6 \\ + & 3 & 8 \\ \hline = & & \end{array} \longrightarrow 6+8=14 \longrightarrow \begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & 9 & 6 \\ + & & 3 & 8 \\ \hline = & & & 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & 9 & 6 \\ + & & 3 & 8 \\ \hline = & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

1.2 Addition de nombres décimaux

Il suffit de correctement poser l'opération en alignant bien les virgules.

Exemple : $124,425 + 18,08 = ?$

On pose l'addition en alignant les colonnes comme précédemment :

$$\begin{array}{ccccccccc} & \text{centaines} & \text{dizaines} & \text{unités} & & \text{dixièmes} & \text{centièmes} & \text{millièmes} \\ & & 1 & & & 1 & & \\ & 1 & 2 & 4 & , & 4 & 2 & 5 \\ + & & 1 & 8 & , & 0 & 8 & \\ \hline = & 1 & 4 & 2 & , & 5 & 0 & 5 \end{array}$$

Dans le résultat, il ne faut surtout pas oublier de placer la virgule sous les autres virgules.

1.3 Résumé

Notre système de numération est à base décimale, c'est à dire qu'il comporte 10 chiffres. L'écriture des nombres repose sur la convention suivante : chaque chiffre représente une puissance de 10,

- le chiffre le plus à droite concernant l'unité (10 puissance 0),
- le chiffre suivant (à gauche du premier) concerne les dizaines (10 puissance 1),
- et ainsi de suite pour les centaines (10 puissance 2), etc.

exemple :

$$102,73 = 1 \times 100 + 0 \times 10 + 2 \times 1 + 7 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$$

Reprenons la somme 12 + 53 :

$$12 = 1 \times 10 + 2 \text{ et } 53 = 5 \times 10 + 3$$

$$\text{donc } 12 + 53 = 1 \times 10 + 2 + 5 \times 10 + 3 = (1 + 5) \times 10 + 5 = 6 \times 10 + 5 = 65$$

Ce résultat est obtenu par la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition On voit donc que l'écriture en colonne ne fait que traduire cette propriété.

Et la retenue ?

$$36+57 = 3\times10+7+5\times10+7 = (3+5)\times10+13 = (3+5)\times10+10+3 = (3+5+1)\times10+3 = 9\times10+3 = 93$$

Chapitre 2

Soustraction

2.1 Soustraction de nombres entiers

La distance Brest/Marseille est d'environ 1 329 km. Le compteur de la voiture du papa de Fanny indique 227 km lorsqu'ils effectuent leur première pause sur l'autoroute. Combien leur reste-t-il encore à parcourir pour arriver à Marseille ?

Pour éviter les erreurs, il faut toujours prévoir l'ordre de grandeur du résultat, en cherchant une valeur approchée ($1300 - 200 \approx 1100$).

Comme dans le cadre de l'addition, veillons à correctement poser les termes de l'opération en disposant bien le chiffre des unités sous celui des unités, celui des dizaines sous celui des dizaines et ainsi de suite.

Le plus grand nombre est posé en premier (soustraire un grand nombre d'un plus petit débouchant sur un nombre négatif).

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 3 & 2 & 9 \\ - & & 2 & 2 & 7 \\ \hline = & & & & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & 1 & 3 & 2 & 9 \\ - & & 2 & 2 & 7 \\ \hline = & & & 0 & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & 1 & 3 & 2 & 9 \\ - & & 2 & 2 & 7 \\ \hline = & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

Commençons à soustraire par colonne en commençant en haut à droite (9 - 7 = 2). Poursuivons avec la colonne des dizaines et ainsi de suite.

Pour vérifier le résultat, nous pouvons effectuer une addition de bas en haut, en commençant par la droite ($2 + 7 = 9$; $0 + 2 = 2$; $1 + 2 = 3$; $1 + 0 = 1$).

Dès lors, il leur reste 1 102 km à parcourir.

2.1.1 Report

Monsieur Dubois veut acheter une maison qui coûte 220 000 €. Il dispose d'un apport personnel de 86 750 €. Quel est le montant du crédit qu'il doit obtenir pour pouvoir financer son achat ?

Il faut toujours prévoir l'ordre de grandeur du résultat, en cherchant une valeur approchée ($220.000 - 90.000 \approx 130.000$).

Posons l'opération en respectant toujours la superposition des chiffres par rangs (unités sous unités, dizaines sous dizaines, centaines sous centaines ...) et en commençant par le plus grand nombre en haut.

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & & 8 & 6 & 7 & 5 & 0 \\ \hline = & & & & & ? & 0 \end{array} \longrightarrow \; ?$$

Nous allons recourir à l'une des propriétés de la soustraction et ajouter 10 dizaines au nombre du haut que nous retrancherons ensuite dans la colonne des centaines du nombre du bas. Dès lors, on a $10-5=5$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & 10 & \\ & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & & 8 & 6 & 7 & 5 & 0 \\ & & & & 1 & & \\ \hline = & & & & & 5 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & & 10 & 10 & \\ & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & & 8 & 6 & 7 & 5 & 0 \\ & & & 1 & 1 & & \\ \hline = & & & & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & 10 & 10 & 10 & \\ & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & & 8 & 6 & 7 & 5 & 0 \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline = & & & 3 & 2 & 5 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & 10 & 10 & 10 & 10 & \\ & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & & 8 & 6 & 7 & 5 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline = & 1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

2.2 Soustraction de nombres décimaux

Comme pour l'addition, il suffit de bien poser l'opération en alignant bien les virgules et de procéder ensuite comme avec les nombres entiers.

Exemple : $124,425 - 18,083 =?$

On pose la soustraction en alignant les colonnes comme dans un tableau de numération :

	centaines	dizaines	unités		dixièmes	centièmes	millièmes
			10			10	
	1	2	4	,	4	2	5
$-$		1	8	,	0	8	3
		1			1		
$=$	1	0	6	,	3	4	2

Dans le résultat, il ne faut surtout pas oublier de placer la virgule sous les autres virgules.

2.2.1 Chiffres manquants

Exemple : $156,5 - 41,275 = ?$

Ajoutons des zéros à droite pour compléter les centièmes et les millièmes pour faciliter le calcul :

	centaines	dizaines	unités		dixièmes	centièmes	millièmes
						10	10
	1	5	6	,	5	0	0
−		4	1	,	2	7	5
					1	1	
=	1	1	5	,	2	2	5

2.2.2 Soustraire un nombre décimal d'un nombre entier

Exemple : $364 - 42,275 = ?$

Transformons le nombre entier en nombre décimal en l'écrivant sous la forme 364,000 et poursuivons la soustraction comme ci-dessus.

	centaines	dizaines	unités		dixièmes	centièmes	millièmes
					10	10	10
	3	6	4	,	0	0	0
−		4	2	,	2	7	5
			1		1	1	
=	3	2	1	,	7	2	5

Attention, les retenues ne s'arrêtent pas à la virgule !

Chapitre 3

Multiplication

3.1 Multiplication par un nombre d'un chiffre sans report

La coopérative de l'école vient d'acheter 3 bureaux à 132 € pièce pour renouveler son mobilier. Quel est le montant de la dépense ?

Montant de la dépense : $132 \times 3 =?$ €

Notons que $132 = 1 \times 100 + 3 \times 10 + 2 \times 1$. Dès lors il vient que

$$132 \times 3 = 3 \times (1 \times 100 + 3 \times 10 + 2 \times 1) = 3 \times 100 + 3 \times 30 + 3 \times 2 = 300 + 90 + 6$$

En adopatant les notations précédentes, il vient

$$\begin{array}{cccc} & \text{centaines} & \text{dizaines} & \text{unités} \\ & 1 & 3 & 2 \\ \times & & & 3 \\ \hline = & & & 6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 2 \\ \times & & & 3 \\ \hline = & & 9 & 6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 2 \\ \times & & & 3 \\ \hline = & 3 & 9 & 6 \end{array}$$

3.2 Report

La coopérative vient cette fois d'acheter 4 ordinateurs à 475 € pièce pour renouveler son parc informatique. Quel est le montant de la dépense ?

Posons l'opération en respectant toujours la superposition des chiffres par rangs (unités sous unités, dizaines sous dizaines, centaines sous centaines ...) et en commençant par le plus grand nombre en haut.

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 7 & 5 \\ \times & & & 4 \\ \hline = & & & 20 \end{array} \longrightarrow \;?$$

On remarque que $5 \times 4 = 20$. Il nous faudra donc effectuer le report.

$$\begin{array}{cccc} & & +2 & \\ & 4 & 7 & 5 \\ \times & & & 4 \\ \hline = & & & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} & +3 & +2 & \\ & 4 & 7 & 5 \\ \times & & & 4 \\ \hline = & & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} & +3 & +2 & \\ & 4 & 7 & 5 \\ \times & & & 4 \\ \hline = & 19 & 0 & 0 \end{array}$$

3.3 Multiplication par un nombre entier quelconque

Une caissette contient 24 gros kiwis. Quelle masse de fruits est contenue dans cette caissette si un kiwi fait en moyenne 115g ?

Masse de fruits :

$$115 \times 24 = 115 \times (20 + 4) = (115 \times 4) + (115 \times 20) = 460 + 2300 = 2760$$

On remarque qu'on calcule la somme des résultats partiels obtenus.

Posons l'opération en respectant toujours la superposition des chiffres par rangs (unités sous unités, dizaines sous dizaines, centaines sous centaines ...) et en commençant par le plus grand nombre en haut.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & 5 \\ \times & & 2 & 4 \\ \hline & & +2 & \\ & 4 & 4 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & 5 \\ \times & & & 2 & 4 \\ \hline & & 4 & 6 & 0 \\ & & +1 & & \\ & 2 & 2 & 0 & . \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & 5 \\ \times & & & 2 & 4 \\ \hline & & 4 & 6 & 0 \\ + & 2 & 3 & 0 & . \\ \hline = & 2 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

Prenons un nombre un peu plus grand. La démarche va être identique :

$$\begin{array}{ccccc} & & 9 & 3 & 2 \\ \times & & 3 & 7 & 9 \\ \hline & & +2 & +1 & \\ & 8 & 1 & 7 & 8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccccc} & & & 9 & 3 & 2 \\ \times & & & 3 & 7 & 9 \\ \hline & & 8 & 3 & 8 & 8 \\ & +6 & +2 & +1 & & \\ & & 3 & 1 & 4 & . \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & & 9 & 3 & 2 \\ \times & & & & 3 & 7 & 9 \\ \hline & & & 8 & 3 & 8 & 8 \\ & & 6 & 5 & 2 & 4 & . \\ & +2 & & & & & \\ & & 7 & 9 & 6 & . & . \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & & 9 & 3 & 2 \\ \times & & & & 3 & 7 & 9 \\ \hline & & & 8 & 3 & 8 & 8 \\ + & & 6 & 5 & 2 & 4 & . \\ + & 2 & 7 & 9 & 6 & . & . \\ \hline = & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 8 \end{array}$$

3.4 Multiplication de nombres décimaux

3.4.1 Multiplier un nombre décimal par un entier ayant un seul chiffre

Un sachet de bulbes de tulipes vaut $12,65e$. Quel est le prix de 5 sachets ?

Effectuons cette opération avec la calculette, nous trouvons $12,65 \times 5 = 63,25e$

Posons la multiplication pour comprendre la démarche :

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & , & 6 & 5 \\ \times & & 5 & & & \\ \hline = & 6 & 3 & , & 2 & 5 \end{array}$$

Etape 1 : Effectuons la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule.

Etape 2 : Plaçons la virgule de façon à ce qu'il y ait autant de décimales au résultat que dans le multiplicande.

3.4.2 Multiplier un nombre décimal par un entier ayant deux ou plusieurs chiffres

Un litre de lait pèse $1,033\ kg$. Quel est le poids de 25 litres ?

Posons la multiplication

$$\begin{array}{cccccc} & & 1, & 0 & 3 & 3 \\ \times & & 2 & 5 & & \\ \hline & & 5 & 1 & 6 & 5 \\ + & 2 & 0 & 6 & 6 & . \\ \hline = & 2 & 5, & 8 & 2 & 5 \end{array}$$

Etape 1 : Effectuons la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule.

Etape 2 : Plaçons la virgule de façon à ce qu'il y ait autant de décimales au résultat que dans le multiplicande(ici 3).

3.4.3 Multiplier un nombre décimal par un autre nombre décimal

Considérons le produit suivant : $63,4 \times 7,5 =?$

Posons la multiplication

$$\begin{array}{rrrrr} & & 6 & 3, & 4 \\ \times & & & 7, & 5 \\ \hline & 3 & 1 & 7 & 0 \\ +\,4 & 4 & 3 & 8 & . \\ \hline =\,4 & 7 & 5, & 5 & 0 \end{array}$$

Etape 1 : Effectuons la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule.

Etape 2 : Plaçons la virgule de façon à ce qu'il y ait autant de décimales au résultat qu'au total des chiffres après la virgule du multiplicateur et du multiplicande.

3.4.4 Chiffres manquants

Considérons le produit suivant : $2,25 \times 0,015 =?$

Comme précédemment

$$\begin{array}{rrrrr} & & 2, & 2 & 5 \\ \times & 0, & 0 & 1 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 5 \\ + & 2 & 2 & 5 & . \\ \hline = \; 0,0 & 3 & 2 & 7 & 5 \end{array}$$

Etape 1 : Effectuons la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule.

Etape 2 : Plaçons la virgule de façon à ce qu'il y ait autant de décimales au résultat qu'au total des chiffres après la virgule du multiplicateur et du multiplicande.

On complète avec un ou plusieurs zéros, à gauche du produit, si nécessaire.

Chapitre 4

Division

4.1 Division entière à 1 chiffre

Un hôtel propose 3 nuits pour 699 €. Quel est le prix d'une nuit passée à l'hôtel ?

Rappel de la technique :

$$
\begin{array}{r|l}
\boxed{6}\,9\,9 & 3 \\ \cline{2-2}
-\underline{6} & 2 \\
0 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l}
6\,9\,9 & 3 \\ \cline{2-2}
-\underline{6} & 2\,3 \\
0\,9 & \\
-\underline{9} & \\
0 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l}
6\,9\,9 & 3 \\ \cline{2-2}
-\underline{6} & 2\,3\,3 \\
0\,9 & \\
-\underline{9} & \\
0\,9 & \\
-\underline{9} & \\
0 &
\end{array}
$$

Etape 1 : Partageons les centaines. En 6 combien de fois 3 ? 2 fois, reste 0. On écrit 2 au quotient et -6 sous le 6.

Etape 2 : Partageons les dizaines. On abaisse le 9. En 9 combien de fois 3 ? 3 fois, reste 0. On écrit 3 au quotient et -9 sous le 9 des dizaines.

Etape 3 : Partageons les unités. On abaisse le 9 des unités. En 9 combien de fois 3 ? 3 fois, reste 0. On écrit 3 au quotient et -9 sous le 9 des unités.

La division est terminée. Nous avons abaissé tous les chiffres du dividende et le quotient comporte 3 chiffres.

Il nous reste à effectuer la preuve : $233 \times 3 = 699$

4.1.1 Restes partiels

Le même hôtel propose une promotion de 3 nuits pour 495 €. Quel est le prix d'une nuit passée à l'hôtel ?

Rappel de la technique :

$$
\begin{array}{r|l} 4\;9\;5 & 3 \\ \cline{2-2} -\underline{3} & 1 \\ 1 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 4\;9\;5 & 3 \\ \cline{2-2} -\underline{3} & 1\;6 \\ 1\;9 & \\ -\underline{1\;8} & \\ 1 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 4\;9\;5 & 3 \\ \cline{2-2} -\underline{3} & 1\;6\;5 \\ 1\;9 & \\ -\underline{1\;8} & \\ 1\;5 & \\ -\underline{1\;5} & \\ 0 & \end{array}
$$

Etape 1 : Partageons les centaines. En 4 combien de fois 3 ? 1 fois, reste 1. On écrit 2 au quotient et -3 sous le 4.

Etape 2 : Partageons les dizaines. On abaisse le 9. En 19 combien de fois 3 ? 6 fois, reste 1. On écrit 6 au quotient et -18 sous le 19.

Etape 3 : Partageons les unités. On abaisse le 5 des unités. En 15 combien de fois 3 ? 5 fois, reste 0. On écrit 5 au quotient et -15 sous le 15 des unités.

La division est terminée. Nous avons abaissé tous les chiffres du dividende et le quotient est exact car le reste est égal à 0.

Tous les restes partiels sont inférieurs au diviseur.

Il nous reste à effectuer la preuve : $265 \times 3 = 495$

4.1.2 Premier chiffre à gauche plus grand que le diviseur

Les 4 mousquetaires doivent affronter 1692 gardes du cardinal. Combien de gardes va devoir affronter chaque mousquetaire ?

Rappel de la technique :

$$
\begin{array}{r|l} 1\;6\;9\;2 & 4 \\ \cline{2-2} -\underline{1\;6} & 4 \\ 0 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 1\;6\;9\;2 & 4 \\ \cline{2-2} -\underline{1\;6} & 4\;2 \\ 0\;9 & \\ -\underline{8} & \\ 1 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 1\;6\;9\;2 & 4 \\ \cline{2-2} -\underline{1\;6} & 4\;2\;3 \\ 0\;9 & \\ -\underline{8} & \\ 1\;2 & \\ -\underline{1\;2} & \\ 0 & \end{array}
$$

Etape 1 : Partageons les milliers. On commence toujours par le dernier chiffre le plus à gauche. 1 est inférieur à 4 , donc on transforme les mille en centaines et nous obtenons 16 centaines. Prenons donc 2 chiffres pour commencer le partage.

Etape 2 : Partageons les centaines. En 16 combien de fois 4 ? 4 fois, reste 0. On écrit 4 au quotient et -16 sous le 16.

Etape 3 : Partageons les dizaines. On abaisse le 9. En 9 combien de fois 4 ? 2 fois, reste 1. On écrit 2 au quotient et -8 sous le 9.

Etape 4 : Partageons les unités. On abaisse le 2 des unités. En 12 combien de fois 4 ? 3 fois, reste 0. On écrit 3 au quotient et -12 sous le 2 des unités.

La division est terminée. Nous avons abaissé tous les chiffres du dividende et le quotient est exact car le reste est égal à 0.

Tous les restes partiels sont inférieurs au diviseur.

Il nous reste à effectuer la preuve : $423 \times 4 = 1692$

4.1.3 Zéros dans le quotient

L'hôtel ci-dessus propose 6 nuitées en pension complète dans la suite impériale pour 4254 €. Quel est le prix d'une nuitée ?

Rappel de la technique :

$$\begin{array}{r|l} \overline{4\ 2}\ 5\ 4 & 6 \\ \cline{2-2} -4\ 2 & 7 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 4\ 2\ 5\ 4 & 6 \\ \cline{2-2} -4\ 2 & 7\ 0 \\ \cline{1-1} 0\ 5 & \\ -\ 0 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 4\ 2\ 5\ 4 & 6 \\ \cline{2-2} -4\ 2 & 7\ 0\ 9 \\ \cline{1-1} 0\ 5 & \\ -\ 0 & \\ \cline{1-1} 5\ 4 & \\ -5\ 4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Etape 1 : Partageons les milliers. On commence toujours par le dernier chiffre le plus à gauche. 4 est inférieur à 6 , donc on transforme les mille en centaines et nous obtenons 42 centaines. Prenons donc 2 chiffres pour commencer le partage.

Etape 2 : Partageons les centaines. En 42 combien de fois 6 ? 7 fois, reste 0. On écrit 7 au quotient et -42 sous le 42.

Etape 3 : Partageons les dizaines. On abaisse le 5. En 5 combien de fois 6 ? 0 fois, reste 5. On écrit 0 au quotient et -0 sous le 5.

Etape 4 : Partageons les unités. On abaisse le 4 des unités. En 54 combien de fois 6 ? 9 fois, reste 0. On écrit 9 au quotient et -54 sous le 54 des unités.

La division est terminée. Nous avons abaissé tous les chiffres du dividende et le quotient est exact car le reste est égal à 0.

Tous les restes partiels sont inférieurs au diviseur.

Il nous reste à effectuer la preuve : $709 \times 6 = 4254$

4.2 Diviseur à 2 ou 3 chiffres

Les 25 élèves d'une classe ont payé 375 €pour assister à la représentation d'une pièce de théâtre. Quel est le prix d'une place ?

Rappel de la technique :

$$
\begin{array}{r|l}
\overline{3\ 7}\ 5 & 2\ 5 \\ \cline{2-2}
-\underline{2\ 5} & 1 \\
1\ 2 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l}
3\ 7\ 5 & 2\ 5 \\ \cline{2-2}
-\underline{2\ 5} & 1\ 5 \\
1\ 2\ 5 & \\
-\underline{1\ 2\ 5} & \\
0 &
\end{array}
$$

Etape 1 : Partageons les centaines. On commence toujours par le dernier chiffre le plus à gauche. 3 est inférieur à 25 , donc on transforme les centaines en dizaines et nous obtenons 37 centaines. Prenons donc 2 chiffres pour commencer le partage.

Etape 2 : Partageons les dizaines. En 37 combien de fois 25 ? 1 fois, reste 12. On écrit 1 au quotient et -25 sous le 37.

Etape 3 : Partageons les nuités. On abaisse le 5. En 125 combien de fois 25 ? 5 fois, reste 0. On écrit 5 au quotient et -125 sous le 125.

La division est terminée. Nous avons abaissé tous les chiffres du dividende et le quotient est exact car le reste est égal à 0.

Tous les restes partiels sont inférieurs au diviseur.

Il nous reste à effectuer la preuve : $15 \times 25 = 375$

Autre exemple : Dans une usine de produits laitiers, les crèmes sont emballées en packs de 16 petits pots. Combien de packs seront réalisés avec 21 664 crèmes ?

$$\begin{array}{r|l} \overline{2\,1}\,6\,6\,4 & 1\,6 \\ \cline{2-2} -\underline{1\,6} & 1 \\ 5 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 2\,1\,6\,6\,4 & 1\,6 \\ \cline{2-2} -\underline{1\,6} & 1\,3 \\ 5\,6 & \\ -\underline{4\,8} & \\ 8 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 2\,1\,6\,6\,4 & 1\,6 \\ \cline{2-2} -\underline{1\,6} & 1\,3\,5 \\ 5\,6 & \\ -\underline{4\,8} & \\ 8\,6 & \\ -\underline{8\,0} & \\ 6 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 2\,1\,6\,6\,4 & 1\,6 \\ \cline{2-2} -\underline{1\,6} & 1\,3\,5\,4 \\ 5\,6 & \\ -\underline{4\,8} & \\ 8\,6 & \\ -\underline{8\,0} & \\ 6\,4 & \\ -\underline{6\,4} & \\ 0 & \end{array}$$

Il nous reste à effectuer la preuve : $1354 \times 16 = 21664$

Diviseur à 3 chiffres : La coopérative de l'école possède 1 786 €en caisse. Combien d'ordinateurs à 547 €peut-elle acquérir ? Quelle somme restera-t-il en caisse ?

$$\begin{array}{r|l} \overline{1\,7\,8\,6} & 5\,4\,7 \\ \cline{2-2} -\underline{1\,6\,4\,1} & 3 \\ 1\,4\,5 & \end{array}$$

Il nous reste à effectuer la preuve : $3 \times 547 + 145 = 1786$

4.3 Reste de la division entière

Les 7 mercenaires ont été payés avec une caisse contenant 2396 pièces d'or. Combien de pièces d'or comportera la part de chacun des mercenaires ?

Rappel de la technique :

$$\begin{array}{r|l} \overline{2\,3}\,9\,6 & 7 \\ \cline{2-2} -\underline{2\,1} & 3 \\ 2 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 2\,3\,9\,6 & 7 \\ \cline{2-2} -\underline{2\,1} & 3\,4 \\ 2\,9 & \\ -\underline{2\,8} & \\ 1 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 2\,3\,9\,6 & 7 \\ \cline{2-2} -\underline{2\,1} & 3\,4\,2 \\ 2\,9 & \\ -\underline{2\,8} & \\ 1\,6 & \\ -\underline{1\,4} & \\ 2 & \end{array}$$

Etape 1 : Partageons les centaines. En 23 combien de fois 7 ? 3 fois, reste 2. On écrit 3 au quotient et -21 sous le 23.

Etape 2 : Partageons les dizaines. On abaisse le 9. En 29 combien de fois 7 ? 4 fois, reste 1. On écrit 4 au quotient et -28 sous le 29.

Etape 3 : Partageons les unités. On abaisse le 6 des unités. En 16 combien de fois 7 ? 2 fois, reste 2. On écrit 2 au quotient et -14 sous le 16 des unités.

La division est terminée dans le cadre d'un quotient entier. Nous avons abaissé tous les chiffres du dividende et le reste est égal à 2.

Tous le reste est inférieur au diviseur.

Il nous reste à effectuer la preuve : $342 \times 7 + 2 = 2396$

4.4 Quotient décimal

Rappel de la technique :

$$
\begin{array}{r|l} 225 & 8 \\ \cline{2-2} -16 & 28 \\ 65 & \\ -64 & \\ \hline 1 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 225 & 8 \\ \cline{2-2} -16 & 28{,}1 \\ 65 & \\ -64 & \\ 10 & \\ -8 & \\ \hline 2 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 225 & 8 \\ \cline{2-2} -16 & 28{,}12 \\ 65 & \\ -64 & \\ 10 & \\ -8 & \\ 20 & \\ -16 & \\ \hline 4 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 225 & 8 \\ \cline{2-2} -16 & 28{,}125 \\ 65 & \\ -64 & \\ 10 & \\ -8 & \\ 20 & \\ -16 & \\ 40 & \\ -40 & \\ \hline 0 & \end{array}
$$

Etape 1 : Dans le cadre de la division entière, nous obtenons un reste de 1. Convertissons le reste en dixièmes en écrivant un zéro à sa droite et plaçons une virgule au quotient. Dès lors, en 10 combien de fois 8 ? 1 fois ; il reste 2 dixièmes. (Preuve : $225 = 28,1 \times 8 + 0,2$)

Etape 2 : Il reste 2 dixièmes. Convertissons le reste en centièmes en écrivant un zéro à sa droite et poursuivons la division. En 20 combien de fois 8 ? 2 fois ; il reste 4 centièmes. (Preuve : $225 = 28,12 \times 8 + 0,04$)

Etape 3 : Il reste 4 centièmes. Convertissons le reste en millièmes en écrivant un zéro à sa droite et poursuivons la division. En 40 combien de fois 8 ? 5 fois ; il reste 0 millièmes. (Preuve : $225 = 28,125 \times 8$)

Ici, le quotient est exact au millième près, mais il aurait pu être approché.

4.4.1 Dividende plus petit que le diviseur

Rappel de la technique :

$$
\begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \hline 1 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ \cline{2-2} -0 & 0{,}1 \\ 10 & \\ -7 & \\ \hline 3 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ \cline{2-2} -0 & 0{,}14 \\ 10 & \\ -7 & \\ 30 & \\ -28 & \\ \hline 2 & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ \cline{2-2} -0 & 0{,}142 \\ 10 & \\ -7 & \\ 30 & \\ -28 & \\ 20 & \\ -14 & \\ \hline 6 & \end{array}
$$

Etape 1 : Procédons comme précédemment, en n'oubliant pas de commencer par un zéro au quotient.

Etape 2 : Le quotient est arrondi à 3 décimales. Poursuivons la division.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ -\underline{0} & \overline{0{,}1\,4\,2\,8} \\ 1\,0 & \\ -\underline{7} & \\ 3\,0 & \\ -\underline{2\,8} & \\ 2\,0 & \\ -\underline{1\,4} & \\ 6\,0 & \\ -\underline{5\,6} & \\ 4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ -\underline{0} & \overline{0{,}1\,4\,2\,8\,5} \\ 1\,0 & \\ -\underline{7} & \\ 3\,0 & \\ -\underline{2\,8} & \\ 2\,0 & \\ -\underline{1\,4} & \\ 6\,0 & \\ -\underline{5\,6} & \\ 4\,0 & \\ -\underline{3\,5} & \\ 5 & \end{array} \longrightarrow \ldots$$

Ici, le quotient est arrondi à 5 décimales, mais on aurait pu continuer.

Autre exemple :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1\,4 \\ -\underline{0} & \overline{0} \\ 1 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 1 & 1\,4 \\ -\underline{0} & \overline{0{,}0\,7} \\ 1\,0 & \\ -\underline{0} & \\ 1\,0\,0 & \\ -\underline{9\,8} & \\ 2 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 1 & 1\,4 \\ -\underline{0} & \overline{0{,}0\,7\,1} \\ 1\,0 & \\ -\underline{0} & \\ 1\,0\,0 & \\ -\underline{9\,8} & \\ 2\,0 & \\ -\underline{1\,4} & \\ 6 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 1 & 1\,4 \\ -\underline{0} & \overline{0{,}0\,7\,1\,4} \\ 1\,0 & \\ -\underline{0} & \\ 1\,0\,0 & \\ -\underline{9\,8} & \\ 2\,0 & \\ -\underline{1\,4} & \\ 6\,0 & \\ -\underline{5\,6} & \\ 4 & \end{array} \longrightarrow \ldots$$

4.5 Division de nombres décimaux

4.5.1 Dividende décimal

Un lot de 3 bidons de lessive est vendu 17,85 €. Quel est le prix d'un bidon de lessive ?

Rappel de la technique :

$$\begin{array}{r|l} 1\,7{,}8\,5 & 3 \\ -\underline{1\,5} & \overline{5{,}9\,5} \\ 2\,8 & \\ -\underline{2\,7} & \\ 1\,5 & \\ -\underline{1\,5} & \\ 0 & \end{array}$$

Etape 1 : On divise la partie entière du dividende. Nous obtenons $17/3 = 5$ reste 2.

Etape 2 : On passe à la partie décimale et on place la virgule au quotient.

Etape 3 : On abaisse le chiffre des dixièmes. Il vient $28/3 = 9$ reste 1

Etape 4 : On abaisse le chiffre des centièmes. Nous avons finalement $15/3 = 5$ reste 0.

Autres exemples (zéros manquants) :

$$
\begin{array}{r|l}
0{,}1\,8 & 6 \\ \cline{2-2}
-\underline{\quad 1\,8} & 0{,}0\,3 \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\overline{2\,7{,}2\,8} & 3\,7\,5 \\ \cline{2-2}
-\underline{2\,6\,2\,5} & 0{,}0\,7\,2\,7 \\
1\,0\,3\,0 & \\
-\underline{\quad 7\,5\,0} & \\
2\,8\,0\,0 & \\
-\underline{2\,6\,2\,5} & \\
1\,7\,5 &
\end{array}
$$

4.5.2 Diviseur décimal

Une boîte de 2,5 kg de peinture pour plafond coûte 11,75 €. Quel le prix d'1 kg de peinture ?

Diviser un nombre décimal par un nombre décimal n'est pas possible avec le formalisme du calcul écrit présenté dans ce document. Mais on sait diviser un nombre décimal par un nombre entier. En faisant appel à la proportionnalité, on peut dire que 25 kg de peinture coûteraient 117,50 €. Le prix du kg de peinture est donc de $117{,}50/25 = 4{,}70$ €

Rappel de la technique :

$$
\begin{array}{r|l}
1\,1{,}7 & 2{,}5 \\ \cline{2-2}
-\underline{1\,0\,0} & 4{,}6\,8 \\
1\,7\,0 & \\
-\underline{1\,5\,0} & \\
2\,0\,0 & \\
-\underline{2\,0\,0} & \\
0 &
\end{array}
\quad \xrightarrow{\times 10} \quad
\begin{array}{r|l}
\overline{1\,1\,7} & 2\,5 \\ \cline{2-2}
-\underline{1\,0\,0} & 4{,}6\,8 \\
1\,7\,0 & \\
-\underline{1\,5\,0} & \\
2\,0\,0 & \\
-\underline{2\,0\,0} & \\
0 &
\end{array}
$$

On va rendre le diviseur entier .

Etape 1 : Multiplions le diviseur par 10 pour le rendre entier.

Etape 2 : Multiplions le dividende par 10 en déplaçant la virgule d'un rang vers sa droite.

Etape 3 : Effectuons la division. Lorsqu'on abaisse le 5 (1er chiffre décimal du dividende), n'oublions pas de placer la virgule au quotient.

Autres exemples :

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 1{,}8 & 0{,}4\,5 \\ \cline{3-3}
- & 0 & 4 \\ \cline{2-2}
 & 1\,8\,0 & \\
- & 1\,8\,0 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
\quad \xrightarrow{\times 100} \quad
\begin{array}{rr|l}
 & 1\,8\,0 & 4\,5 \\ \cline{3-3}
- & 1\,8\,0 & 4 \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 0{,}6\,3 & 5{,}2 \\ \cline{3-3}
- & 5\,2 & 0{,}1\,2\,1 \\ \cline{2-2}
 & 1\,1\,0 & \\
- & 1\,0\,4 & \\ \cline{2-2}
 & 6\,0 & \\
- & 5\,2 & \\ \cline{2-2}
 & 8 &
\end{array}
\quad \xrightarrow{\times 100} \quad
\begin{array}{rr|l}
 & 6\,3 & 5\,2\,0 \\ \cline{3-3}
- & 0 & 0{,}1\,2 \\ \cline{2-2}
 & 6\,3\,0 & \\
- & 5\,2\,0 & \\ \cline{2-2}
 & 1\,1\,0\,0 & \\
- & 1\,0\,4\,0 & \\ \cline{2-2}
 & 6\,0 &
\end{array}
$$

Remarquons que dans le cas d'un dividende décimal, nous pouvons également appliquer le principe ci-dessus.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 1\,7{,}8\,5 & 3 \\ \cline{3-3}
- & 1\,5 & 5{,}9\,5 \\ \cline{2-2}
 & 2\,8 & \\
- & 2\,7 & \\ \cline{2-2}
 & 1\,5 & \\
- & 1\,5 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
\quad \xrightarrow{\times 100} \quad
\begin{array}{rr|l}
 & 1\,7\,8\,5 & 3\,0\,0 \\ \cline{3-3}
- & 1\,5\,0\,0 & 5{,}9\,5 \\ \cline{2-2}
 & 2\,8\,5\,0 & \\
- & 2\,7\,0\,0 & \\ \cline{2-2}
 & 1\,5\,0\,0 & \\
- & 1\,5\,0\,0 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Chapitre 5

Racine carrée

$\sqrt{4729} = ?$

Cette méthode se base sur les relations suivantes :

On sait que la racine carrée, arrondie à l'unité, d'un nombre entier est la racine du plus grand carré parfait contenu dans ce nombre. Par exemple, si l'on cherche la racine de 54, on aura $4624 < 4729 < 4761 \Leftrightarrow 68^2 < 4729 < 69^2$ et on peut affirmer que $68 < \sqrt{4729} < 69 \Rightarrow \sqrt{4729} \approx 68, \ldots.$

Par conséquent, la valeur approchée de la racine carrée d'un nombre est la racine du plus grand carré parfait contenu dans ce nombre.

La différence est le reste. Dans notre cas, on a $4729 - 4624 = 105$.

D'une façon plus générale, soit N le nombre dont à cherche à extraire la racine ($\sqrt{N} = ?$). Par conséquent, N sera borné entre 2 carrés successifs : $a^2 \leq N < (a+1)^2$. Dès lors, on a que $N - a^2 < 2a + 1$ et on peut affirmer que le reste de l'extraction de la racine carrée d'un nombre est donc inférieur au double de la racine augmenté d'une unité. Vis-à-vis de notre exemple, nous avons $5 < 2.7 + 1$.

Par ailleurs, n'oublions pas que le nombre de chiffres d'une racine d'un nombre entier est égal au nombre de groupements de 2 chiffres de ce nombre.

Compilons les remarques ci-dessus pour présenter la méthode :

$$\begin{array}{ccccc|c} & 4 & 7 & 2 & 9 & 6 \\ - & 3 & 6 & & & \end{array} \quad \xrightarrow{2\times 6=12} \quad \begin{array}{ccccc|ccc} & 4 & 7 & 2 & 9 & 6 & & \\ - & 3 & 6 & & & & 1 & 2 \\ & 1 & 1 & & & & & \end{array}$$

Abaissons le groupe de 2 chiffres suivant et testons 129

$$\xrightarrow{129} \quad \begin{array}{ccccc|cccc} & 4 & 7 & 2 & 9 & 6 & & & \\ - & 3 & 6 & & & & 1 & 2 & 9 \\ & 1 & 1 & 2 & 9 & \times & & & 9 \\ & & & & & 1 & 1 & 6 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{1161>1129\Rightarrow 128} \quad \begin{array}{ccccc|cccc} & 4 & 7 & 2 & 9 & 6 & & & \\ - & 3 & 6 & & & & 1 & 2 & 8 \\ & 1 & 1 & 2 & 9 & \times & & & 8 \\ & & & & & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

Le nombre 128 convient, inscrivons 8 et continuons.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & 4 & 7 & 2 & 9 & 6 & 8 & \\
- & 3 & 6 & & & & & \\
 & 1 & 1 & 2 & 9 & & & \\
- & 1 & 0 & 2 & 4 & & & \\
 & & 1 & 0 & 5 & & &
\end{array}
\quad \xrightarrow{2\times 68=136} \quad
\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & 4 & 7 & 2 & 9 & 6 & 8 & \\
- & 3 & 6 & & & 1 & 3 & 6 \\
 & 1 & 1 & 2 & 9 & & & \\
- & 1 & 0 & 2 & 4 & & & \\
 & & 1 & 0 & 5 & & &
\end{array}
$$

Ajoutons un groupe de 2 zéros ainsi que la virgule au radical et testons 1369

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrrr}
 & 4 & 7 & 2 & 9 & & & 6 & 8, & & \\
- & 3 & 6 & & & & & 1 & 3 & 6 & 9 \\
 & 1 & 1 & 2 & 9 & & & \times & & & 9 \\
- & 1 & 0 & 2 & 4 & & & 12 & 3 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & & & &
\end{array}
\quad \xrightarrow{12321>10500\Rightarrow 1368?\ldots} \quad
\begin{array}{rrrrrrr|rrrr}
 & 4 & 7 & 2 & 9 & & & 6 & 8 & & \\
- & 3 & 6 & & & & & 1 & 3 & 6 & 7 \\
 & 1 & 1 & 2 & 9 & & & \times & & & 7 \\
- & 1 & 0 & 2 & 4 & & & 9 & 5 & 6 & 9 \\
 & & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

Le nombre 1367 convient, inscrivons 7.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrr}
 & 4 & 7 & 2 & 9 & & & 6 & 8, & 7 \\
- & 3 & 6 & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 2 & 9 & & & & & \\
- & 1 & 0 & 2 & 4 & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 5 & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & & & \\
- & & & 9 & 5 & 6 & 9 & & & \\
 & & & & 9 & 3 & 1 & & &
\end{array}
$$

Avec 4 chiffres après la virgule, la calculette nous donne $\sqrt{4729} = 68,7677$. Remarquons que la méthode vue ci-dessus donne la décimale exacte et pas la valeur correctement arrondie.

Chapitre 6

Exercices

6.1 Additions

$$
\begin{array}{r}
6\,8\,8\,7 \\
+ \quad 4\,6\,5\,9 \\ \hline
\text{– – – – –}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
5\,6\,9\,7 \\
+ \quad 4\,9\,7\,2 \\ \hline
\text{– – – – –}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
5\,1{,}7\,9 \\
+\,2\,3{,}0\,5 \\ \hline
\text{– — –}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\,3\,2{,}0\,5\,4 \\
+\,1\,2\,5{,}9\,9\,8 \\ \hline
\text{– – — – –}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2\,1\,5{,}2 \\
+ \quad 4\,5{,}5\,6 \\ \hline
\text{– – — –}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1\,2\,5{,}4 \\
+ \quad 1{,}0\,9\,6 \\ \hline
\text{– – — – –}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\,2\,3{,}5\,2 \\
+ \quad 8\,3\phantom{{,}5\,2} \\ \hline
\text{– – — –}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4\,5\,6{,}4 \\
+ \quad 4{,}0\,5\,7 \\ \hline
\text{– – — – –}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3\,2{,}9 \\
+\,2\,3{,}5\,6\,2 \\ \hline
\text{– — – –}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\,7\phantom{{,}0\,5\,7} \\
+ \quad 4{,}0\,5\,7 \\ \hline
\text{– — – –}
\end{array}
$$

Calculer

$5244 + 1453 =?$ $\quad 6271 + 522 =?$ $\quad 8587 + 1674 =?$ $\quad 9879 + 322 =?$ $\quad 23,5 + 17,9 =?$

$105,53 + 13,98 =?$ $\quad 69 + 17,8 =?$ $\quad 957 + 87,9 =?$ $\quad 27,5 + 4,586 =?$ $\quad 16584,2 + 2489,547 =?$

$6264 + 3421 + 1277 =?$ $\quad 29,5 + 4,5 + 13,8 =?$ $\quad 202,74 + 0,009 + 54,578 =?$

Problèmes

1. Un livre qui valait 37 €40 vient d'augmenter de 4 €75. Quel est son nouveau prix ?

2. Un athlète lance le poids à 17, 50 m Un adversaire réussit un lancer plus long de 0,95 m. Quelle est la performance du second athlète ?

3. Une canalisation d'eau mesure 15,50 m. Pour la prolonger, j'utilise d'abord un tuyau de 5,80 m. Encore trop court. J'utilise donc un second tuyau de 3,75 m. là j'arrive au robinet. Quelle sera alors la longueur totale du tuyau ?

4. Pour arroser le jardin, je soutire du récupérateur d'eau de pluie d'abord 15, 75 litres, puis 5 litres et encore 12,50 litres. Quelle quantité d'eau j'ai soutiré de ma réserve ?

5. Pour mon anniversaire, je suis allé au restaurant avec mes parents. On a commandé des menus. Mon père un menu a 23,50 €, ma mère un menu seulement a 8,25 €, elle est encore au régime, ma petite soeur, un menu enfant 4,75 €, c'est bien suffisant. Moi, je me suis contenté d'un menu à 15,75 €, celui avec deux desserts. Quel sera le montant de l'addition ?

6.2 Soustractions

$$\begin{array}{r} 6\,8\,8\,7 \\ -\,4\,6\,5\,9 \\ \hline \text{– – – –} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,6\,9\,7 \\ -\,4\,9\,7\,2 \\ \hline \text{– – –} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,1{,}7\,9 \\ -\,2\,3{,}0\,5 \\ \hline \text{– ––– –} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2{,}0\,5\,4 \\ -\,1\,2\,5{,}9\,9\,8 \\ \hline \text{––– – –} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,1\,5{,}2\,0 \\ -\quad 4\,5{,}5\,6 \\ \hline \text{– – ––– –} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\,2\,5{,}4\,0\,0 \\ -\qquad 1{,}0\,9\,6 \\ \hline \text{– – ––– – –} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,3{,}5\,2 \\ -\quad 8\,3 \quad\; \\ \hline \text{– ––– –} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,5\,6{,}4\,0\,0 \\ -\qquad 4{,}0\,5\,7 \\ \hline \text{– – ––– – –} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,2{,}9\,0\,0 \\ -\,2\,3{,}5\,6\,2 \\ \hline \text{––– – –} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,7{,}0\,0\,0 \\ -\quad 4{,}0\,5\,7 \\ \hline \text{– ––– – –} \end{array}$$

Calculer

$5244 - 1453 =?$ $\quad 6271 - 522 =?$ $\quad 8587 - 1674 =?$ $\quad 9879 - 322 =?$ $\quad 23,5 - 17,9 =?$

$105,53 - 13,98 =?$ $\quad 69 - 17,8 =?$ $\quad 957 - 87,9 =?$ $\quad 23,5 - 4,586 =?$ $\quad 16584,2 - 2489,547 =?$

Problèmes

1. Etienne mesure 0,11 m de moins que Marie, qui mesure 0,27 m de moins que Jérôme. Jérôme mesure 1,53 m. Quelle est la taille de Marie et d'Etienne ?

2. Un camion transportait un chargement de 1490,5 kg. Au premier virage, il perd 555,25 kg. Quelle est la nouvelle masse du chargement ?
3. Ma console valait 299,99 €. Le vendeur m'a fait une ristourne de 15 €. Combien je vais payer ?

4. Pour la Saint Michel, je suis partie à la foire avec un billet de 20 €. Je reviens avec 8,50 €. Combien j'ai dépensé ?

5. Je voulais m'acheter deux jeux, l'un valant 45,25 €et l'autre valant 67,50 €. Mais il me manque 8,30 €. De quelle somme je dispose ?

6.3 Multiplications

$$\begin{array}{r} 6\,8\,8\,7 \\ \times \qquad 9 \\ \hline \text{- - - - -} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,6\,9\,7 \\ \times \quad 7\,2 \\ \hline \text{- - - - -} \\ \text{- - - - -} \\ \hline \text{- - - - - -} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2{,}0\,5\,4 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline \text{- - --- - -} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,1{,}7\,9 \\ \times \quad 1\,7 \\ \hline \text{- - - - -} \\ \text{- - - -} \\ \hline \text{- - --- -} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{,}0\,5\,7 \\ \times \quad 1\,2\,5 \\ \hline \text{- - - - -} \\ \text{- - - -} \\ \text{- - - -} \\ \hline \text{- - --- - -} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\,1\,5{,}2 \\ \times \quad 4{,}6 \\ \hline \text{- - - - -} \\ \text{- - - -} \\ \hline \text{- - --- -} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,5{,}4 \\ \times \quad 1{,}9 \\ \hline \text{- - - - -} \\ \text{- - - -} \\ \hline \text{- - --- -} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,3{,}5\,2 \\ \times \quad 0{,}8\,3 \\ \hline \text{- - - - -} \\ \text{- - - - -} \\ \hline \text{- - --- - - -} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,5\,6{,}4 \\ \times\, 0{,}0\,5\,7 \\ \hline \text{- - - - -} \\ \text{- - - - -} \\ \text{- - - - - - -} \\ \hline \text{- --- - - -} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}3\,6\,9 \\ \times \quad 3{,}3\,5 \\ \hline \text{- - - -} \\ \text{- - - -} \\ \text{- - - -} \\ \hline \text{--- - - - -} \end{array}$$

Calculer

$5244 \times 7 =?$ $6271 \times 63 =?$ $85,87 \times 8 =?$ $9,879 \times 26 =?$ $2,035 \times 115 =?$

$69 \times 1,3 =?$ $15,3 \times 17,8 =?$ $95,7 \times 0,79 =?$ $4,586 \times 23,5 =?$ $584,2 \times 20,05 =?$

Problèmes

1. Pour confectionner des rideaux, nous achetons 7,50 m de tissu valant 14 ,50 euro le mètre. Calcule le prix de revient de ses rideaux.

2. Un litre d'huile pèse 0,910 kg ; Nous achetons une huile vendue en bidon de 5 L. Quelle masse d'huile contient le bidon ? Quel est le prix du bidon sachant qu'il est vendu 2,25 euro le litre ?

3. Les 24 élèves de 3^{eme} primaire de l'école partent en classe de découverte avec leur instituteur pour une durée de deux semaines. Le prix de la pension est 15,50 euro par jour et par personne. Le transport est facturé 20 euro par personne. Quel est le coût de ce séjour pour la mairie ?

4. Une agence de voyages propose un séjour d'une semaine pour 45, 50 euro par personne et par jour. A combien reviendra ce séjour pour une famille de 4 personnes ?

5. Un éleveur entoure un pré de 865,50 m de périmètre avec une clôture revenant à 6 euro le mètre. Quel sera le coût de la clôture ?

6.4 Divisions

$$\begin{array}{r|l} 5\;6\;9\;7 & 9 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\;\;\; & \_\;\_ \\ 2\;9\;\; & \\ -\;\_\;\_\;\; & \\ 2\;\; & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6\;4\;0\;8 & 7\;2 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\_\;\; & \_\;\_ \\ 6\;4\;8 & \\ -\;\_\;\_\;\_ & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7\;5\;3\;7 & 4\;7 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\;\;\; & \_\;\_ \\ 2\;8\;3\;\; & \\ -\;\_\;\_\;\_\;\; & \\ 1\;\; & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 1\;1 \\ \cline{2-2} -\;\_ & \_ \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\;3\;2{,}0\;5\;4 & 3 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; & \_\_\_\;\_\;\_ \\ 1\;2\;\;\;\;\;\;\;\;\; & \\ -\;\_\;\_\;\;\;\;\;\;\;\;\; & \\ 0\;\;\;\;\;\;\;\;\; & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5\;1{,}7\;9 & 1\;7 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\;\;\;\; & \_\_\_ \\ 0\;7\;\; & \\ -\;\_\;\; & \\ 7\;\; & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4{,}0\;5\;7 & 1\;2\;5 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\_\;\;\; & \_\_\_\;\_\;\_ \\ 3\;0\;7 & \\ -\;\_\;\_\;\_ & \\ 5\;7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\;1\;5{,}2 & 4{,}6 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\_\;\; & \_\;\_ \\ 3\;1\;2 & \\ -\;\_\;\_\;\_ & \\ 3\;6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\;2\;5{,}4 & 1{,}9 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\_\;\; & \_\;\_ \\ 1\;1\;4 & \\ -\;\_\;\_\;\_ & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\;2\;3{,}5\;2 & 0{,}8\;3 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\;\;\;\; & \_\;\_ \\ 4\;0\;5\;\; & \\ -\;\_\;\_\;\_\;\; & \\ 7\;3\;\; & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4\;5\;6{,}4 & 0{,}0\;5\;7 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\_\;\; & \_\;\_\;\_\;\_ \\ 0\;4 & \\ -\;\_ & \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 0{,}3\;6\;9 & 3{,}3\;5 \\ \cline{2-2} -\;\_\;\_\;\_ & \_\_\_\;\_ \\ 3\;4\;0 & \\ -\;\_\;\_\;\_ & \\ 5 & \end{array}$$

Calculer

$5244 \div 7 =?$ $\quad 6271 \div 63 =?$ $\quad 85,87 \div 8 =?$ $\quad 9,879 \div 26 =?$ $\quad 2,035 \div 115 =?$

$69 \div 1,3 =?$ $\quad 15,3 \div 17,8 =?$ $\quad 95,7 \div 0,79 =?$ $\quad 4,586 \div 23,5 =?$ $\quad 584,2 \div 0,05 =?$

Problèmes

1. Une douzaine d'oeufs vaut 2,40 €. Calcule le prix d'un oeuf.

2. 12 m de tuyau ont coûté 178,20 €. Quel est le prix d'un mètre de tuyau ?

3. Camille a fait deux fois l'aller retour entre l'école et chez elle. Elle a parcouru en tout 15,4 km. Quelle est la distance entre chez elle et l'école ?

4. Afin de préparer des affiches pour la kermesse de l'école, les élèves découpent des bandes de papier dans un rouleau de 30 m. Ils utilisent d'abord 3,75 m pour l'entée de l'école, puis ils découpent avec le reste 35 affiches. Quelle est en mètre la hauteur d'une affiche ?

5. Dans une grande surface, je me commande un lecteur DVD coûtant 158,70 €. Quel sera le montant d'un versement si je paye en 3 fois ?

6.5 Racines carrées

Extraire les racines carrées des nombres suivants

4225	99856	6692569	$76,5625$
7453	47423	7613824	$69,93$

6.6 Exercices récapitulatifs

1. Pour partir en vacances je remets ma voiture en état : Essuie glaces 12 € ; pneus 105 € ; plaquettes de frein 245 € ; vidange 35 €. Quel est le prix de la révision ?

2. J'achète un ordinateur d'un montant de 860 €. Sachant que le clavier coûte 69 €, la souris 25 €, et l'écran 310 €. Quel est le prix de l'unité centrale ?

3. Je voulais m'acheter deux jeux, l'un valant 45, 25 €et l'autre valant 67,50 €. Mais il me manque 8, 30 €. De quelle somme je dispose ?

4. Une conserverie expédie 400 petites boites de choucroute à 6 €chacune et 960 boites de quenelles à 12 €l'une. Quel est le prix de vente de cette expédition ?

5. Camille était très fatiguée, le médecin lui a prescrit 3 boites de fortifiants qui contiennent chacune 12 ampoules. Camille doit avaler 4 ampoules par jour. Calcule la durée du traitement ?

6. Pour mon noël, je me suis acheté un voiture télécommandée au prix de 325,50 €plus 6 piles à 2,50 €les trois. Quel est le prix de mon cadeau ?

7. Un poids lourd vide pèse 3,244 t. Il est chargé de 52 caisses de 0,65 t chacune. Quelle est la masse du poids lourd chargé ?

8. Une école reçoit une commande de livres pour une valeur de 384,75 €. Cet envoi est composé de 9 dictionnaires représentant un total de 128,25 €et de 27 livres de lecture. Quel est le prix d'un dictionnaire ? Quel est le prix d'un livre de lecture ?

9. Ma liste de course : 0, 450 kg d'emmenthal à 8,20 euro le kg ; 0, 250 kg de Gouda à 9,20 euro le kg et 6 yaourts. Je paye en tout 9,24 €. Quel est le prix d'un yaourt ?

10. La facture du garage pour la remise en état de ma voiture : Pièces moteur : 435,50 €. Fournitures divers : 29, 25 €. 2 bidons d'huile à 16,80 €les deux. Le total de la facture s'élève à 571,85 €, il comprend également $4h30$ de main d'oeuvre. Quel est le prix d'un litre d'huile ? Quel est le prix d'une heure de main d'oeuvre ?

Deuxième partie

Grandeurs

Chapitre 7

Unités

L'unité est une généralisation du chiffre 1.

En physique elle permet de mesurer une grandeur en fonction d'une valeur unitaire, par exemple une seconde. Elle se base sur la définition d'étalons.

On effectue toujours des mesures quantitatives [1] de grandeurs physiques par comparaison avec des grandeurs qui sont prises comme références et qui constituent des grandeurs étalon. Par exemple, si vous dites qu'un cours a duré 59 minutes, cela signifie que la leçon s'est poursuivie pendant un temps qui correspond à un nombre déterminé de tic-tac de l'horloge. Ici, la quantité mesurée a la dimension d'un temps. L'unité de mesure est la minute et l'horloge est l'étalon. Il s'agit d'un étalon secondaire puisque la minute n'est pas définie par les propriétés de cette horloge particulière. Les appareils de mesure sont calibrés soit directement, soit indirectement par rapport à des étalons primaires de longueur, de temps et de masse reconnus par la communauté scientifique internationale.

Ces étalons primaires sont redéfinis, de temps à autre, au fur et à mesure que les mesures deviennent plus précises. Par exemple, l'unité de longueur, le mètre, a été définie en 1889 comme étant la longueur d'une barre particulière de platine iridié. Cette barre a été conservée dans des conditions bien précises. Cet étalon a cependant été abandonné en 1960 parce que sa préservation et sa copie n'étaient pas pratiques et pouvaient entraîner des inexactitudes. La longueur étalon est maintenant définie à partir de la longueur d'onde de la lumière rouge que les atomes de krypton 86 émettent lorsqu'ils sont placés dans une décharge électrique. Des étalons ont également été redéfinis pour les unités de temps et de masse.

Ce n'est pas par hasard que les étalons ont été choisis pour la longueur, le temps et la masse. Toutes les autres grandeurs mécaniques peuvent en effet s'exprimer sous forme d'une combinaison de ces trois dimensions fondamentales que nous représentons par les lettres L, T et M.

1. Une mesure quantitative se réfère à une quantité mesurable et comparable (taille, masse, temps, pression sanguine, ...) par opposition à une mesure qualitative qui se réfère à une qualité (couleur des yeux, secteur d'activité, pays, ...)

7.1 Systèmes d'unités

Peu après l'époque de la révolution française et de la mode des décoltés, les unités métriques ont été introduites dans nos contrées et sont toujours utilisées dans la vie quotidienne, sauf dans les pays anglo-saxons où les unités anglaises restèrent longtemps en usage. Les pays du Commonwealth ont finalement décidé il y a quelques années d'adopter le système métrique, même si pour certains, la reconversion est lente et douloureuse. Pour les travaux scientifiques, cependant, les unités métriques sont mondialement reconnues.

Dans la plupart des cours, vous n'utiliserez que les unités du système internationnal ($S.I.$), c'est-à-dire l'ensemble des unités métriques acceptées internationalement, comme le mètre, le kilogramme et la seconde, qui sont respectivement les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps.

On trouvera, dans des documents plus anciens, des références à une version antérieure de ce système d'unités qui était appelé le système d'unités $m.k.s.$ pour mètre, kilo, seconde. Les textes plus vieux encore utilisaient parfois les unités du système $c.g.s.$ pour centimètre, gramme, seconde.

Remarquons que les valeurs mesurées peuvent être beaucoup plus grandes ou petites que l'étalon. Pour cette raison, on utilise souvent des multiples ou des sous-multiples des unités du $S.I.$ qui sont des puissances de dix de ces unités. Par exemple, l'épaisseur d'une page fait approximativement $0,1$ millimètre, soit 100 microns (micromètres).

Les préfixes du système international d'unités simplifient la manipulation des mesures qui ont des rapports élevés d'unité (par exemple, de 0,1 cm à 1000 m). Ces préfixes renvoient à des multiples et des fractions de 10 ou de 1000.

10^N	Préfixe	Symbole	Multiplicateur	10^N	Préfixe	Symbole	Multiplicateur
10^{24}	yotta	Y	Quadrillion	10^0	unité	–	Un, une
10^{21}	zetta	Z	Trilliard	10^{-1}	déci	d	Dixième
10^{18}	exa	E	Trillion	10^{-2}	centi	c	Centième
10^{15}	péta	P	Billiard	10^{-3}	milli	m	Millième
10^{12}	téra	T	Billion	10^{-6}	micro	μ	Millionième
10^9	giga	G	Milliard	10^{-9}	nano	n	Milliardième
10^6	méga	M	Million	10^{-12}	pico	p	Billionième
10^3	kilo	k	Mille	10^{-15}	femto	f	Billiardième
10^2	hecto	h	Cent	10^{-18}	atto	a	Trillionième
10^1	déca	da	Dix	10^{-21}	zepto	z	Trilliardième
10^0	unité	–	Un, une	10^{-24}	yocto	y	Quadrillionième

7.2 Tableau des unités du système international

Un système d'unités est composé d'unités de base et d'unités dérivées. Les unités de base sont choisies arbitrairement. Les unités dérivées sont déduites des unités de base. En Belgique, les unités légales sont constituées, notamment, par les unités du $S.I.$ à l'exception du degré Celsius qui est une unité légale belge, bien que l'unité de température du $S.I.$ soit le degré Kelvin.

Il convient de ne pas confondre les unités légales avec les unités $S.I.$.

Le système international comprend sept unités de base indépendantes (ou unités fondamentales) à partir desquelles sont obtenues par analyse dimensionnelle toutes les autres unités, ou unités dérivées.

Ces unités sont supposées indépendantes dans la mesure où elles permettent de mesurer des grandeurs physiques indépendantes.

Les définitions des unités de base du système international utilisent des phénomènes physiques reproductibles. Seul le kilogramme est encore défini par rapport à un objet matériel susceptible de s'altérer. Actuellement, des recherches ont donc lieu pour remplacer cette définition par une autre, utilisant cette fois un phénomène physique. À l'issue de ces recherches, le kilogramme pourrait perdre son statut d'unité de base au profit d'une autre unité : c'est en effet seul le nombre d'unités fondamentales qui est imposé, puisqu'elles doivent permettre, par combinaison, de mesurer toute grandeur physique connue sans définition redondante, mais le choix précis des unités fondamentales comme les unités de masse, longueur, temps, courant électrique, température, intensité lumineuse et quantité de matière est purement arbitraire.

Grandeur	Symbole	Nom de l'unité	Symbole de l'unité
longueur	L	mètre	m
masse	M	kilogramme	kg
temps	T	seconde	s
courant électrique	I	ampère	A
température	Θ	kelvin	K
quantité de matière	N	mole	mol
intensité lumineuse	IV	candela	cd

Le nom des unités de base et dérivées est un nom commun même si l'unité dérive d'un nom propre. La première lettre du nom d'une unité est donc toujours une minuscule. On écrit ainsi ampère, seconde et degré Celsius (ce n'est ici pas la première lettre qui est une majuscule). Par ailleurs, pour former les noms des unités multiples et sous-multiples, les préfixes sont simplement accolés. Enfin, en cas de produit d'unités, on utilise un tiret ou un espace dans le nom de l'unité dérivée. Ainsi, les bonnes orthographes de l'unité dont le symbole est kWh sont kilowatt-heure et kilowatt heure. On ne peut pas accoler plusieurs préfixes à une unité (nanomètre mais pas millimicromètre).

Les symboles des unités commencent par une minuscule si l'unité ne dérive pas d'un nom propre.

En revanche, dans le cas contraire, le symbole d'une unité commence par une majuscule. Ainsi on peut comparer les symboles du pascal (Pa) et de la seconde (s). Le symbole du litre constitue une exception notable à cette règle puisqu'il est au choix l ou L, pour éviter les confusions avec le chiffre 1.

Les symboles des unités sont toujours des caractères romains quelle que soit la police du texte où ils figurent. Ils constituent des entités mathématiques et non des abréviations, ainsi on écrit 30 cm et pas $30cm.$ ou $30cms$. Les abréviations des symboles et noms d'unités (telles sec pour la seconde (s) ou cc pour le centimètre cube (cm^3)) sont prohibées.

Il ne faut pas mélanger les symboles (entités mathématiques) et les noms des unités, ainsi on écrira toujours *newton par kilogramme* ou N/kg et jamais *newton par* kg.

Enfin les notations de la division et de la multiplication s'appliquent aux symboles des unités dérivées : ainsi on peut écrire le symbole du mètre par seconde $m.s^{-1}$, m/s ou $\frac{m}{s}$ et celui du kilowatt-heure $kW.h$ ou kWh.

À noter également que pour éviter les notations ambiguës, on n'utilise jamais plus d'une barre oblique dans le symbole d'une unité : A/m/s pourrait être le symbole de l'ampère par mètre et par seconde ($A.m^{-1}.s^{-1}$ ou $\frac{A}{m.s}$) ou celui de l'ampère seconde par mètre ($A.m^{-1}.s$ ou $A.\frac{s}{m}$).

7.2.1 Une pincée de culture générale : définition des unités de base

Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde. Historiquement, la première définition officielle et pratique du mètre (1791) était basée sur la circonférence de la terre, et valait 1/40 000 000 d'un méridien. Auparavant, le mètre en tant que proposition d'unité décimale de mesure universelle était défini comme la longueur d'un pendule qui oscille avec une demi-période d'une seconde.

Le kilogramme (au départ nommé le grave) est égal à la masse du prototype international du kilogramme. Ce dernier, composé d'un alliage de platine et d'iridium (90%-10%), est conservé au Bureau international des poids et mesures à Sèvres, en France. Historiquement, la définition du kilogramme était la masse d'un décimètre cube (soit d'un litre) d'eau.

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 à la température de 0 kelvin. La seconde était à l'origine basée sur la durée du jour terrestre, divisé en 24 heures de 60 minutes, chacune d'entre eles durant 60 secondes (soit 86 400 secondes pour une journée).

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide produirait entre ces conducteurs une force égale à 2.10^{-7} newton par mètre de longueur.

Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. Ce nombre d'entités élémentaires est appelé nombre d'Avogadro. Lorsque l'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.

La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540.10^{12} hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de $1/683$ watt par stéradian.

Certaines unités fondamentales utilisent d'autres unités fondamentales dans leur définition, parfois via des unités dérivées (la définition de la seconde utilise par exemple celle du kelvin). Les unités fondamentales ne sont donc pas stricto sensu indépendantes les unes des autres, mais ce sont les grandeurs physiques qu'elles permettent de mesurer qui le sont.

7.3 Equations aux dimensions : analyse dimensionnelle

Toutes les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées, qui peuvent être exprimées en fonction des grandeurs de base à l'aide des équations de la physique.

Les dimensions des grandeurs dérivées sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions des grandeurs de base au moyen des équations qui relient les grandeurs dérivées aux grandeurs de base. En général la dimension d'une grandeur Q s'écrit sous la forme d'un produit dimensionnel,

$$[Q] = L^a M^b T^c I^d \Theta^e N^f IV^g$$

où les exposants a, b, c, d, e, f et g qui sont en général de petits nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls, sont appelés exposants dimensionnels.

Les équations aux dimensions sont donc des équations symboliques permettant de relier, grâce aux lois physiques, les unités dérivées aux unités de base. Par exemple, soit l'équation fondamentale de la mécanique :

$$F = m \cdot a$$

On écrit symboliquement : les dimensions de la force F sont $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$. Donc, en ce qui concerne l'unité, on aura, dans le cas d'une force

$$1 \text{ unité de force} = 1 \quad kg\frac{m}{s^2}$$

Bien entendu, l'unité de force est le Newton (unité dérivée).

Considérons à présent la relation $E = mc^2$ et intéressons nous aux unités de c. Dès lors, sachant que E représente l'énergie, pour déduire les unités $S.I.$ de c, il convient de connaître celles de E. Or, par exemple dans le cadre de la chute d'un corps, l'énergie potentielle est donnée par $E = mgh$. Il s'agit d'une énergie, tout comme dans la relation $E = mc^2$. Par conséquent, $[E] = M.\frac{L}{T^2}.L = M.\frac{L^2}{T^2}$ et en définitive, il vient l'équation

$$\begin{aligned} [E] = [m][c]^2 \quad &\Leftrightarrow \quad M.\tfrac{L^2}{T^2} = M.[c]^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{L^2}{T^2} = [c]^2 \\ &\Leftrightarrow \quad [c]^2 = (\tfrac{L}{T})^2 \\ &\Leftrightarrow \quad [c] = \tfrac{L}{T} \end{aligned}$$

Nous constatons que c a bien les dimensions d'une vitesse.

7.4 Conversion d'unités

7.4.1 Longueur

L'unité principale de longueur du $S.I.$ est le mètre.

Utilisation d'abaques

Vis-à-vis d'un changement d'unités, chaque unité vaut 10 fois celle qui la suit :

10^5	10^4	10^3	10^2	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$	$10^{-1} = 0,1$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
		km	hm	dam	m	dm	cm	mm			μm

Pour changer d'unité, il suffit de placer la virgule à la droite du chiffre qui représente l'unité choisie.

Exemple :

10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	
		km	hm	dam	m	dm	cm	mm			μm	
			4	3	6,	7	5					mètres
			4	3,	6	7	5					décamètres
		0,	4	3	6	7	5					kilomètres
			4	3	6	7	5					centimètres
			4	3	6	7	5	0				millimètres

Utilisation de la notation scientifique

La notation scientifique consiste à représenter une valeur à l'aide uniquement des unités, des décimales (unités et décimales consituant la mantisse) et d'une puissance de 10. Il n'y a qu'un seul chiffre (non nul) à gauche de la virgule, puis un nombre variable de décimales (nombres après la virgule), qui dépend de la précision.

Exemples :

$$\begin{aligned}
123400000 &= 1,234.10^8 \\
0,000123 &= 1,23.10^{-4} \\
451 &= 4,51.10^2 \\
92384 &= 9,2384.10^4 \\
-92384 &= -9,2384.10^4
\end{aligned}$$

Cas particuliers			
0	$=$	0	pas de notation pour 0
$0,007$	$=$	7.10^{-3}	pas de virgule
$2,54$	$=$	$2,54.10^0$	nombre seul = notation décimale

La notation scientifique permet de connaitre immédiatement l'ordre de grandeur du nombre puisqu'il s'agit de la valeur de l'exposant. Elle permet également de simplifier la multiplication et la division, en procédant aux produits des mantisses d'une part, et à la somme des exposants d'autre part.

Cette notation est très utile pour les quantités physiques dont les valeurs sont souvent encadrées avec une marge d'erreur. On se restreint souvent aux chiffres significatifs, par exemple la notation $1,2340.10^6$

signifie que la valeur est comprise entre 1233950 et 1234050.

Pour changer d'unités, on incrémente ou on décrémente de 1 la puissance de 10.

10^3		10^2		10^1		10^0		10^{-1}		10^{-2}		10^{-3}
km	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	hm	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	dam	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	m	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	dm	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	cm	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	mm

Exemples :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	
$4,25.10^{-3}km$	$4,25.10^{-2}hm$	$4,25.10^{-1}dam$	$4,25m$	$4,25.10^{1}dm$	$4,25.10^{2}cm$	$4,25.10^{3}mm$
$2.10^{-5}km$	$2.10^{-4}hm$	$2.10^{-3}dam$	$2.10^{-2}m$	$2.10^{-1}dm$	$2cm$	$2.10^{1}mm$
$7,8km$	$7,8.10^{1}hm$	$7,8.10^{2}dam$	$7,8.10^{3}m$	$7,8.10^{4}dm$	$7,8.10^{5}cm$	$7,8.10^{6}mm$

Utilisation de la cervelle

Lors d'une conversion d'unités, il suffit de réfléchir de la manière illustrée par les exemples suivants :

- Convertir $4,25$ km en m : dans 1 kilomètre, combien on peut mettre de mètres ? On peut mettre 1000 mètres dans 1 kilomètre. Résultat, $4,25.1km = 4,25.1000m = 4250m$.

- Convertir $0,43$ dam en cm : dans 1 décamètre, combien on peut mettre de centimètres ? On peut mettre 10 mètres dans 1 décamètre et 100 centimètres dans 1 mètre. Résultat, $0,43.1dam = 0,43.10m = 0,43.10.100cm = 430cm$.

- Convertir $42,5$ m en km : dans 1 mètre, combien on peut mettre de kilomètres ? On peut mettre $\frac{1}{1000}$è de kilomètre dans 1 mètre. Résultat, $42,5.1m = 42,5.\frac{1}{1000}km = 0,0425km$.

- Convertir 425 cm en dam : dans 1 centimètre, combien on peut mettre de décamètres ? On peut mettre $\frac{1}{100}$è de mètre dans 1 centimètre et $\frac{1}{10}$è de décamètre dans 1 mètre. Résultat, $425.1cm = 425.\frac{1}{100}m = 425.\frac{1}{100}.\frac{1}{10}dam = 0,425dam$.

Remarque : échelle

On dit qu'une longueur est reproduite à l'échelle de 1 pour X lorsqu'elle est représentée par une ligne X fois plus petite.

Par exemple, à l'échelle de 1 pour 100, une longueur sera représentée par une ligne 100 fois plus petite.

Autre exemple : à l'échelle de 1 pour 1000000, 1 mm sur le papier correspond à une longueur réelle de 1000000 mm = 1 km. Par conséquent, à cette échelle, une longueur de 24,7 cm = 247 mm correspond à une longueur réelle de 247 km.

7.4.2 Surfaces

Dans le cadre de ces notes, une surface est un domaine du plan, délimité par un contour plus ou moins régulier comme un polygone, un cercle ou d'autres courbes.

L'unité principale de surface est le mètre carré (m^2), c'est-à-dire l'aire d'un carré ayant un mètre de côté.

Les multiples du m^2 sont

le décamètre carré (dam^2) $= 100m^2$
l'hectomètre carré (hm^2) $= 10.000m^2$
le kilomètre carré (km^2) $= 1.000.000m^2$

Les sous-multiples du m^2 sont

le décimètre carré (dm^2) $= 0,01m^2$
le centimètre carré (cm^2) $= 0,0001m^2$
le millimètre carré (mm^2) $= 0,000001m^2$

On remarque que les différentes unités de surface sont de 100 en 100 fois plus grandes. Dès lors, les préfixes déca, hecto, centi, ... n'ont pas ici leur véritable sens. Il ne faut donc pas confondre le dm^2 avec le dixième du m^2. En effet, voici comment il faut comprendre ces unités : $1dm^2 = (1dm)^2 = (\frac{1}{10}m)^2 = \frac{1}{100}m^2$.

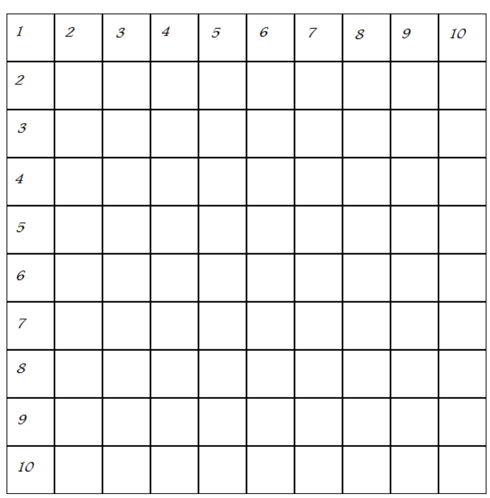


FIGURE 7.1 – Partageons le m^2 en bandes de $1dm$ de largeur. Il y a 10 bandes pour les 10 dm de largeur du carré, soit 100 dm^2.

Utilisation d'abaques

Vis-à-vis d'un changement d'unités, chaque unité vaut 100 fois celle qui la suit :

	10^6		10^4		10^2		10^0		10^{-2}		10^{-4}		10^{-6}
D	U	D	U	D	U	D	U	D	U	D	U	D	U
km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	

Pour changer d'unité, il suffit de placer la virgule à la droite de la tranche de deux chiffres qui représente l'unité choisie.

Exemple :

	10^6		10^4		10^2		10^0		10^{-2}		10^{-4}		10^{-6}	
D	U	D	U	D	U	D	U	D	U	D	U	D	U	
		1	2	0	0	3	5,	6	4	0	8			m^2
		1	2	0	0,	3	5	6	4	0	8			dam^2
	0,	1	2	0	0	3	5	6	4	0	8			km^2
		1	2	0	0	3	5	6	4	0	8			cm^2
		1	2	0	0	3	5,	6	4	0	8	0	0	mm^2

Utilisation de la notation scientifique

Pour changer d'unités, on incrémente ou on décrémente de 2 la puissance de 10.

10^6		10^4		10^2		10^0		10^{-2}		10^{-4}
km^2	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	hm^2	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	dam^2	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	m^2	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	dm^2	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	cm^2

Exemples :

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2
$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$	$_{-2}\rightleftharpoons^{+2}$
$4,25.10^{-6}km^2$	$4,25.10^{-4}hm^2$	$4,25.10^{-2}dam^2$	**4,25** m^2	$4,25.10^{2}dm^2$	$4,25.10^{4}cm^2$
$2.10^{-11}km^2$	$2.10^{-9}hm^2$	$2.10^{-7}dam^2$	$2.10^{-5}m^2$	$2.10^{-3}dm^2$	**0,2** cm^2
78 km^2	$7,8.10^{3}hm^2$	$7,8.10^{5}dam^2$	$7,8.10^{7}m^2$	$7,8.10^{9}dm^2$	$7,8.10^{11}cm^2$

Utilisation de la cervelle

Lors d'une conversion d'unités, il suffit de réfléchir de la manière illustrée par les exemples suivants :

- Convertir $4,25$ km^2 en m^2 : dans 1 kilomètre, combien on peut mettre de mètres ? On peut mettre 1000 mètres dans 1 kilomètre. En élevant au carré, on peut mettre $1000^2 m^2 = 1.000.000 m^2 = 10^6 m^2$ dans 1 km^2. Résultat, $42,5.1km^2 = 42,5.10^6 m^2 = 4,25.10^7 m^2$.

- Convertir $0,43$ dam^2 en cm^2 : dans 1 décamètre, combien on peut mettre de centimètres ? On peut mettre 10 mètres dans 1 décamètre et 100 centimètres dans 1 mètre. En élevant au carré, on peut mettre $10^2 m^2$ dans 1 dam^2 et $100^2 cm^2 = 10^4 cm^2$ dans 1 m^2. Résultat, $0,43.1dam^2 = 0,43.10^2 m^2 =$

$0,43.10^2.10^4 cm^2 = 0,43.10^6 cm^2 = 4,3.10^5 cm^2$.

- Convertir $42,5\ m^2$ en km^2 : dans 1 mètre, combien on peut mettre de kilomètres ? On peut mettre $\frac{1}{1000}$è de kilomètre dans 1 mètre. En élevant au carré, on peut mettre $(\frac{1}{1000})^2 km^2 = \frac{1}{1.000.000} km^2 = 10^{-6} km^2$ dans 1 m^2. Résultat, $42,5.1 m^2 = 42,5.10^{-6} km^2 = 4,25.10^{-5} km^2$.

- Convertir $425\ cm^2$ en dam^2 : dans 1 centimètre, combien on peut mettre de décamètres ? On peut mettre $\frac{1}{100}$è de mètre dans 1 centimètre et $\frac{1}{10}$è de décamètre dans 1 mètre. En élevant au carré, on peut mettre $(\frac{1}{100})^2 m^2 = 10^{-4} m^2$ dans 1 cm^2 et $(\frac{1}{10})^2 dam^2 = 10^{-2} dam^2$ dans 1 m^2. Résultat, $425 cm^2 = 425.10^{-4} m^2 = 425.10^{-4}.10^{-2} dam^2 = 425.10^{-6} dam^2 = 4,26.10^{-4} dam^2$.

Remarque : mesures agraires

Les mesures destinées à évaluer l'aire des terrains prennent un nom particulier.

L'unité principale est l'are (a) qui équivaut au dam^2, C'est-à-dire un carré de 10 m de côté.

Un hectare (ha) vaut 100 ares, ce qui équivaut à 1 hm^2.
Un centiare (ca) vaut $\frac{1}{100}$è d'are, ce qui équivaut à 1 m^2.

	10^4		10^2		10^0
D	U	D	U	D	U
hm^2		dam^2		m^2	
	ha		a		ca

Par exemple, 15 ha 7 a 24 ca s'écrira donc 1507,24 a ou 15,0724 ha ou 150724 ca.

7.4.3 Volumes

Dans le cadre de ces notes, un volume est un domaine de l'espace, délimité par un contour plus ou moins régulier comme un polyèdre, une sphère ou d'autres surfaces.

L'unité principale de volume est le mètre cube (m^3), c'est-à-dire le volume d'un cube ayant un mètre de côté.

Les multiples du m^3 sont

le décamètre cube (dam^3) $= 1000m^3$
l'hectomètre cube (hm^3) $= 1.000.000m^3$
le kilomètre cube (km^3) $= 1.000.000.000m^3$

Les sous-multiples du m^3 sont

le décimètre cube (dm^3) $= 0,001m^3$
le centimètre cube (cm^3) $= 0,000001m^3$
le millimètre cube (mm^3) $= 0,000000001m^3$

On remarque que les différentes unités de volume sont de 1000 en 1000 fois plus grandes. Dès lors, les préfixes déca, hecto, centi, ... n'ont pas ici leur véritable sens. Il ne faut donc pas confondre le dm^3 avec le dixième du m^3. En effet, voici comment il faut comprendre ces unités : $1dm^3 = (1dm)^3 = (\frac{1}{10}m)^3 = \frac{1}{1000}m^3$.

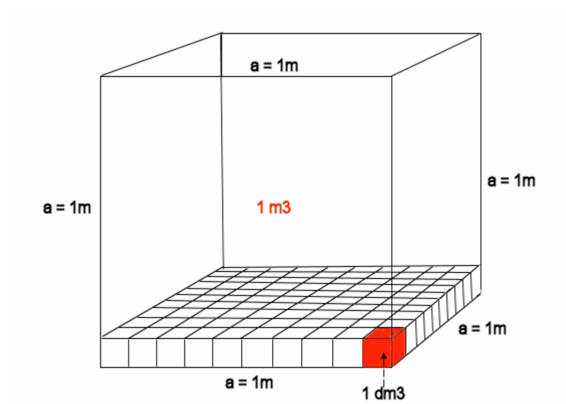


FIGURE 7.2 – Comme nous pouvons l'observer nous pouvons placer 10 dm^3 (cube dont l'arête est 1 dm) sur une arête de 1 m ($1m = 10dm$) , soit 10.10 sur une couche. Comme nous pouvons placer 10 couches verticalement pour remplir notre cube, 1 m^3 = 10.10.10 dm^3 = 1000 dm^3.

Utilisation d'abaques

Vis-à-vis d'un changement d'unités, chaque unité vaut 1000 fois celle qui la suit :

		10^9			10^6			10^3			10^0			10^{-3}			10^{-6}			10^{-9}
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		

Pour changer d'unité, il suffit de placer la virgule à la droite de la tranche de trois chiffres qui représente l'unité choisie.

Exemple :

		10^6			10^3			10^0			10^{-3}			10^{-6}			10^{-9}	
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	
				1	2	3	4	5,	0	6	7	0	0	0	8			m^3
				1	2,	3	4	5	0	6	7	0	0	0	8			dam^3
		0,	0	1	2	3	4	5	0	6	7	0	0	0	8			hm^3
				1	2	3	4	5	0	6	7	0	0	0,	8			cm^3
				1	2	3	4	5	0	6	7	0	0	0	8	0	0	mm^3

Utilisation de la notation scientifique

Pour changer d'unités, on incrémente ou on décrémente de 3 la puissance de 10.

10^9		10^6		10^3		10^0		10^{-3}		10^{-6}
km^3	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	hm^3	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	dam^3	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	m^3	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	dm^3	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	cm^3

Exemples :

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3
$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$	$_{-3}\rightleftharpoons^{+3}$
$4,25.10^{-9}km^3$	$4,25.10^{-6}hm^3$	$4,25.10^{-3}dam^3$	**4,25** m^3	$4,25.10^3dm^3$	$4,25.10^6cm^3$
$2,28.10^{-13}km^3$	$2,28.10^{-10}hm^3$	$2,28.10^{-7}dam^3$	$2,28.10^{-4}m^3$	$2,28.10^{-1}dm^3$	**228** cm^3
0,02 km^3	2.10^1hm^3	2.10^4dam^3	2.10^7m^3	$2.10^{10}dm^3$	$2.10^{13}cm^3$

Utilisation de la cervelle

Lors d'une conversion d'unités, il suffit de réfléchir de la manière illustrée par les exemples suivants :

- Convertir $4,25\ km^3$ en m^3 : dans 1 kilomètre, combien on peut mettre de mètres ? On peut mettre 1000 mètres dans 1 kilomètre. En élevant au cube, on peut mettre $1000^3m^3 = 1.000.000.000m^3 = 10^9m^3$ dans 1 km^3. Résultat, $42,5.1km^3 = 42,5.10^9m^3 = 4,25.10^10m^2$.

- Convertir $0,43\ dam^3$ en cm^3 : dans 1 décamètre, combien on peut mettre de centimètres ? On peut mettre 10 mètres dans 1 décamètre et 100 centimètres dans 1 mètre. En élevant au cube, on peut mettre 10^3m^3 dans 1 dam^3 et $100^3cm^3 = 10^6cm^3$ dans 1 m^3. Résultat, $0,43.1dam^3 = 0,43.10^3m^3 =$

$0,43.10^3.10^6 cm^3 = 0,43.10^9 cm^3 = 4,3.10^8 cm^3$.

- Convertir $42,5\ m^3$ en km^3 : dans 1 mètre, combien on peut mettre de kilomètres ? On peut mettre $\frac{1}{1000}$è de kilomètre dans 1 mètre. En élevant au cube, on peut mettre $(\frac{1}{1000})^3 km^3 = \frac{1}{1.000.000.000} km^3 = 10^{-9} km^3$ dans 1 m^3. Résultat, $42,5.1m^3 = 42,5.10^{-9} km^3 = 4,25.10^{-8} km^2$.

- Convertir 425 cm^3 en dam^3 : dans 1 centimètre, combien on peut mettre de décamètres ? On peut mettre $\frac{1}{100}$è de mètre dans 1 centimètre et $\frac{1}{10}$è de décamètre dans 1 mètre. En élevant au cube, on peut mettre $(\frac{1}{100})^3 m^3 = 10^{-6} m^3$ dans 1 cm^3 et $(\frac{1}{10})^3 dam^3 = 10^{-3} dam^3$ dans 1 m^3. Résultat, $425cm^3 = 425.10^{-6} m^3 = 425.10^{-6}.10^{-3} dam^3 = 425.10^{-9} dam^3 = 4,26.10^{-7} dam^3$.

Remarque : le stère (mesures de bois de chauffage)

Les mesures destinées à évaluer le volume du bois de chauffage prennent un nom particulier.

L'unité principale est le stère (st) qui équivaut au m^3, C'est-à-dire un cube de 1 m de côté.

Un décastère ($dast$) vaut 10 stères, ce qui équivaut à 10 m^3.
Un décistère (dst) vaut $\frac{1}{10}$è de stère, ce qui équivaut à 0,1 m^3.

		10^3			10^0			10^{-3}
C	D	U	C	D	U	C	D	U
dam^3			m^3			dm^3		
				$dast$	st	dst		

Par exemple, 25,5 m^3 = 2 $dast$ 4 st 5 dst.

7.4.4 Capacités

On entend par capacité ou contenance le volume des liquides (eau, vin, ...) ou de certaines matières sèches (grain, charbon, ...).

La capacité d'un objet est son volume intérieur.

L'unité principale de la capacité est le litre (l ou L), c'est-à-dire le volume de 1 dm^3.

Utilisation d'abaques

Vis-à-vis d'un changement d'unités, chaque unité vaut 10 fois celle qui la suit (comme pour les longueurs) :

10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	$10^0 = 1$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
		kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

Pour changer d'unité, il suffit de placer la virgule à la droite du chiffre qui représente l'unité choisie.

Exemple :

10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	$10^0 = 1$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	
		kl	hl	dal	l	dl	cl	ml	
			4	3	6,	7	5		litres
			4	3,	6	7	5		décalitres
		0,	4	3	6	7	5		kilolitres
			4	3	6	7	5		centilitres
			4	3	6	7	5	0	millilitres

Utilisation de la notation scientifique

Pour changer d'unités, on incrémente ou on décrémente de 1 la puissance de 10.

10^3		10^2		10^1		10^0		10^{-1}		10^{-2}		10^{-3}
kl	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	hl	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	dal	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	l	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	dl	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	cl	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	ml

Exemples :

kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	${}_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	
$4,25.10^{-3}kl$	$4,25.10^{-2}hl$	$4,25.10^{-1}dal$	$4,25l$	$4,25.10^{1}dl$	$4,25.10^{2}cl$	$4,25.10^{3}ml$
$2.10^{-5}kl$	$2.10^{-4}hl$	$2.10^{-3}dal$	$2.10^{-2}l$	$2.10^{-1}dl$	$2cl$	$2.10^{1}ml$
$7,8kl$	$7,8.10^{1}hl$	$7,8.10^{2}dal$	$7,8.10^{3}l$	$7,8.10^{4}dl$	$7,8.10^{5}cl$	$7,8.10^{6}ml$

Utilisation de la cervelle

Lors d'une conversion d'unités, il suffit de réfléchir de la manière illustrée par les exemples suivants :

- Convertir $4,25$ kl en l : dans 1 kilolitre, combien on peut mettre de litres ? On peut mettre 1000 litres dans 1 kilolitre. Résultat, $4,25.1kl = 4,25.1000l = 4250l$.

- Convertir $0,43$ dal en cl : dans 1 décalitre, combien on peut mettre de centilitres ? On peut mettre 10 litres dans 1 décalitre et 100 centilitres dans 1 litre. Résultat, $0,43.1dal = 0,43.10l = 0,43.10.100cl = 430cl$.

- Convertir $42,5$ l en kl : dans 1 litre, combien on peut mettre de kilolitres ? On peut mettre $\frac{1}{1000}$è de litre dans 1 kilolitre. Résultat, $42,5.1l = 42,5.\frac{1}{1000}kl = 0,0425kl$.

- Convertir 425 cl en dal : dans 1 centilitre, combien on peut mettre de décalitres ? On peut mettre $\frac{1}{100}$è de litre dans 1 centilitre et $\frac{1}{10}$è de décalitre dans 1 litre. Résultat, $425.1cl = 425.\frac{1}{100}l = 425.\frac{1}{100}.\frac{1}{10}dal = 0,425dal$.

7.4.5 Masses

On entend par poids d'un corps la force avec laquelle ce corps est attiré vers le centre de la terre. La masse d'un corps est le coefficient de proportionnalité reliant cette force à l'accélération gravitationnelle ($g \approx 9,81 m/s^2$).

L'unité principale de la masse est le kilogramme (kg). Ce poids correspond à peu près au poids d'1 dm^3 d'eau pure à une température d'environ 10^oC.

La tonne apparaît au tableau actuel du système international d'unités : ce n'est pas une unité du $S.I.$, mais son usage y est associé en raison de son rôle pratique important.

Remarquons qu'un mètre cube d'eau pèse une tonne.

Le quintal équivaut à 100 kilogrammes, ou encore 0,1 tonne. Il ne fait pas partie du système international d'unités. Il est cependant encore utilisé, notamment pour les mesures de rendements agricoles.

Utilisation d'abaques

Vis-à-vis d'un changement d'unités, chaque unité vaut 10 fois celle qui la suit (comme pour les longueurs) :

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	$10^0 = 1$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
t	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

Pour changer d'unité, il suffit de placer la virgule à la droite du chiffre qui représente l'unité choisie.

Exemple :

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	$10^0 = 1$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	
t	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg	
				4	3	6,	7	5		grammes
				4	3,	6	7	5		décagrammes
			0,	4	3	6	7	5		kilogrammes
				4	3	6	7	5		centigrammes
				4	3	6	7	5	0	milligrammes
0,	0	0	0	4	3	6	7	5	0	tonnes
	0,	0	0	4	3	6	7	5	0	quintaux

Utilisation de la notation scientifique

Pour changer d'unités, on incrémente ou on décrémente de 1 la puissance de 10.

10^3		10^2		10^1		10^0		10^{-1}		10^{-2}		10^{-3}
kg	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	hg	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	dag	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	g	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	dg	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	cg	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	mg

Exemples :

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	$_{-1}\rightleftharpoons^{+1}$	
$4,25.10^{-3}kg$	$4,25.10^{-2}hg$	$4,25.10^{-1}dag$	$4,25g$	$4,25.10^{1}dg$	$4,25.10^{2}cg$	$4,25.10^{3}mg$
$2.10^{-5}kg$	$2.10^{-4}hg$	$2.10^{-3}dag$	$2.10^{-2}g$	$2.10^{-1}dg$	$2cg$	$2.10^{1}mg$
$7,8kg$	$7,8.10^{1}hg$	$7,8.10^{2}dag$	$7,8.10^{3}g$	$7,8.10^{4}dg$	$7,8.10^{5}cg$	$7,8.10^{6}mg$

Utilisation de la cervelle

Lors d'une conversion d'unités, il suffit de réfléchir de la manière illustrée par les exemples suivants :

- Convertir $4,25$ kg en g : dans 1 kilogramme, combien on peut mettre de grammes ? On peut mettre 1000 grammes dans 1 kilogramme. Résultat, $4,25.1kg = 4,25.1000g = 4250g$.

- Convertir $0,43$ dag en cg : dans 1 décagramme, combien on peut mettre de centigrammes ? On peut mettre 10 grammes dans 1 décagramme et 100 centigrammes dans 1 gramme. Résultat, $0,43.1dag = 0,43.10g = 0,43.10.100cg = 430cg$.

- Convertir $42,5$ g en kg : dans 1 gramme, combien on peut mettre de kilogrammes ? On peut mettre $\frac{1}{1000}$è de gramme dans 1 kilogramme. Résultat, $42,5.1g = 42,5.\frac{1}{1000}kg = 0,0425kg$.

- Convertir 425 cl en dag : dans 1 centigramme, combien on peut mettre de décagrammes ? On peut mettre $\frac{1}{100}$è de gramme dans 1 centigramme et $\frac{1}{10}$è de décagramme dans 1 gramme. Résultat, $425.1cg = 425.\frac{1}{100}g = 425.\frac{1}{100}.\frac{1}{10}dag = 0,425dag$.

Remarque : le carat

En joaillerie, on se sert du *carat* qui équivaut à 0,2 g. Le *carat* se divise en 4 *grains* qui équivalent chacun à 0,05 g.

Un diamant taillé en « brillant » d'un *carat* a un diamètre d'environ 6,5 mm. La dimension varie en fonction du type gemme, chacune ayant sa propre densité.

Il convient de ne pas confondre le carat des joaillers avec celui des bijoutiers : en bijouterie le carat (ct) est une mesure de pureté. Dans ce contexte, un carat représente 1/24è de la masse totale d'un alliage. Par exemple, de l'or à 15 ct signifie que dans 24 g d'alliage, on trouve 15 g d'or pur. De l'or 24 carats est par conséquent de l'or pur.

7.4.6 Tableau comparatif des unités de volume, de capacité et de masse

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
	$dast$	st	dst								
		kl	hl	dal	l	dl	cl	ml			
		t	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

Grâce à ce tableau, nous pouvons par exemple voir directement qu'1 l d'eau équivaut à 1 kg et à 1 dm^3. De même, nous pouvons constater qu'1 m^3 d'eau pèse 1 t. Etc.

7.5 Densité et masse volumique

7.5.1 Masse volumique

Pour toute substance homogène, le rapport de la masse m correspondant à un volume V de cette substance est indépendante de la quantité choisie : c'est une caractéristique du matériau appelée masse volumique ρ (« rho »). On a

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Mais le volume d'une masse donnée dépend de la température et, particulièrement pour les gaz, de la pression. La masse volumique dépend donc des conditions de température et de pression.

Pour des conditions de température et de pression données, le coefficient de proportionnalité $\frac{m}{V}$ est une caractéristique du matériau.

L'unité de mesure de la masse volumique est dérivée des unités de mesure de masse et de volume. On peut ainsi exprimer la masse volumique en g/cm^3, kg/dm^3, t/m^3.

Remarques :
- Dans ces unités, la valeur numérique ne change pas car 1 $g/cm^3 = 1\ kg/dm^3 = 1\ t/m^3$.
- La masse volumique de l'eau est proche de 1 kg/dm^3. Ce n'est pas un hasard, mais cela résulte des premières tentatives de définition du kilogramme comme valant la masse d'un litre d'eau (1 décimètre cube). (Sa valeur actuelle est, à 4 ^oC, de 999,95 kg/m^3).

Remarquons (voir tableau 7.3) que la masse volumique de l'eau vaut environ 10^3 kg/m^3 et que la masse volumique de l'air (dans des conditions normales de température et de pression) vaut environ 1 kg/m^3 ($1,2$ g/m^3 à 20^oC et $p_{atmosphrique}$). En effet, l'air est à peu près 1000 fois moins dense que l'eau.

Roches, minéraux corps usuels	masse volumique kg/m³
ardoise	2700 - 2800
amiante	2500
argile	1700
béton	2000
calcaire	2600 - 2700
craie	1250
granite	2600 - 2700
Grès	2600
kaolin	2260
marbre	2650 - 2750
quartz	2650
pierre ponce	910
porcelaine	2500
terre végétale	1250
verre à vitres	2530

Bois	masse vol kg/m³
acajou	700
buis	910 - 1320
cèdre	490
chêne	610 - 980
chêne (cœur)	1170
ébène	1150
frêne	840
hêtre	800
liège	240
peuplier	390
pin	740
platane	650
sapin	450
teck	860

Gaz à 0°C	masse vol kg/m³	formule
acétylène	1,170	-
air	1	-
air à 20°C	1,204	-
ammoniac	0,77	-
argon	1,7832	Ar
azote	1,250 51	N_2
butane (iso-)	2,670	-
butane (normal)	2,700	-
dioxyde de carbone	1,976 9	CO_2
eau (vapeur) à 100°C	0,5977	H_2O
hélium	0,178 5	He
dihydrogène	0,0899	H_2
krypton	3,74	-
néon	0,90	-
oxyde de carbone	1,250	CO
ozone	2,14	O_3
propane	2,01	-
radon	9,73	Rn

Métaux et alliages	masse volumique kg/m³
acier	7850
acier rapide HSS	8400 - 9000
Fonte	6800 - 7400
aluminium	2700
argent	10500
bronze	8400 - 9200
carbone (diamant)	3508
carbone (graphite)	2250
constantan	8910
cuivre	8920
Duralumin	2900
fer	7860
iridium	22640
laiton	7300 - 8400
lithium	530
magnésium	1750
mercure	13600
molybdène	10200
nickel	8900
or	19300
osmium	22610
palladium	12000
platine	21450
plomb	11350
potassium	850
tantale	16600
titane	4500
tungstène	19300
uranium	18700
vanadium	6100
zinc	7150

Liquides	masse vol kg/m³
acétone	790
acide acétique	1049
azote à -195°C	810
brome à 0°C	3087
eau	1000
eau de mer	1030
essence	750
éthanol	789
éther	710
gasoil	850
glycérine	1260
hélium à -269°C	150
huile d'olive	920
hydrogène à -252°C	70
lait	1030
mercure	13545,88
oxygène à -184°C	1140

Matières plastiques	masse vol kg/m³
Polypropyléne	850 - 920
Polypropyléne basse densité	890 - 930
Polypropyléne haute densité	940 - 980
ABS	1040 - 1060
Polystyrène	1040 - 1060
Nylon 6,6	1120 - 1160
Polyacrylate de méthyle	1160 - 1200
PVC + plastifiant	1190 - 1350
Polyéthylène/téréphtalate	1380 - 1410
PVC	1380 - 1410
Bakélite	1350 - 1400

FIGURE 7.3 – Tables des masses volumiques de diverses substances. Sauf indications contraires, les masses volumiques sont données pour des corps à la température de 20 ^oC, sous la pression atmosphérique normale.

7.5.2 Densité

La densité est un nombre sans dimension, égal au rapport d'une masse volumique d'une substance homogène à la masse volumique d'eau pure à la température de 3,98 ^oC. Pour les gaz, la densité est calculée en rapport avec la masse volumique de l'air.

Par définition, la densité de l'eau pure à 3,98 ^oC est égale à 1.

La valeur de la densité permet de déterminer la flottabilité d'un matériau dans de l'eau pure. Si cette valeur est inférieure à 1 (celle de l'eau), un bloc de matériau flottera (puisqu'à volume égal, il subira immergé dans l'eau une poussée supérieure à son propre poids).

La définition de la densité permet sa mesure en laboratoire. Elle peut aussi se calculer en divisant la masse volumique de la substance par 1 000 kg/m^3, masse volumique de l'eau pure à 3,98 ^oC..

Pourquoi choisir l'eau à 3,98 ^oC ? Il se trouve que lorsque la température de l'eau baisse, son volume diminue, jusqu'à 3,98 ^oC, et augmente si l'on continue de refroidir jusqu'à la congélation. Dans le domaine des mesures, le fait de prendre comme référence une propriété physique qui passe par un extrémum est très intéressant : au voisinage de 3,98 ^oC, la masse volumique de l'eau reste sensiblement constante, on n'a donc pas besoin de déterminer la température avec une grande précision, ce qui ne serait pas le cas aux autres températures. La masse volumique et la densité de l'eau sont maximales à 3,98 ^oC à la pression atmosphérique normale.

Cette particularité permet à l'eau tiède, à l'eau très froide et à la glace de flotter au-dessus de l'eau à 3,98 ^oC. Si l'eau se comportait comme la plupart des autres corps, la glace tomberait au fond des lacs, des rivières et des océans, où la vie serait alors pratiquement impossible, du moins sous la forme que nous connaissons.

Parmi les métaux moins denses à l'état solide qu'à l'état liquide, il existe l'argent et le bismuth. Cela pose des problèmes importants lors du moulage, à cause du gonflement qui accompagne la solidification.

Chapitre 8

Arrondis : chiffres significatifs

Dans une mesure physique, le nombre de chiffres significatifs détermine la précision de la mesure. En écriture décimale, c'est le nombre total de chiffres, sans compter les éventuels zéros qui se trouvent « à gauche », c'est-à-dire à gauche du premier chiffre non nul. On peut dire aussi que :
- les chiffres autres que zéro sont toujours significatifs.
- Les zéros sont significatifs lorsqu'ils se trouvent à droite du premier chiffre autre que zéro. Ils ne sont pas significatifs lorsqu'ils se trouvent à la gauche du premier chiffre autre que zéro.

Remarquons que les nombres entiers sont des nombres avec une infinité de chiffres significatifs. Il en va de même de leur inverse.

Exemples :
- 0,00**705** kg possède 3 chiffres significatifs (en gras)
- 654,0 s possède 4 chiffres significatifs
- 3,1416 possède 5 chiffres significatifs
- $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ possèdent une infinité de chiffres significatifs

Il existe 4 règles régissant le comportement à adopter vis-à-vis des mesures et de leurs chiffres significatifs. Concernant les arrondis, la première règle est la plus importante.

1. Lorsque le premier chiffre supprimé est supérieur ou égal à 5, on augmente d'une unité le dernier chiffre conservé. Par exemple

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & = & 873,919 & = & 873,9 \\ G_2 & = & 486,771 & = & 486,8 \\ G_3 & = & 141,249 & = & 141,2 \\ G_4 & = & 212,750 & = & 212,8 \end{array}$$

2. Il ne faut pas conserver dans le résultat plus de chiffres significatifs que nécessaire.

Par exemple, si une grandeur est affectée d'une incertitude égale à $0,7$, il ne faudra conserver que le chiffre des dixièmes : $G = 6,3243 \pm 0,7 = 6,3 \pm 0,7$.

3. Lors d'un calcul, le résultat du calcul doit être exprimé avec le nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en possède le moins.

   Après une addition ou une soustraction, une multiplication ou une division, le résultat ne doit pas avoir plus de décimales que le nombre qui en comporte le moins. Par exemple

$$\begin{array}{rcc} L & = & 30,01\ mm \\ l & = & 20,08\ mm \\ h & = & 9,37\ mm \\ & & \text{3 chiffres significatifs minimum} \end{array}$$

   Lors du calcul de $V = L.l.h = 5646,369496\ mm^3$, on conservera normalement 3 chiffres significatifs : $V = 565.10^1\ mm^3$. Ceci dit, en pratique, on peut se permettre d'en conserver assez pour que ce soit harmonieux : par exemple, $V = L.l.h = 5646\ mm^3$.

   Pour réinjecter une valeur dans un calcul, on utilisera en général 2 chiffres significatifs de plus que la donnée qui en comporte le moins. Dans le cas ci-dessus, on utilisera donc $V = L.l.h = 5646,4$ mm^3.

4. Lorsque, par exemple, le nombre π intervient dans les calculs, on prendra les décimales données par la calculette, ce qui convient largement pour négliger l'erreur d'approximation.

Chapitre 9

Exercices

9.1 Unités

Exercice 1

Effectue les transformations de longueur suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 3,9\ dm \to cm & 0,05\ dam \to dm & 15,7\ hm \to m \\ 7\ m \to km & 0,26\ dam \to hm & 2,72\ hm \to dm \end{array}$$

Exercice 2

Effectue les transformations de surfaces suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 12,73\ hm^2 \to km^2 & 74560\ m^2 \to hm^2 & 0,036\ hm^2 \to dam^2 \\ 0,037\ mm^2 \to cm^2 & 4,32\ m^2 \to dam^2 & 523,6\ dm^2 \to mm^2 \end{array}$$

Exercice 3

Effectue les transformations de volume suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 43000\ mm^3 \to m^3 & 0,0012\ dm^3 \to mm^3 & 150\ m^3 \to mm^3 \\ 443\ cm^3 \to dm^3 & 30000\ mm^3 \to dam^3 & 39,8\ dm^3 \to cm^3 \end{array}$$

Exercice 4

Effectue les transformations d'unités de temps suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 30\ s \to min & 2,5\ h \to min & 5\ min \to s \\ 3,5\ jours \to h & 480\ s \to min & 1\ h \text{ et quart} \to min \end{array}$$

Exercice 5

Effectue les transformations d'unités de masse suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 0,045\ t \to kg & 0,038\ g \to mg & 23\ t \to g \\ 92\ mg \to g & 72'000\ kg \to t & 0,15\ g \to mg \end{array}$$

Exercice 6

Effectue les transformations d'unités de capacité et de volume suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 4000\ ml \to hm^3 & 1,2\ hl \to m^3 & 180\ dl \to mm^3 \\ 13,56\ l \to cm^3 & 0,03\ km^3 \to ml & 12\ cl \to m^3 \\ 2400\ ml \to dm^3 & 5\ dl \to m^3 & 450\ cl \to m^3 \\ 12000\ m^3 \to kl & 24\ hl \to cm^3 & 0,2\ dm^3 \to kl \\ 0,03\ hl \to mm^3 & 50000\ l \to hm^3 & 240\ dam^3 \to dal \end{array}$$

Exercice 7

Effectue les transformations d'unités suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 6,2\ dam \to cm & 6\ min \to s & 17\ cl \to ml \\ 9000000\ cm^3 \to dm^3 & 900000\ cm^2 \to m^2 & 13\ hl \to l \\ 240\ min \to h & 600\ mm \to dm & 150\ dam^3 \to hm^3 \\ 3\ dm^2 \to hm^2 & 5\ t \to kg & 2\ h \to min \\ 0,028\ km \to mm & 250\ g \to kg & 700\ m^3 \to hl \\ 1,8\ hm \to km & 1,25\ h \to min & 3\ dl \to l \\ 0,06\ km^2 \to dam^2 & 62000\ kg \to t & 0,3\ dg \to mg \\ 700\ cl \to cm^3 & 0,0005\ m^3 \to ml & 7,38\ dm^2 \to mm^2 \end{array}$$

9.2 Analyse dimensionnelle

Exercice 1

Soit la relation $E = R.I^2$ donnant l'énergie par effet joule d'un conducteur électrique de résistance R parcouru par une intensité I. Sachant que E s'exprime en joules ($kg.m^2/s^2$) et I s'exprime en ampères (A), détermine les unités $S.I.$ de la résistance électrique R.

Exercice 2

Soit la relation $U = R.I$ donnant la différence de potentiel existant aux bornes d'un circuit électrique de résistance R parcouru par une intensité I. Détermine les unités $S.I.$ de la différence de potentiel U.

Exercice 3

Soit la relation $F = G\frac{m_1.m_2}{d^2}$ donnant la force de gravitation liant deux corps de masses m_1 et m_2, séparés par une distance d. Détermine les unités $S.I.$ de la constante de gravitation universelle G.

Exercice 4

Soit la relation $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1.q_2}{d^2}$ donnant la force électrique liant deux corps de charges q_1 et q_2 ($[q] = A.s$), séparés par une distance d. Détermine les unités $S.I.$ de la constante de permitivité du vide ϵ_0.

Exercice 5

Soit la relation $\epsilon_0.\mu_0 = c^2$ le lien entre permitivité, perméabilité et vitesse de la lumière. Détermine les unités $S.I.$ de la constante de perméabilité du vide μ_0.

Exercice 6

La constante de Planck réduite apparaît dans les énoncés du principe d'incertitude de Heisenberg. L'écart type d'une mesure de position Δx, et celui d'une mesure de vitesse le long du même axe Δv, obéissent à la relation suivante :

$$\Delta x.\Delta v \geq \frac{1}{2.m}\ \hbar$$

où m est la masse de l'objet considéré, supposée constante, et v sa vitesse.

Détermine les unités $S.I.$ de la constante de planck réduite $\hbar$.

Exercice 7

En physique, la constante de structure fine, représentée par la lettre grecque α, est une constante fondamentale qui régit la force électromagnétique assurant la cohérence des atomes et des molécules. On a

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c 4\pi\epsilon_0}$$

où e est la charge de l'électron.

Détermine les unités $S.I.$ de la constante de structure fine α.

9.3 Chiffres significatifs

Exercice 1

Donnez le bon nombre de chiffres significatifs :

$$3,14159 \quad 1,00.10^{-2} \quad 0,10.10^{3}$$

Exercice 2

Donnez les résultats avec le bon nombre de chiffres significatifs :

$$\frac{1,003}{0,9978} \qquad \sqrt{100,18} \qquad \sqrt[3]{997,9}$$
$$\left(\frac{5,8}{4,5}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \frac{1}{234}+\frac{1}{98,6} \qquad \sqrt{5,0}$$

Exercice 3

Peut-on exprimer $\frac{1}{2}$ kg en grammes sous la forme scientifique avec le bon nombre de chiffres significatifs ? Expliquez.

Exercice 4

Exprimer chacune des masses suivantes en grammes sous la forme scientifique avec le bon nombre de chiffres significatifs :

$$\begin{array}{ccc} 1,00\ g & 0,001\ ng & 100,0\ mg \\ 10000\ g & 10,000\ kg & 10^3\ dag \end{array}$$

Exercice 5

Déterminer le nombre de chiffres significatifs pour chacune des quantités suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 0,002 & 0,99 & 1,75 \pm 0,02 \\ 1,001 & 4,44 \times 10 & 0,01 \times 1034 \end{array}$$

Exercice 6

Ecrire la vitesse de la lumière dans le vide (299792458 m/s) avec un, trois, quatre et huit chiffres significatifs.

Exercice 7

Donner la valeur de $\pi = 3,14159265...$ à un, trois, quatre et cinq chiffres significatifs.

9.4 Masse volumique et densité

Exercice 1

Déterminer la masse de 12 cm^3 de glycérine à 20^o C et 1 atm.

Exercice 2

Sachant que pour un gaz parfait, $p_1V_1 = p_2V_2$, estimer la densité de l'hélium à la pression de 3 atm. (On suppose que l'hélium se comporte comme un gaz parfait à la température de 0^o C.)

Exercice 3

À quel volume correspond 250 g d'azote à 0^o C à la pression d'une atmosphère ?

Exercice 4

Un alliage de L_i et de M_g flottera-t-il ?
- S'il est composé de 100 % de Li.
- S'il est composé de 100 % de Mg.
- S'il est composé de 34 % de Li et 66 % de Mg.
- S'il est composé de 66 % de Li et 34 % de Mg.

Exercice 5

Un sac étanche contenant un mélange de terre végétale et de sciure de pin est plongé dans un lac. À partir de quelle proportion de sciure de pin le sac flottera-t-il ?

Exercice 6

Si dans un double litre on verse $4760g$ de mercure, quel est le poids d'eau de mer nécessaire pour remplir le restant ?

Exercice 7

Chacun des numéros d'un journal paraissant 360 fois par an, mesure $9dm$ sur $6dm$ et pèse 275 g. Le papier employé à son impression coûte 1440 e le quintal et couvrirait annuellement 9 km^2 72 ha. Calculez le coût du papier consacré annuellement à l'impression de ce quotidien.

9.5 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

Calculez, avec le bon nombre de chiffres significatifs, l'aire et la circonférence des cercles de diamètres :

$$\begin{array}{ccc} 5,42\ m & 0,5420\ nm & 5,420\ mm \\ 542,0\ m & 0,542\ km & 0,005420.10^{-4}\ \mu m \end{array}$$

Exercice 2

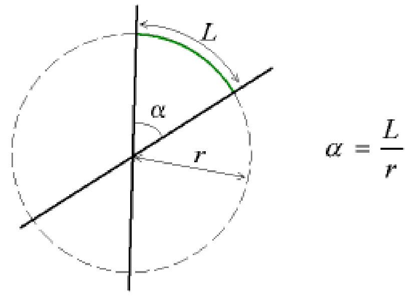


FIGURE 9.1 – Définition de l'angle α en radians.

Considérons un secteur angulaire, formé de deux droites concourantes distinctes, et un cercle de rayon r tracé dans un plan contenant ces deux droites, dont le centre est le point d'intersection des droites. Alors, la valeur de l'angle en radians est le rapport entre la longueur L de l'arc de cercle intercepté par les droites et le rayon r.

Déterminez les unités $S.I.$ du radian.

Exercice 3

L'homme adulte respire environ 15 fois par minute, et à chaque inspiration, 5 dl d'air pénètrent dans ses poumons. Exprimez en l, hl, m^3 et dam^3, le volume d'air qui entre par an dans les poumons de l'homme.

Exercice 4

Autour d'une prairie carrée et à 2 m de la limite, on a planté 32 arbres distants de 12 m. Que vaut le côté de cette prairie ?

Exercice 5

Le percement du canal de Suez a nécessité l'enlèvement de 74 hm^3 de terre. Dans des conditions ordinaires, une pelleteuse pneumatique peut enlever en moyenne 0,1 dam^3 de terre par heure. Combien faudra-t-il de jours à 37 pelleteuses fonctionnant 8 h par jour pour effectuer ce travail ?

Exercice 6

L'or est tellement malléable qu'on peut le convertir en feuilles d'un dix-millième de millimètre d'épaisseur. Trouvez, en centiares, la superficie qu'on pourrait couvrir avec pareilles feuilles provenant d'un lingot de 1,4475 kg.

Exercice 7

Le volume d'un suppositoire peut être assimilé à un cylindre dont les extrémités sont bouchées chacune par une demi-sphère. Le suppositoire MK2 (aussi appelé *suppo de Satan*) a une largeur de 19 cm. En supposant que sa longueur vaut le double de sa largeur et que sa masse est de 29,7 g, va-t-il flotter dans l'eau ?

Troisième partie

Fractions

Chapitre 10

Fractions ordinaires

Les nombres entiers suffisent généralement pour compter une collection d'objets, mais ils ne peuvent suffire pour mesurer toutes les grandeurs. En effet, certaines grandeurs sont plus petites que l'unité ; d'autres renferment une ou plusieurs unités et parties d'unité.

Si l'on a besoin de 2 ml d'insuline, est-on obligé d'injecter la bouteille d'un litre ? Comment déterminer ces parties d'unité ?

Il a donc fallu trouver une unité secondaire qui permit d'évaluer les parties de l'unité principale.

Par exemple, si l'on partage une longueur en deux parties égales, chaque partie s'appelle un demi.

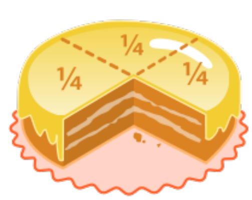
Si l'on partage une longueur en trois parties égales, chaque partie s'appelle un tiers. La grandeur étant divisée en trois parties égales, si l'on en prend deux, on dit qu'on en prend les deux tiers (2/3).

De même lorsqu'on divise la longueur en 4 parties égales et qu'on en prend 3, on dira qu'on en a pris les trois quarts (3/4).

Pour prendre une partie d'une grandeur, par exemple les 3/4, il faut faire 2 opérations :

1. Diviser la grandeur en 4 parties égales et
2. Multiplier la grandeur par 3.

Le résultat de cette double opération forme ainsi un seul et nouveau nombre qui permet d'indiquer une partie d'une grandeur. Ce nombre est appelé *fraction.*



Le nombre qui indique en combien de parties égales on a divisé l'unité s'appelle le *dénominateur* (4).

Le nombre qui indique combien on a pris de ces parties s'appelle le *numérateur* (3).

Remarque

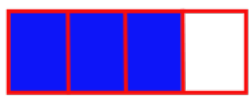
Une fraction peut évidemment aussi exprimer le quotient de la division de deux nombres. Le numérateur correspond au dividende et le dénominateur au diviseur.

Remarquons aussi qu'un nombre entier peut être considéré comme une fraction particulière qui a comme numérateur le nombre entier et comme dénominateur l'unité. Ainsi, par exemple, $5 = \frac{5}{1}$.

10.1 Comparaison de fractions

10.1.1 Avec l'unité

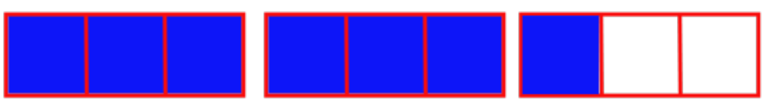
1. Une fraction est plus petite que l'unité quand le numérateur est plus petit que le dénominateur. Par exemple, $\frac{3}{4} < 1$ car l'unité contient 4 parties et que l'on n'en prend que 3.



3/4

2. Une fraction est égale à l'unité quand le numérateur est égal au dénominateur. Par exemple, $\frac{7}{7} = 1$ car l'unité contient 7 parties et qu'on les prend toutes les 7.

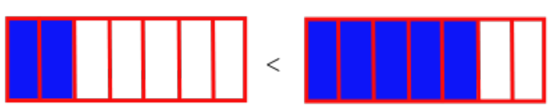
3. Une fraction est plus grande que l'unité quand le numérateur est plus grand que le dénominateur. Par exemple, $\frac{7}{3} > 1$ car l'unité contient 3 parties et que l'on en prend 7.



7/3

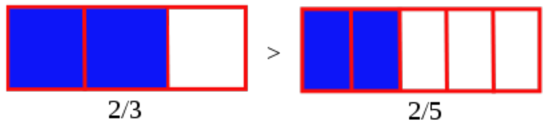
10.1.2 Entre elles

1. Si des fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur. Par exemple, $\frac{2}{7} < \frac{5}{7}$.



2/7 5/7

2. Si des fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur. Par exemple, $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$.



Comparer des fractions dont les numérateurs et les dénominateurs sont différents nécessite de les réduire au même dénominateur, ce qui sera envisagé plus loin.

10.2 Simplification

10.2.1 Changements apportés à une fraction

1. Si l'on multiplie le numérateur d'une fraction par un certain nombre plus grand ou plus petit que un, la fraction devient ce même nombre de fois plus grande ou plus petite.

   Par exemple, multiplions le numérateur de $\frac{3}{4}$ par 2 ; nous obtenons $\frac{3.2}{4} = \frac{6}{4}$, grandeur double. En effet, le dénominateur restant identique, chaque partie de l'unité conserve la même valeur. Or, en multipliant le numérateur par 2, on prend un nombre double de ces parties de l'unité. Donc la fraction devient 2 fois plus grande.

   Réciproquement, $\frac{6\frac{1}{2}}{4} = \frac{3}{4}$.

2. Si l'on multiplie le dénominateur d'une fraction par un certain nombre plus grand ou plus petit que un, la fraction devient ce même nombre de fois plus petite ou plus grande.

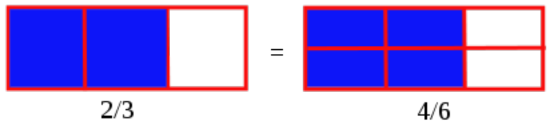
   Par exemple, multiplions le dénominateur de $\frac{3}{4}$ par 2 ; nous obtenons $\frac{3}{4.2} = \frac{3}{8}$, grandeur 2 fois moindre. En effet, on fait dans chaque unité 2 fois plus de parties, chacune de celle-ci est donc 2 fois plus petite. Or, le numérateur restant le même, on prend le même nombre de parties de l'unité. Donc la fraction est 2 fois plus petite.

   Réciproquement, $\frac{3}{8\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$.

3. Si l'on rend les deux termes d'une fraction un nombre de fois plus grands ou plus petits, la fraction ne change pas de valeur.

   Par exemple, multiplions le numérateur et le dénominateur de $\frac{2}{3}$ par 2 ; nous obtenons $\frac{2.2}{3.2} = \frac{4}{6}$ qui équivaut à $\frac{2}{3}$. En effet, en multipliant le numérateur par 2, la fraction est devenue 2 fois plus grande. En multipliant le dénominateur par 2, la fraction est devenue 2 fois plus petite. Donc la fraction n'a pas changé de valeur.

   Réciproquement, $\frac{4\frac{1}{2}}{6\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.



Par conséquent, on peut facilement **convertir n'importe quel nombre en fraction** de dénominateur donné. Il suffit de multiplier le numérateur par le nombre choisi comme dénominateur.

Par exemple, soit 5 que l'on souhaite exprimer sous forme de tiers. On a

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{5.3}{1.3} = \frac{15}{3}$$

10.2.2 Simplification des fractions

Simplifier une fraction, c'est la transformer en une autre équivalente, dont les termes sont plus petits.

Comment simplifie-t-on une fraction ?

En divisant les deux termes par un même nombre, quand la chose est possible :

$$\frac{180}{240} = \frac{180\frac{1}{10}}{240\frac{1}{10}} = \frac{18}{24} = \frac{18\frac{1}{6}}{24\frac{1}{6}} = \frac{3}{4}$$

Utilité

On simplifie une fraction pour se faire une idée plus nette de la valeur de la fraction ou pour manipuler des nombres plus petits et plus faciles à manipuler . Par exemple $\frac{51}{68} = \frac{3}{4}$.

Lors de calculs, on peut aussi simplifier les fractions apparaissant dans les réponses, ce qui évite de reporter des erreurs d'arrondis.

Réduire une fraction à sa plus simple expression

C'est-à-dire la transformer en une autre, équivalente, dont les termes sont les plus petits possible.
Une fraction réduite à sa plus simple expression est dite fraction irréductible. Par exemple : $\frac{3}{4}$.

Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser les 2 termes par leur plus grand commun diviseur (PGCD). On peut alors dire qu'une fraction est irréductible lorsque ses 2 termes sont premiers entre eux.

10.3 Réduction au même dénominateur

Quelle différence y a-t-il entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$ de mètre ?

Au premier abord, cette question nous embarrasse quelque peu. Pour y remédier, cherchons la valeur en cm de ces deux fractions de mètre. En réfléchissant quelque peu, il vient que $\frac{3}{4}\ m = 75\ cm$ et $\frac{4}{5}\ m = 80\ cm$. La différence est dès lors de $5\ cm = \frac{5}{100}\ m$. On peut donc dire que $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ et $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$.

Réduire plusieurs fractions au même dénominateur, c'est transformer ces fractions en d'autres, respectivement égales, qui ont toutes le même dénominateur.

On réduit les fractions au même dénominateur pour

1. pour les comparer ou
2. pour les additionner et les soustraire.

Comment fait-on pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur ?

Soit à réduire au même dénominateur $\frac{6}{8}$, $\frac{12}{15}$ et $\frac{30}{36}$.

Commençons par les rendre irréductibles : $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ et $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

On peut choisir, comme dénominateur commun, un multiple commun quelconque de 4, 5 et 6. Pour simplifier les calculs, il est préférable de prendre le plus petit commun multiple (PPCM) des dénominateurs primitifs qui vaut ici 60.

Pour conserver la valeur de ces fractions, multiplions les numérateurs par le nombre qui a servi à multiplier les dénominateurs primitifs pour obtenir le dénominateur commun :

$$\frac{3}{4} = \frac{3.15}{4.15} = \frac{45}{60}, \quad \frac{4}{5} = \frac{4.12}{5.12} = \frac{48}{60}, \quad \frac{5}{6} = \frac{5.10}{6.10} = \frac{50}{60}$$

Règle

Pour réduire plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun :

1. on les rend irréductibles en les simplifiant au maximum ;
2. on cherche le PPCM des dénominateurs des fractions obtenues : le PPCM est le plus petit dénominateur recherché ;
3. on multiplie les deux termes de chacune des fractions par le nombre de fois que son dénominateur est contenu dans le PPCM.

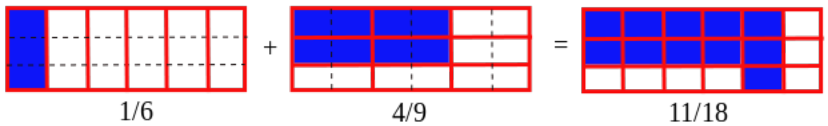
10.4 Opérations sur les fractions

Addition et soustraction

Pour additionner ou soustraire des fractions,

1. on les réduit au même dénominateur ;
2. on fait la somme ou la soustraction des numérateurs, et l'on prend comme dénominateur le dénominateur commun.

$$\frac{1}{6} + \frac{4}{9} = \frac{1.3}{6.3} + \frac{4.2}{9.2} = \frac{3}{18} + \frac{8}{18} = \frac{11}{18}$$



Multiplication

Pour multiplier une fraction par,

1. un nombre entier : Que payera-t-on pour 3 m de corde à $\frac{5}{6}e$ le mètre ?

   On multiplie le numérateur de la fraction par le nombre entier (ou l'on divise le dénominateur par ce nombre entier).
   $$\frac{5}{6}.3 = \frac{5.3}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \text{ et } \frac{5}{6}.3 = \frac{5}{\frac{6}{3}} = \frac{5}{2}$$

2. une fraction : Que payera-t-on pour $\frac{3}{4}$ m de corde à $\frac{9}{5}e$ le mètre ?

   On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
   $$\frac{9}{5}.\frac{3}{4} = \frac{9.3}{5.4} = \frac{27}{20}$$

Remarquons que

1. Multiplier une valeur par $\frac{2}{3}$ équivaut à diviser cette valeur par 3 et à multiplier le résultat par 2 ; ce qui revient à prendre les $\frac{2}{3}$ de cette valeur.
2. Multiplier une fraction, soit $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$ équivaut à diviser $\frac{2}{3}$ par 4 et à multiplier le résultat par 3 ; ce qui revient à prendre les $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.
3. Multiplier un nombre entier par une fraction revient à multiplier une fraction par une fraction : $5.\frac{2}{3} = \frac{5}{1}.\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.

Division

Pour diviser une fraction par,

1. un nombre entier : Soit à diviser $\frac{6}{7}$ m en 3 parties égales. Quelle sera la longueur d'une partie ?

   On divise le numérateur de la fraction par le nombre entier (ou l'on multiplie le dénominateur par ce nombre entier).
   $$\frac{\frac{6}{7}}{3} = \frac{\frac{6}{3}}{7} = \frac{2}{7} \text{ et } \frac{\frac{6}{7}}{3} = \frac{6}{7.3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

2. une fraction : Combien y a-t-il de fois $\frac{3}{5}$ m dans $\frac{7}{4}$ m ? Pour répondre à cette question, il faut diviser $\frac{7}{4}$ par $\frac{3}{5}$.

   On multiplie la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.
   $$\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{4}.\frac{5}{3} = \frac{7.5}{4.3} = \frac{35}{12}$$

Remarquons que

1. Diviser un nombre entier par une fraction revient à diviser une fraction par une fraction : $\frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{2}{3}} = \frac{5.3}{1.2} = \frac{15}{2}$.

2. Si un nombre vaut les $\frac{3}{4}$ d'un autre, nous pouvons dire que cet autre nombre vaut les $\frac{4}{3}$ du premier. Ainsi, si A vaut les $\frac{3}{4}$ de B, B vaut les $\frac{4}{3}$ de A. Par conséquent, si par exemple les $\frac{3}{4}$ d'un nombre vaut 45, lme nombre recherché vaut les $\frac{4}{3}$ de 45 et est donc égal à $45.\frac{4}{3} = 60$.
   On pourrait aussi obtenir le nombre demandé en divisant 45 par $\frac{3}{4}$. En effet, on trouve 60 fois $\frac{3}{4}$ dans 45.

Puissance et racine

Partant du principe qu'une racine peut s'écrire comme un exposant ($\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$), le cas des racines est similaire à celui des puissances.

Prendre l'exposant d'une fraction revient à prendre l'exposant de son numérateur et de son dénominateur.

Il convient cependant de ne pas confondre les notations :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16} \quad ; \quad \frac{3^4}{2} = \frac{81}{2} \quad ; \quad \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$$

10.4.1 Règles de priorité de calcul

En mathématiques, la priorité des opérations ou ordre des opérations précise l'ordre dans lequel les calculs doivent être effectués dans une expression complexe.

Les règles de priorité sont :

1. les calculs contenus entre parenthèses (ou crochets) sont prioritaires sur les calculs situés en dehors de ces parenthèses. La barre d'une fraction ou d'une racine carrée joue le rôle d'une parenthèse ;
2. les exposants sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions et soustractions ;
3. les multiplications et divisions sont prioritaires sur les additions et soustractions.

Exemple :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{9}{4} - 3.\tfrac{7+2}{2^3}\right)^2 &= \left(\tfrac{9}{4} - 3.\left(\tfrac{(7+2)}{(2^3)}\right)\right)^2 = \left(\tfrac{9}{4} - 3.\left(\tfrac{9}{8}\right)\right)^2 = \left(\tfrac{9}{4} - \tfrac{3.9}{8}\right)^2 \\ &= \left(\tfrac{9}{4} - \tfrac{27}{8}\right)^2 = \left(\tfrac{18}{8} - \tfrac{27}{8}\right)^2 = \left(-\tfrac{9}{8}\right)^2 = (-1)^2\tfrac{9^2}{8^2} = \tfrac{81}{64} \end{aligned}$$

10.4.2 Ne jamais diviser par zéro

La division par zéro consiste à chercher le résultat qu'on obtiendrait en prenant zéro comme diviseur. Ainsi, une division par zéro s'écrirait $\frac{x}{0}$, où x serait le numérateur.

Dans les branches les plus courantes des mathématiques, cette opération n'a pas de sens. Elle est possible dans certaines branches, mais cela implique de perdre certaines propriétés simples des opérations courantes. On déclare donc généralement qu'elle est impossible.

Pourquoi pas l'infini ?

Intuitivement, plus les morceaux d'une tarte sont petits, plus ils sont nombreux. Par conséquent, si les morceaux sont extrêmements petits (proches de 0 g), il y en aura énormément.

Inversément, plus les morceaux seront gros, moins ils seront nombreux.

En effet, vis-à-vis d'une fraction, plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{1}{\infty} & < & ... & < & \frac{1}{1.000.000} & < & \frac{1}{10} & < & \frac{1}{0,1} & < & \frac{1}{0,000001} & < & ... & < & \frac{1}{0} \\
 & < & ... & < & ... & & & < & \frac{1}{\frac{1}{10}} & < & \frac{1}{\frac{1}{1.000.000}} & < & ... & < & \\
0 & < & ... & < & 0,000001 & < & 0,1 & < & 10 & < & 1.000.000 & < & ... & < & +\infty
\end{array}$$

Mais qu'en est-il si l'on approche 0 par les négatifs ?

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
-\frac{1}{\infty} & > & ... & > & -\frac{1}{1.000.000} & > & -\frac{1}{10} & > & -\frac{1}{0,1} & > & -\frac{1}{0,000001} & > & ... & > & -\frac{1}{0} \\
 & > & ... & > & ... & & & > & -\frac{1}{\frac{1}{10}} & > & -\frac{1}{\frac{1}{1.000.000}} & > & ... & > & \\
0 & > & ... & > & -0,000001 & > & -0,1 & > & -10 & > & -1.000.000 & > & ... & > & -\infty
\end{array}$$

Dès lors, si l'on considère autre chose que des morceaux de tarte, une division par zéro peut impliquer une réponse dont le signe est indéfini ou inconnu ($\pm\infty$).

De plus, l'infini (∞) ne peut pas être considéré comme le nombre le plus grand car, s'il était un nombre, on pourrait lui ajouter 1 et ce ne serait donc pas le plus grand ($\infty + 1 > \infty$?). La division par zéro est donc à éviter.

Chapitre 11

Fractions généralisées

Les fractions ordinaires ont des termes exprimés par des nombres entiers. Une fraction représente le quotient indiqué (et exact) de son numérateur par son dénominateur. Or, comme les termes d'une division peuvent être des nombres quelconques, et non pas seulement des nombres entiers, on peut donner le nom de *fraction généralisée* à des expressions écrites sous la forme de fractions, mais dont au moins l'un des termes n'est pas un nombre entier.

Par exemple, $\frac{3}{0{,}4}$; $\frac{3}{\frac{2}{5}}$; $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$; $\frac{0{,}36}{4{,}8}$; ...

Remarquons que les fractions généralisées obéissent aux mêmes lois que les fractions ordinaires :

1. Une fraction généralisée ne change pas de valeur quand on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre.
   Exemple :
$$\begin{aligned}\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} &= \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{11}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{11}} = \frac{\frac{12}{77}}{\frac{8}{55}} = \frac{12.55}{77.8} = \frac{2.2.3.5.11}{7.11.2.2.2} = \frac{3.5}{2.7} = \frac{15}{14}\\ &= \frac{3.5}{7.2} = \frac{15}{14}\end{aligned}$$
2. La somme ou la différence de fractions s'obtient en faisant la somme ou la soustraction de leurs numérateurs après avoir réduit ces fractions au même dénominateur.
   Exemple :
$$\frac{3}{0,4}+\frac{\frac{3}{7}}{4,8}=\frac{3}{\frac{4}{10}}+\frac{\frac{3}{7}}{\frac{48}{10}}=\frac{3.10}{4}+\frac{3.10}{7.48}=\frac{15}{2}+\frac{5}{56}=\frac{15.28}{2.28}+\frac{5}{56}=\frac{420}{56}+\frac{5}{56}=\frac{425}{56}$$
3. Le produit d'une fraction généralisée par un nombre entier ou une autre fraction généralisée s'obtient en multipliant les numérateurs et les dénominateurs entre eux.
   Exemple :
$$\begin{aligned}\frac{3{,}8}{4+\frac{5}{7}}\cdot\frac{\frac{7}{12}}{76} &= \frac{\frac{38}{10}}{\frac{33}{7}}\cdot\frac{\frac{7}{12}}{76} = \frac{\frac{38}{10}\cdot\frac{7}{12}}{\frac{33}{7}\cdot\frac{76}{1}} = \frac{\frac{38.7}{10.12}}{\frac{33.76}{1.7}} = \frac{38.7.1.7}{10.12.33.76} = \frac{49}{7920}\\ &= \frac{\frac{38}{10}}{\frac{33}{7}}\cdot\frac{\frac{7}{12}}{76} = \frac{38.7}{10.33}\cdot\frac{7}{12.76} = \frac{38.7.7}{10.33.12.76} = \frac{49}{7920}\end{aligned}$$
4. La division d'une fraction généralisée s'obtient en multipliant le numérateur de la fraction dividende par le dénominateur de la fraction diviseur et en multipliant le dénominateur de la fraction dividende par le numérateur de la fraction diviseur.

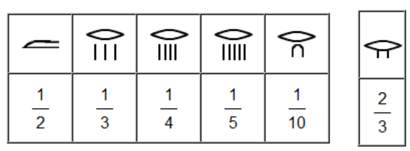
Exemple :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{3,8}{4+\frac{5}{7}}}{\frac{\frac{7}{12}}{76}} &= \frac{\frac{38}{10}}{\frac{33}{7}}\cdot\frac{76}{\frac{7}{12}} = \frac{\frac{38}{10}\cdot\frac{76}{1}}{\frac{33}{7}\cdot\frac{7}{12}} = \frac{\frac{38.76}{10.1}}{\frac{33.7}{7.12}} = \frac{38.76.7.12}{10.1.33.7} = \frac{5776}{55} \\
&= \frac{\frac{38}{10}}{\frac{33}{7}}\cdot\frac{76}{\frac{7}{12}} = \frac{38.7}{10.33}\cdot\frac{12.76}{7} = \frac{38.7.12.76}{10.33.7} = \frac{5776}{55}
\end{aligned}$$

11.1 Une touche de culture : fractions égyptiennes

Vu qu'il restait de la place sur la page, autant parler de l'horreur qu'était l'arithmétique dans l'égypte antique. En effet, personne n'est à l'abri de faire le cauchemar de passer un examen d'algèbre en hyéroglyphes. Avec la maîtrise de ce chapitre, vous vivrez peut-être ce cauchemar comme un rêve agréable, tant que vous n'avez pas aussi rêvé que vous avez oublié de vous habiller avant d'aller à l'examen.

N'importe quelle fraction que nous écrivons avec un numérateur non unitaire était écrite par les anciens Égyptiens comme une somme de fractions unitaires sans que deux de ces dénominateurs soient les mêmes.



Le papyrus Rhind (environ -1650) qui est conservé au British Museum de Londres, est le plus important document nous informant des connaissances mathématiques des temps anciens. Il comporte 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage. Mais, avant de prendre connaissance de ces problèmes, l'égyptien devait avoir à sa disposition différentes tables lui permettant de décomposer directement les fractions non unitaires en fractions unitaires. Une de ces tables, la table dite « de deux », se trouve en première position sur le Papyrus de Rhind. Elle répertorie les fractions dont le numérateur est 2 et dont le dénominateur varie de 3 à 101, et donne leur équivalent en somme de fractions unitaires.

Quelques exemples de décomposition en fractions unitaires de la table de deux :

$$\begin{aligned}
2/5 &= 1/3 + 1/15 \\
2/7 &= 1/4 + 1/28 \\
2/9 &= 1/6 + 1/18 \\
2/11 &= 1/6 + 1/66 \\
2/101 &= 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606
\end{aligned}$$

Chapitre 12

Conversions de fractions en nombres décimaux

Pour convertir une fraction en nombre décimal, on divise le numérateur par le dénominateur.

L'unique condition pour qu'une fraction irréductible puisse être convertie en nombre décimal limité est que son dénominateur ne contienne pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5.

Exemples : $\frac{-3}{100} = -\frac{3}{100} = -0,03$; $\frac{12}{-25} = -\frac{48}{100} = -0,48$; $\frac{9}{20} = \frac{45}{100} = 4,45$; $\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = 0,875$; ...

Trouver la fraction correspondante à un nombre décimal limité est simple. Par exemple, $7,45698 = \frac{745698}{100000} = \frac{372849}{50000}$

Lorsqu'une fraction n'est pas convertible en un nombre décimal limité, elle engendre un nombre décimal périodique dont certains chiffres se reproduisent indéfiniment dans le même ordre.

Un nombre décimal périodique peut être
- simple : $0,375375375...$; $0,777777...$; ...
- mixte : $0,52375375375...$; $5,37777...$; ...

Via un raisonnnement mathématique assez simple utilisant les suites géométriques, il est facile de prouver que $0,777777... = \frac{7}{9}$ ou que $0,375375375... = \frac{375}{999} = \frac{125}{333}$, etc.

Dès lors, un nombre décimal mixte peut s'écrire par exemple

$$5,37777... = 5,3 + 0,07777... = \frac{53}{10} + \frac{1}{10}.0,7777... = \frac{53}{10} + \frac{1}{10}.\frac{7}{9} = \frac{477}{90} + \frac{7}{90} = \frac{484}{90} = \frac{242}{45}$$

Remarque

La valeur $0,99999999... = \frac{9}{9} = 1$.

12.0.1 Pourcentage

Le taux d'une grandeur A par rapport à une autre B s'obtient en divisant la première par la seconde : $\frac{A}{B}$. Le résultat, s'écrit en pourcent % s'il est exprimé en $\frac{1}{100}^{e}$.

Par exemple, pour l'ensemble de ses résultats aux examens, un étudiant a obtenu 792 points sur un maximum de 1320 points. Donc,

$$\begin{array}{rccccl} & 1320 \text{ points} & \longleftrightarrow & 792 \text{ points} & & \\ \times\frac{100}{1320}\downarrow & & & & & \downarrow\times\frac{100}{1320} \\ & 100 \text{ points} & \longleftrightarrow & \frac{792}{1320}.100 = 60 \text{ points} & & \end{array}$$

Cet élève obtient donc $\frac{60}{100} = 0,62 = 62\%$ du maximum.

Chapitre 13

Exercices

13.1 Notions : comparaisons, simplifications et réduction au même dénominateur

Exercice 1

Il est $9h$ du matin. Quelle fraction du jour est écoulée ? Quelle fraction reste-t-il à s'écouler ? Exprimez chacune de ces fractions en fonction de l'autre (la fraction du jour écoulé représente quelle fraction du jour restant ? Et vice-versa).

Exercice 2 :

L'unité est-elle plus petite, plus grande ou égale que les fractions suivantes ?

$$\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{-4}\ ;\ \frac{5}{7}\ ;\ \frac{6}{6}\ ;\ \frac{9}{15}\ ;\ \frac{-15}{9}\ ;\ -\frac{9}{9}\ ;\ \frac{25}{7}\ ;\ \frac{7}{25}\ ;\ \frac{19}{40}\ ;\ \frac{-25}{19}\ ;\ \frac{4}{4}\ ;\ \frac{9}{11}\ ;\ \frac{17}{14}\ ;\ \frac{30}{-30}\ ;\ \frac{17}{42}\ ;\ \frac{75}{72}$$

Exercice 3

1. Placez dans l'ordre des valeurs croissantes les fractions suivantes :
$$-\frac{3}{40}\ ;\ \frac{37}{40}\ ;\ -\frac{7}{40}\ ;\ \frac{51}{40}\ ;\ \frac{25}{-40}\ ;\ \frac{-31}{40}\ ;\ \frac{19}{40}$$
2. Placez dans l'ordre des valeurs décroissantes les fractions suivantes :
$$\frac{5}{9}\ ;\ -\frac{5}{12}\ ;\ \frac{5}{3}\ ;\ \frac{5}{42}\ ;\ \frac{-5}{7}\ ;\ \frac{5}{-34}\ ;\ -\frac{5}{6}$$
3. Placez dans l'ordre des valeurs croissantes les fractions suivantes :
$$\frac{8}{9}\ ;\ \frac{3}{-4}\ ;\ \frac{2}{5}\ ;\ -\frac{9}{42}\ ;\ \frac{45}{63}\ ;\ \frac{14}{15}\ ;\ \frac{-11}{18}\ ;\ \frac{21}{35}$$

Exercice 4

1. Quels sont les nombres 25 fois plus grands que $\frac{9}{3}$ et que $\frac{7}{20}$?

2. Quels sont les nombres 4 fois moindres que $\frac{7}{15}$ et que $\frac{2}{3}$?

3. Fournissez 5 factions équivalentes à $\frac{12}{18}$ dont 2 auront les termes plus petits et 3 auront les termes plus grands. Même question pour $\frac{20}{30}$.

Exercice 5

Réduisez les fractions suivantes à leur plus simple expression :

1. $\frac{2}{4}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{15}{21}$; $\frac{18}{24}$; $\frac{16}{28}$; $\frac{24}{40}$; $\frac{51}{85}$; $\frac{60}{90}$; $\frac{84}{108}$; $\frac{155}{225}$
2. $\frac{216}{252}$; $\frac{875}{500}$; $\frac{675}{1500}$; $\frac{39}{234}$; $\frac{1001}{2761}$; $\frac{99}{1170}$; $\frac{24}{432}$; $\frac{36}{324}$
3. $\frac{135}{180}$; $\frac{144}{225}$; $\frac{231}{264}$; $\frac{308}{462}$; $\frac{1092}{1820}$; $\frac{2520}{2040}$; $\frac{45885}{61845}$; $\frac{85995}{89180}$
4. $\frac{12}{9.8}$; $\frac{168}{30.35}$; $\frac{10.7}{35}$; $\frac{24.30}{288}$; $\frac{15.32}{35.24}$; $\frac{36.26}{390.12}$; $\frac{24.75.16}{90.64}$
5. $\frac{121.84.96.63.26}{49.66.143.720.35}$; $\frac{26+39}{65+52}$; $\frac{42+63+84}{105+147}$; $\frac{68+85-51}{17.2}$; $\frac{45.4.5}{105+225-30}$; $\frac{45+54+36}{27.162+81}$

Exercice 6

Quelle est la fraction égale à $\frac{35}{75}$ dont

1. le dénominateur vaut 105 ?
2. le numérateur vaut 21 ?

Exercice 7

Réduisez au même dénominateur les fractions suivantes :

1. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}, \frac{3}{4}$; $\frac{7}{9}, \frac{5}{6}$
2. $\frac{5}{12}, \frac{7}{9}, \frac{1}{6}$; $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}$; $\frac{5}{24}, \frac{3}{8}, \frac{5}{6}$; $\frac{9}{14}, \frac{3}{7}, \frac{5}{21}$; $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$
3. $\frac{4}{6}, \frac{6}{8}, \frac{12}{24}, \frac{3}{9}$; $\frac{6}{18}, \frac{3}{6}, \frac{1}{2}, \frac{9}{12}$; $\frac{5}{18}, \frac{40}{90}, \frac{5}{15}, \frac{12}{36}$; $\frac{30}{35}, \frac{27}{42}, \frac{30}{45}, \frac{99}{189}$; $\frac{24}{30}, \frac{21}{30}, \frac{26}{40}, \frac{21}{28}$

13.2 Opérations : addition et soustraction

Exercice 1

Calculez

1. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$; $\frac{5}{6}+\frac{1}{4}$; $\frac{7}{12}+\frac{4}{9}$; $\frac{7}{8}+\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$; $\frac{2}{7}+\frac{4}{5}$; $\frac{5}{12}+\frac{7}{9}+\frac{1}{6}$
2. $1-\frac{2}{3}$; $4-\frac{5}{7}$; $2-\frac{23}{9}$; $\frac{23}{9}-2$; $\frac{2}{3}-1$; $\frac{5}{2}-\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}-\frac{7}{12}$
3. $\frac{5}{12}+\frac{7}{9}-\frac{1}{6}$; $\frac{5}{12}-\frac{7}{9}+\frac{1}{6}$; $\frac{5}{12}-\frac{7}{9}-\frac{1}{6}$; $-\frac{5}{12}+\frac{7}{9}-\frac{1}{6}$; $-\frac{5}{12}-\frac{7}{9}-\frac{1}{6}$; $\frac{-5}{12}-\frac{7}{-9}+\frac{-1}{-6}$

Exercice 2

Coulant séparément, 3 robinets mettraient respectivement 12, 15 et 20 heures pour remplir un réservoir. On les laisse fonctionner simultanément durant 1 heure. Quelle partie du réservoir ont-ils remplis ?

Exercice 3

Si ces robinets marchent successivement, le 1^{er} pendant 3 h, le 2^{e} pendant 4 h et le 3^{e} pendant 6 h, quelle fraction du réservoir sera remplie ?

Exercice 4

Ce réservoir est vidé par 2 autres robinets qui en évacuent le contenu, le 1^{er} en $3h$ et le second en 4 h. Le réservoir étant plein, quelle fraction du réservoir sera remplie après que ces deux robinets aient respectivement coulé pendant $\frac{1}{2}$ h et 3 h ?

Exercice 5

Pol et Mike font en un jour les $\frac{3}{20}$ d'un ouvrage. Pol travaillant seul mettrait 12 jours à l'exécuter. Quelle partie de l'ouvrage Mike fait-il quotidiennement ?

Exercice 6

Un robinet débite 250 mL en 35 minutes. Un second robinet évacue 145 mL en 35 minutes. Les deux robinets fonctionnant ensemble, de que vaut l'accroissement de la quantité de liquide par minute ?

Exercice 7

Avec le contenu d'un urinal, on a rempli exactement 5 petits barils. Le 3^{e} mesure 10 cl $\frac{3}{4}$ de plus que le 2^{e} dont la capacité surpasse celle du 1^{er} de 3 cl $\frac{4}{5}$. Le 4^{e} qui reçoit 2 cl $\frac{13}{20}$ de plus que le 3^{e}, a une contenance double de celle du 1^{er}. Quant au 5^{e}, s'il mesurait 10 cl $\frac{7}{10}$ de moins, il équivaudrait à la somme des deux premiers. Quelle est la capacité de l'urinal ?

13.3 Opérations : multiplication et division

Exercice 1

Calculez

1. $\frac{4}{5}.\frac{2}{3}$; $\frac{6}{7}.\frac{3}{4}$; $\frac{7}{11}.\frac{5}{6}$; $\frac{4}{7}.\frac{3}{4}$; $\frac{7}{14}.\frac{12}{21}$; $\frac{11}{18}.\frac{12}{22}$; $\frac{14}{15}.\frac{5}{7}$
2. $\frac{\frac{4}{5}}{2}$; $\frac{\frac{25}{42}}{5}$; $\frac{2}{\frac{3}{4}}$; $\frac{12}{\frac{3}{7}}$; $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$; $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{3}{11}}$; $\frac{-\frac{3}{10}}{\frac{2}{75}}$
3. $(\frac{2}{3}+\frac{6}{7}).7$; $(15-\frac{101}{11}).\frac{11}{7}$; $\frac{\frac{2}{3}+\frac{6}{7}}{7}$; $\frac{\frac{2}{3}-\frac{6}{7}}{7}$; $\frac{\frac{2}{3}+\frac{6}{7}}{\frac{11}{7}}$; $\frac{1}{2}.\frac{\frac{2}{3}-\frac{6}{7}}{\frac{11}{7}}$; $2.\frac{\frac{2}{3}-\frac{6}{7}}{15-\frac{101}{11}}$

Exercice 2

Quel est le salaire d'une infirmière en début de carrière, pour 25 jours de travail, sachant que son salaire net journalier est en moyenne de 59 e 25 c ?

Exercice 3

Une banque d'organes achète un cadavre frais avec les $\frac{3}{8}$ de son argent, un cadavre avancé avec les $\frac{2}{5}$ du restant et un squelette avec les $\frac{3}{4}$ des $\frac{8}{9}$ du second reste. Quelle partie de son argent possede-t-elle encore ?

Exercice 4

D'une pochette de plasma sanguin de 225 cl, on prend le $\frac{1}{5}$ du contenu qu'on remplace par de l'eau de mer. On remplace le $\frac{1}{4}$ du mélange obtenu par de l'eau de mer, puis on remplace le $\frac{1}{3}$ du 2^e mélange et finalement le $\frac{1}{2}$ du 3^e mélange. Quelle quantité de plasma sanguin renferme encore la pochette ?

Exercice 5

Un ouvrier fait en un jour les $\frac{2}{15}$ d'un ouvrage qui lui a été commandé. Dans combien de jours en aura-t-il achevé les $\frac{24}{25}$?

Exercice 6

Une école a consacré une somme de 2852,50 e à l'achat de défibrilateurs muraux à 158,50 e l'unité. Combien de défibrilateurs l'école possède-t-elle ?

Exercice 7

Un patch de la marque A libère 2,5 mg d'un principe actif. Sachant qu'un patch de la marque B libère les $\frac{3}{10}$ du principe actif du patch de la marque A, Combien de patchs de la marque B faudra-t-il appliquer pour diffuser 12 mg de la substance active ?

13.4 Pourcentages

Exercice 1 Une personne a un salaire mesuel de 2500 €. Cette personne paie un loyer de 700 €. Quel pourcentage représente le loyer par rapport au revenu ?

Exercice 2
Les frais de notaire pour l'achat d'un terrain étant généralement de 5%. A combien s'élèvent-ils pour un terrain valant 45 000 € ?

Exercice 3

Tu as 450 €sur un livret de caisse d'épargne, placés à 3,5%. De combien sera augmenté ton livret au bout d'un an ? De quelle somme disposeras-tu au bout d'un an ?

Exercice 4

Un grand magasin affiche : - 25% sur les luminaires. Quel sera le nouveau prix d'une lampe qui valait 30 € ?

Exercice 5

Ma citerne de 225 litres est percée, elle a perdu 15% de son contenu avant que je m'en aperçoive. Quelle quantité d'eau reste-t-il ?

Exercice 6

Je décide de m'acheter un lecteur CD affiché à 265 €. Si je paye comptant, le vendeur me fait une remise de 15%. Quel est le nouveau prix ?

Exercice 7

Vis-à-vis du DVD de l'exercice précédent, je préfère payer 115 €maintenant et payer le reste augmenté de 10%, en trois fois. Quel sera le montant de chaque versement ?

13.5 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

Une banque d'organes a acheté 25 doigts pour 14218,75 e et les revend en gagnant 918,75 e pour 7 doigts. A combien la banque cède-t-elle chaque doigt ?

Exercice 2

Un soin est facturé 576 e par une infirmière indépendante. Le patient, qui possède une assurance santé, paie les $\frac{7}{12}$. Quelle somme a-t-il versé et que doit-elle encore réclamer à l'assurance du patient ?

Exercice 3

Un hôpital, après avoir licencié successivement le $\frac{1}{6}$, le $\frac{1}{12}$ et les $\frac{7}{18}$ de son personnel, exploite encore 39 employés. Combien de personnes étaient employées avant les premiers licenciements et combien de membres du personnel on-t-ils été licenciés à chaque fois ?

Exercice 4

Une clinique achète du matériel pour les $\frac{2}{7}$ de son budget et rémunère ses employés avec les $\frac{5}{8}$ du reste. Si elle rembourse un prêt de 12.500 e avec le restant, qu'avait-elle initialement ? Que lui a coûté l'achat de matériel ? Que lui a coûté le salaire de ses employés ?

Exercice 5

D'une pochette remplie aux $\frac{3}{4}$, on retire les $\frac{3}{5}$ de ce qu'il contient. On soutire encore les $\frac{2}{3}$ du nouveau reste. La pochette contient encore 30 cl. Quelle est la capacité de la pochette ? Quel pourcentage de la quantité initiale reste-t-il ?

Exercice 6

Une cuve reçoit de l'eau usée de deux conduites. La première conduite remplirait seule la cuve en 9 mois. Le débit de la seconde est de $\frac{1}{3}$ supérieur à celui de la première. Pour remplir la cuve, quel temps sera nécessaire si les deux conduites fonctionnent simultannément ?

Exercice 7

Une société d'ambulances a pris en charge des déplacements pour un montant total de 18.000 e. La société utilise 3 ambulances et estime qu'elles auraient pu effectuer, chacune, ce travail en respectivement 12, 15 et 20 heures. Si ces ambulances ont été utilisées pour ces déplacements pendant le même nombre d'heures et que les trois équipes d'ambulanciers ont été payées en raison de la besogne produite, que revient-il à chaque équipe ?

Quatrième partie

Proportions

Chapitre 14

Rapports et proportions

14.1 Rapports

Le rapport de deux nombres est leur quotient exact.

Ainsi, le rapport de 45 (par rapport) à 9 est $\frac{45}{9} = 5$. Le rapport de $\frac{4}{5}$ à $\frac{3}{7}$ est $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{28}{15}$. Etc.

Les propriétés établies pour les fractions sont évidemment applicables aux rapports.

14.1.1 Rapport inverse

Les rapports $\frac{21}{7}$ et $\frac{7}{21}$ sont dits inverses (ou réciproques).

Le produit de deux rapports inverses est égal à l'unité : $\frac{21}{7}.\frac{7}{21} = \frac{\frac{21}{7}}{\frac{21}{7}} = \frac{3}{3} = 1$.

De manière générale, on a que $\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = 1$.

14.1.2 Suite de rapports égaux

Les rapports $\frac{10}{5}$, $\frac{70}{35}$, $\frac{6}{3}$ sont égaux à 2.

On a $10 = 5.2$; $70 = 35.2$; $6 = 3.2$ et par addition, on obtient $10 + 70 + 6 = (5 + 35 + 3).2$

La valeur du rapport $\frac{10+70+6}{5+35+3}$ est 2. On a bien $\frac{10}{2} = \frac{70}{35} = \frac{6}{3} = \frac{10+70+6}{5+35+3}$.

Plus généralement, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{a+b}{a'+b'}$.

On peut aussi montrer que, par exemple, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a-b+c}{a'-b'+c'} = \frac{2a-3b-\frac{5}{2}c}{2a'-3b'-\frac{5}{2}c'} = ...$

14.1.3 Rapport de deux grandeurs

Considérons deux grandeurs de même espèce, par exemple les longueurs l_A et l_B de deux planches. Comparons ces longueurs à une même troisième, la longueur l_C d'une troisième planche.

Supposons que l_A contienne $\frac{24}{5}$ fois l_C et que l_B contienne $\frac{2}{3}$ fois l_C. En réduisant ces fractions au même dénominateur, on peut encore dire que

- l_A contient $\frac{72}{15}$ de fois l_C et
- l_B contient $\frac{10}{15}$ de fois l_C.
- Donc l_A vaut $\frac{\frac{72}{15}}{\frac{10}{15}} = \frac{72}{10}$ de fois l_B et
- le rapport $\frac{l_A}{l_B}$ vaut $\frac{72}{10}$.

En conclusion, **le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui expriment leurs mesures, celles-ci étant faites avec la même unité.**

Ainsi, dans l'exemple, si l_C représente un mètre étalon, les mesures de l_A et l_B sont respectivement de $\frac{24}{5}$ m et $\frac{2}{3}$ m. Nous avons que $\frac{l_A}{l_B} = \frac{\frac{24}{5}m}{\frac{2}{3}m} = \frac{72}{10}$ (sans unités).

Remarques

1. Le rapport de deux grandeurs de même espèce (deux angles, deux longueurs, deux aires, deux volumes, deux masses, deux énergies, ...) se définit comme le nombre sans dimensions par lequel il faut multiplier la seconde grandeur pour obtenir la première.

2. La mesure d'une longueur est le rapport de cette longueur à une autre longueur prise comme étalon (voir 1.2. Tableau des unités du système international). On définit de même la mesure d'une aire, d'un volume, etc.

3. Si deux grandeurs de même espèce admettent une même proportion, elles en admettent une infinité d'autres. Par exemple, pour un rectangle de longueur 8 cm et 5 cm, nous avons

$$\frac{L}{l} = \frac{8cm}{5cm} = \frac{80mm}{50mm} = \frac{0,08m}{0,05m} = \frac{8.10^{-5}km}{5.10^{-5}km} = \frac{80000\mu m}{50000\mu m} = ... = \frac{8}{5} = \frac{80}{50} = \frac{16}{10} = \frac{3,2.10^{-2}}{2,0.10^{-2}} = ...$$

Exemple : la densité

La densité d'un corps est le rapport des masses du volume de ce corps avec un même volume d'eau. Autrement dit, il s'agit du rapport de la masse volumique de ce corps avec la masse volumique de l'eau.

Par exemple, un bloc de fonte de 3 dm^3 possède une masse de $21,6$ kg. La masse de 3 dm^3 d'eau étant de 3 kg, la densité de la fonte est donc de $\frac{21,6kg}{3kg} = 7,2$. On peut en déduire que la fonte est $7,2$ fois plus lourde que l'eau. Par conséquent, 1 dm^3 d'eau ayant une masse de 1 kg, on peut déduire que 1 dm^3 de fonte aura une masse de 7,2 kg.

Dès lors, nous pouvons tenir le raisonnement suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & 3\ dm^3 & \longleftrightarrow & 21,6\ kg & \\ \times\frac{1}{3}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{1}{3} \\ & 1\ dm^3 & \longleftrightarrow & 7,2\ kg & \\ \times V\downarrow & & & & \downarrow\times V \\ & V\ dm^3 & \longleftrightarrow & V.7,2\ kg & \end{array}$$

Ainsi, pour connaître la masse d'un volume de 50 cm^3 de fonte, il suffit de remplacer V par sa valeur en dm^3, à savoir 0,05. Donc $0,05.7,2\ kg =$ 0,36 kg.

Ce raisonnement est une application de la méthode de réduction à l'unité (voir plus loin).

14.2 Proportions

Considérons un terrain rectangulaire ayant 3 km de longueur et 2 km de largeur qui doit être représenté sur une carte à l'échelle $\frac{1}{40.000}$. Quelles seront les dimensions de ce rectangle sur la carte ?

Les côtés du rectangle tracé sur la carte doivent être 40.000 fois plus petits que les côtés du terrain considéré.

Si L et l sont les dimensions réelles du terrain, si L' et l' sont les dimensions du rectangle dessiné sur la carte, on aura

$$\begin{array}{ccc} L = 3km & \text{et} & L' = \frac{3km}{40000} = 7,5cm \\ l = 2km & \text{et} & l' = \frac{2km}{40000} = 5cm \end{array}$$

De plus,

$$\frac{L}{l} = \frac{L'}{l'}$$

Cette égalité de deux rapports est une proportion.

On peut dire aussi que L et l sont directement proportionnelles respectivement à L' et l'.

Par définition, on peut donc dire qu'une proportion est une égalité de deux rapports.

D'une manière générale, une proportion s'écrit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ où a et d sont les *extrêmes*, b et c sont les *moyens*.

Dans une proportion, nous pouvons toujours remplacer le rapport de 2 grandeurs de même espèce par le rapport des mesures de ces grandeurs rapportées à une même unité ($\frac{km}{km}$, $\frac{cm^2}{cm^2}$, $\frac{kg/m^3}{kg/m^3}$, ...). Nous pouvons donc supposer qu'une proportion est sans dimensions.

14.2.1 Théorème fondamental

Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a.d}{b.d} = \frac{c.b}{d.b} \Leftrightarrow ad = cb$$

Dès lors, pour vérifier que 4 nombres forment une proportion, il suffit de s'assurer que le produit de deux d'entre eux est égal au produit des deux autres : si on a $ad = cb$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Exemples

1. Quel est le nombre x tel que $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$?

   On a $\frac{x}{4} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = 4.\frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{20}{3}$.

2. Quel est le nombre tel que $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$?

   On a $4.9 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{36} \Leftrightarrow x = 6$

   Remarquons que x est la *moyenne géométrique* de 4 et 9.

14.2.2 Propriétés

Dans toute proportion,

1. on peut intervertir l'ordre des moyens, des extrêmes et permuter les moyens avec les extrêmes. Il vient les 8 propositions équivalentes :
$$\begin{array}{ccccccccc} & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \Leftrightarrow & \frac{a}{c} = \frac{b}{d} & \Leftrightarrow & \frac{d}{b} = \frac{c}{a} & \Leftrightarrow & \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow & \frac{c}{d} = \frac{a}{b} & \Leftrightarrow & \frac{b}{d} = \frac{a}{c} & \Leftrightarrow & \frac{c}{a} = \frac{d}{b} & \Leftrightarrow & \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \end{array}$$
2. on peut multiplier un des extrêmes et un des moyens par un même nombre. Il vient les propositions équivalentes :
$$\begin{array}{ccccc} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \Leftrightarrow & \frac{a.m}{b.m} = \frac{c}{d} & \Leftrightarrow & \frac{a}{b} = \frac{c.m}{d.m} \\ & \Leftrightarrow & \frac{a.m}{b} = \frac{c.m}{d} & \Leftrightarrow & \frac{a}{b.m} = \frac{c}{d.m} \end{array}$$
3. la somme ou la différence de deux termes particuliers est proportionnelle à la somme ou la différence de deux autres termes particuliers. Il vient les propositions équivalentes :
$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \Leftrightarrow & \frac{a\pm b}{b} = \frac{c\pm d}{d} & \Leftrightarrow & \frac{a\pm b}{a} = \frac{c\pm d}{c} & \Leftrightarrow & \frac{a}{b\pm a} = \frac{c}{d\pm c} & \Leftrightarrow & \frac{b}{b\pm a} = \frac{d}{d\pm c} \\ & \Leftrightarrow & \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} & \Leftrightarrow & \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} & \Leftrightarrow & \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} & \Leftrightarrow & \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \end{array}$$
4. si l'on divise, multiplie deux proportions terme à terme, les quotients obtenus sont proportionnels. On a
$$\begin{array}{ccccc} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et } \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} & \Leftrightarrow & \frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'} = \frac{c}{d}\cdot\frac{c'}{d'} & \Leftrightarrow & \frac{aa'}{bb'} = \frac{cc'}{dd'} \\ & \Leftrightarrow & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a'}{b'}} = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{c'}{d'}} & \Leftrightarrow & \frac{\frac{a}{a'}}{\frac{b}{b'}} = \frac{\frac{c}{c'}}{\frac{d}{d'}} \end{array}$$
5. si deux rapports sont proportionnels, leurs exposants de même degré sont proportionnels. On a
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$$

Exercice

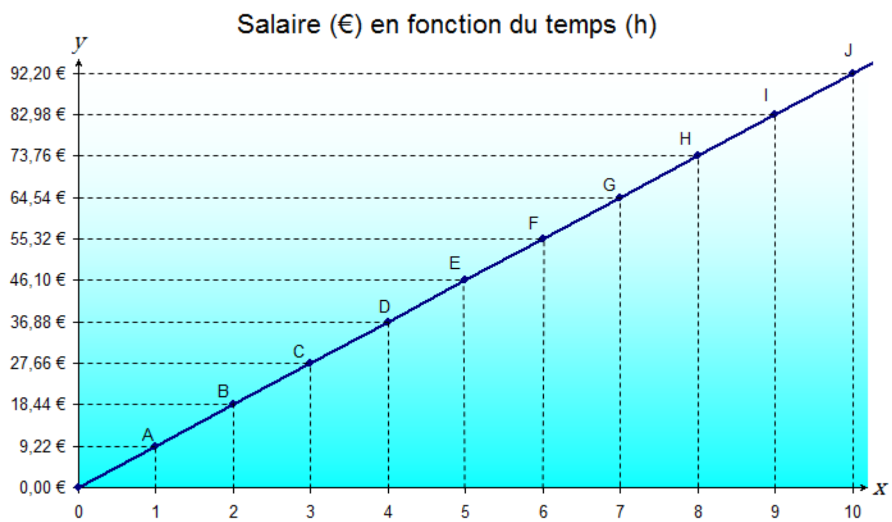
A titre d'exercice, vérifiez les propositions ci-dessus avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 6$, $a' = 5$, $b' = 7$, $c' = 10$, $d' = 14$, $m = n = 2$.

Chapitre 15

Grandeurs proportionnelles

15.1 Grandeurs directement proportionnelles

Un ambulancier gagne 9,22 e à l'heure (cette profession est très mal rémunérée). Etablissons le graphique des variations de son salaire au cours d'une journée de travail.



Pour obtenir ce graphique, nous avons tracé deux demi-droites Ox et Oy, qu'on appellera l'axe x (abscisse) et l'axe y (ordonnée).

La durée d'une heure est représentée sur l'axe x par un segment d'environ 1 cm. Sur l'axe y, une longueur de 0,5 cm environ représente un salaire de 9,22 e.

Le point A est obtenu en élevant la perpendiculaire à Ox à la valeur 1, et la perpendiculaire à Oy à la valeur 9,22. Les points B, C, ... sont obtenus de la même manière.

Le rapport de deux valeurs du nombre d'heures, par exemple 3 heures et 7 heures est de $\frac{3}{7}$. Le rapport correspondant des valeurs du salaire vaut $\frac{27{,}66}{64{,}54}$. Ces rapports sont égaux et l'on a la proportion $\frac{27{,}66}{64{,}54} = \frac{3}{7}$ (n'hésitez pas à vérifier avec une calculette pour vous en convaincre).

On dit que le salaire est **directement proportionnel** au nombre d'heures de travail.

Autres exemples :

- Le prix des patates en vrac au supermarché est directement proportionnel à leur poids. En général, on achète les patates en vrac en e par kg.
- En voiture, à vitesse constante, sans vent et sur terrain plat, la quantité d'essence consommée est directement proportionnelle à la distance parcourue.
- Si la température reste constante, la masse m d'une certaine quantité de liquide est directement proportionnelle à son volume V : $m = \rho.V$ où ρ est la masse volumique du liquide.
- Le volume d'un cylindre, dont l'aire A est constante, est directement proportionnelle à la hauteur h : soit $A = 4\ cm^2$, on a $V = 4.h$
- L'angle α au centre d'un cercle de rayon R est directement proportionnel à la longueur L de l'arc intercepté sur la circonférence : $\alpha\ (rad) = \frac{1}{R}.L$
- Le poids G est directement proportionnel à la masse m : $G = m.g$ où g est l'accélération gravitationnelle.
- ...

En conclusion, on dit que **deux grandeurs G_A et G_B sont directement proportionnelles si le rapport de deux valeurs quelconques de la première est égal au rapport des valeurs correspondantes de l'autre. La valeur de ce rapport est appelée coefficient de proportionnalité.**

On note

$$G_A \propto G_B$$

.

Exemple : si, dans un magasin, le prix des pommes est de 2 euros le kg, il y a proportionnalité entre la somme S à payer et le poids P de pommes achetées, ce que l'on note $S \propto P$.

Le coefficient de proportionnalité est 2.

- Pour 1 kg, on doit payer 2 euros.
- Pour 3 kg, on doit payer 6 euros.
- Pour 1,5 kg, on doit payer 3 euros.

On remarque que le quotient des deux quantités est constant et est égal au coefficient de proportionnalité :

$$\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{3}{1{,}5} = 2$$

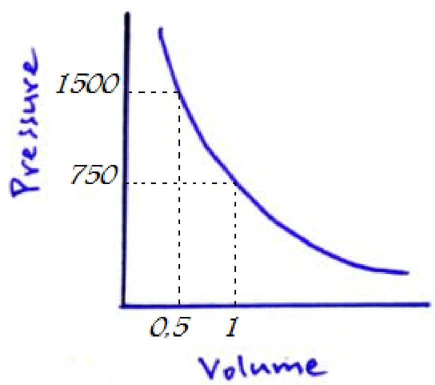
15.2 Grandeurs inversément proportionnelles

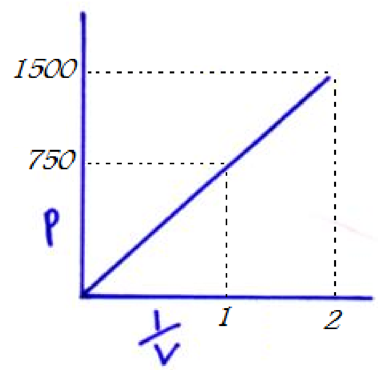
La loi de Boyle-Mariotte (souvent appelée loi de Boyle par les anglophones, loi de Mariotte ou loi de Boyle-Mariotte par les francophones) est une des lois de la thermodynamique du gaz réel. Elle relie la pression et le volume d'un gaz maintenu à température constante. On a la relation $p.V = C^{te}$, autrement dit

$$p = C^{te}.\frac{1}{V}$$

Si nous considérons un volume de 1 m^3 de gaz à la pression de 750 mm_{Hg}, nous pouvons établir les tableaux suivant :

p	V	$p.V = C^{te}$	p	$\frac{1}{V}$
750	1	750	750	$\frac{1}{1} = 1$
1500	$0,5$	750	1500	$\frac{1}{0,5} = 2$
3000	$0,25$	750	3000	$\frac{1}{0,25} = 4$
6000	$0,125$	750	6000	$\frac{1}{0,125} = 8$
		$\vdots$		





Sur le tableau de droite ainsi que sur le graphique de droite, on constate aisément que p est proportionnel à l'inverse du volume $\frac{1}{V}$, autrement dit que p est inversément proportionnel à V

En conclusion, on dit que **deux grandeurs G_A et G_B sont inversément proportionnelles si le produit de deux valeurs quelconques de la première est égal au produit des valeurs correspondantes de l'autre. Ce produit étant constant.**

Exemple : pour parcourir 100 km, le temps est inversément proportionnel à la vitesse :
- à 100 $\frac{km}{h}$, il faut 1 h
- à 50 $\frac{km}{h}$, il faut 2 h
- à 10 $\frac{km}{h}$, il faut 10 h

Leur produit est constant et représente la distance parcourue : 100 $\frac{km}{h}$. 1 h = 50 $\frac{km}{h}$. 2 h = 10 $\frac{km}{h}$. 10 h = 100 km

15.3 Grandeurs liées à plusieurs autres

Une grandeur peut être liée à plusieurs autres. Ainsi, le volume d'un parallélipipède rectangle (boîte à chaussures) dépend de la valeur de trois dimensions : $V = L.l.h$

Lorsqu'on dit qu'une grandeur est proportionnelle à l'une d'elles, on admet que toutes les autres restent constantes.

Par exemple, l'aire d'un triangle est directement proportionnelle à sa base, si la hauteur reste constante : $A = \frac{B.h}{2} = \frac{h}{2}.B$

Autre exemple, le temps nécessaire à creuser une tranchée à la pelle est proportionnelle à la longueur l, la largeur L et la profondeur h de la tranchée.

En effet, supposons qu'il faille 8 heures pour creuser un fossé de 10 m de long, de 3 m de large et de 2 m de profondeur. Combien de temps faudra-t-il pour creuser, dans les mêmes conditions, un fossé de 15 m de long, de 5 m de large et de 1m de profondeur ?

Si t est le nombre d'heures recherché, vis-à-vis de ce qui a été dit dans les chapitres précédents, il est facile de voir que

$$\frac{8}{t} = \frac{10}{15}.\frac{3}{5}.\frac{2}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{t} = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad t = 8.\frac{5}{4}$$

D'où $t = 10h$.

Un peu trop rapide ?

En effet,

- il faut 8 heures pour creuser un fossé tel que $l = 10$, $L = 3$ et $p = 2$.

- Soit $t_{[p=1]}$ le temps mis pour creuser un fossé tel que $l = 10$, $L = 3$ et $p = \mathbf{1}$.
  Donc, on a $\frac{8}{t_{[p=1]}} = \frac{2}{1}$. (a)

- Soit $t_{[L=5,p=1]}$ le temps mis pour creuser un fossé tel que $l = 10$, $L = \mathbf{5}$ et $p = \mathbf{1}$.
  Donc, on a $\frac{t_{[p=1]}}{t_{[L=5,p=1]}} = \frac{3}{5}$. (b)

- Soit $t_{[l=15,L=5,p=1]}$ le temps mis pour creuser un fossé tel que $l = \mathbf{15}$, $L = \mathbf{5}$ et $p = \mathbf{1}$.
  Donc, on a $\frac{t_{[L=5,p=1]}}{t_{[l=15,L=5,p=1]}} = \frac{10}{15}$. (c)

- Notons que $t_{[l=15,L=5,p=1]}$ correspond au temps t recherché.

- En multipliant les égalités (a), (b) et (c) membre à membre, on obtient

$$\frac{8}{t_{[p=1]}}.\frac{t_{[p=1]}}{t_{[L=5,p=1]}}.\frac{t_{[L=5,p=1]}}{t_{[l=15,L=5,p=1]}} = \frac{2}{1}.\frac{3}{5}.\frac{10}{15} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{t_{[l=15,L=5,p=1]}} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad t = 10\ h$$

Par conséquent, si une grandeur variable est proportionnelle à plusieurs autres, le rapport de deux quelconques de ses valeurs est égal au produit des rapports des valeurs correspondantes.

Chapitre 16

Quelques méthodes de résolution des problèmes

Un terrain vaut 4620 e et sa superficie est de 481,25 m^2. Quel est le prix au mètre carré de ce terrain ?

On peut résoudre un problème par deux méthodes générales : la méthode analytique et la méthode synthétique.

La **méthode analytique** consiste à substituer au problème donné une série d'autres problèmes de plus en plus simples, dont le dernier donne immédiatement la solution du problème posé :
Puisque 481,25 m^2 de terrain valent 4620 e, 1 m^2 vaut 481,25 fois moins. On a donc $\frac{4620}{481{,}25}$ e/m^2.

Les problèmes intermédiaires, par lesquels on passe, doivent être enchaînés deux à deux, du premier au dernier, et satisfaire à des conditions réciproques (sinon le dernier problème pourrait ne pas donner toutes les solutions ou même en fournir des indésirables).

La **méthode synthétique** consiste à partir d'un problème que l'on sait résoudre. De la solution de celui-ci, on déduit celle d'un deuxième et ainsi de suite (si nécessaire) jusqu'à ce qu'on arrive au problème posé, dont on obtient la solution comme conséquence de ceux qui précèdent.

Par exemple, si un terrain vaut 23600 e et possède une superficie de 3257 m^2. Grâce a la résolution analytique précédente, on peut créer la formule suivante : *prix au mètre carré* $= \frac{prix}{superficie} = \frac{23600}{3257}$ e/m^2.

Ceci dit, lorsqu'on ne sait pas de quel problème il faut partir pour remonter au problème proposé, on s'expose à faire infructueusement de nombreux essais (ou erreurs). La méthode synthétique est, dans ce cas, impuissante.

Dès lors, face à un problème qui n'a jamais été rencontré auparavant, la synthèse sert avant tout à exposer la solution du problème, une fois que celle-ci a été trouvée analytiquement.

La méthode analytique constitue donc la méthode générale de résolution. Cependant, les problèmes sont si nombreux et variés qu'il est impossible de donner une règle générale suivant laquelle on peut les décomposer en problèmes simples.

Nous n'étudierons donc que quelques formes particulières de la méthode analytique.

16.1 Méthode algébrique

Beaucoup de problèmes peuvent être résolus par cette méthode. On distingue deux cas.

1. Lorsque le problème ne comporte qu'une seule inconnue, la méthode algébrique consiste à traduire l'énoncé du problème en une égalité ne renfermant que l'inconnue et les données du problème, et à tirer, de cette égalité, la valeur de l'inconnue.

   Par exemple, une solution saline est répartie dans deux récipients. Le premier récipent reçoit 24 ml de plus que les $\frac{3}{8}$ de la quantité totale de solution saline. Le deuxième récipient reçoit les 61 ml qui restent. Quelle est la quantité totale de solution saline ?

   Puisque le premier récipient reçoit 24 ml de plus que les $\frac{3}{8}$ de la quantité totale q, il reste $\frac{5}{8}$ moins 24 ml pour le second qui totalise 61 ml. On a donc l'égalité

   $$\frac{5}{8}.q - 24 = 61 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{8}.q = 24 + 61 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{8}{5}.85 = 136ml$$

2. Lorsqu'un problème comporte plus d'une inconnue, la méthode algébrique consiste à exprimer toutes les inconnues du problème en fonction de l'une d'entre elles, celle-ci étant considérée comme inconnue principale ; ensuite à traduire l'énoncé du problème en une égalité ne renfermant que l'inconnue principale et à tirer de cette égalité la valeur de cette inconnue.
   De la valeur de l'inconnue principale, on déduit celle des autres valeurs.

   Par exemple, quelles sont les dimensions d'une compresse dont le périmètre mesure 40 cm et dont la longueur surpasse la largeur de 4 cm ?

   Le périmètre p étant de 40 cm, la longueur L additionnée de la largeur l valent la moitié du périmètre p. Prenons la largeur comme inconnue principale, nous aurons

   $$\left\{\begin{array}{lcl} L+l & = & p/2 \\ L & = & l+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} L+l & = & 40/2 \\ L & = & l+4 \end{array}\right.$$

   $$\Rightarrow \text{ additionnons membre à membre : } L+l+L = \frac{40}{2}+l+4 \quad \Leftrightarrow \quad 2L = 20+4 \quad \Leftrightarrow \quad L = 12$$

   $$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} L & = & 12 \\ L & = & l+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} L & = & 12 \\ 12 & = & l+4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} L & = & 12cm \\ l & = & 8cm \end{array}\right.$$

16.2 Méthode des proportions

La méthode des proportions (ou des rapports égaux) est appliquée à la résolution de tous les problèmes dont les données et les inconnues aboutissent à une ou plusieurs égalités de rapports. On déduit les inconnues de ces rapports égaux en s'appuyant sur la théorie des proportions.

Parmi ces problèmes figurent les problèmes de la règle de trois, les problèmes de partages proportionnels et tous ceux qui se ramènent aux précédents, tels que les problèmes d'intérêt, de mélange, de partage, de dilution, ...

16.2.1 La règle de 3

La règle de trois est un problème dans lequel, connaissant les valeurs simultanées de plusieurs grandeurs directement ou inversément proportionnelles à l'une d'elles, on demande de trouver la valeur de l'une de ces grandeurs quand on donne de nouvelles valeurs à toutes les autres.

Le nom de règle de trois vient de ce que les problèmes, où l'on considère des grandeurs directement ou inversément proportionnelles peuvent se résoudre à l'aide d'une ou plusieurs proportions, dans chacune desquelles trois termes sont connus.

La règle de trois est dite *composée* lorsqu'elle s'applique à plus de deux grandeurs. Elle se résout alors par plusieurs proportions.

Exemples :

1. **Règle de trois directe.**

   Un avion a accompli un trajet de 480 km en 3 h. Quelle distance pourra-t-elle effectuer en 7 h ?

   Disposons les données comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} & 3\ h & \longleftrightarrow & 480\ km & \\ \times\frac{7}{3}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{7}{3} \\ & 7\ h & \longleftrightarrow & x\ km & \end{array}$$

   On tire $x = \frac{7}{3}.480\ km = 1120\ km$.

2. **Règle de trois inverse.**

   Il faut 5 h à 32 frelons asiatiques pour décimer une ruche d'abeilles. Combien d'heures faudra-t-il à 40 frelons asiatiques pour décimer la même ruche ?

Il est évident que plus il y aura de frelons, plus vite la ruche sera décimée. Dès lors, le temps est inversément proportionnel au nombre de frelons.

Disposons les données comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} & 32 & \longleftrightarrow & 5\ h & \\ \times\frac{40}{32}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{1}{\frac{40}{32}}=\frac{32}{40} \\ & 40 & \longleftrightarrow & x\ h & \end{array}$$

On tire $x = \frac{32}{40}.5\ h = 4\ h$.

3. **Règle de trois composée.**

   15 ouvriers ont construit 84 km de route en 63 j. Combien faudra-t-il de temps à 9 ouvriers pour terminer les 108 km restants ?

   Découpons le problème :

   (a) Combien faudrait-il de temps à ces 15 ouvriers pour terminer les 108 km restants ? (directement proportionnel)

   $$\begin{array}{ccccc} & 84 & \longleftrightarrow & 63\ j & \\ \times\frac{108}{84}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{108}{84} \\ & 108 & \longleftrightarrow & y\ j & \end{array}$$

   Donc $y = \frac{108}{84}.63 = 81\ j$.

   (b) Combien faudrait-il de temps à 9 ouvriers pour construire ces 108 km ? (inversément proportionnel)

   $$\begin{array}{ccccc} & 15 & \longleftrightarrow & 81\ j & \\ \times\frac{9}{15}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{1}{\frac{9}{15}}=\frac{15}{9} \\ & 9 & \longleftrightarrow & x\ j & \end{array}$$

   Donc $x = \frac{15}{9}.81 = 135\ j$.

Dès lors, vu que $x = \frac{108}{84}.\frac{15}{9}.63$, on peut déduire la règle suivante : **pour obtenir la valeur de l'inconnue dans une règle de trois, on multiplie le nombre qui est de la même espèce que cette inconnue par le rapport direct des quantités directement proportionnelles, et par le rapport inverse des quantités inversément proportionnelles.**

16.2.2 Partages proportionnels

1. **Partage proportionnel direct.**

Trois communes rurales doivent, en raison directe de leur population, intervenir dans les frais d'entretien d'un cours d'eau. Ces frais s'élèvent à 12500 e. Quelle est le montant à payer par chacune si elles ont respectivement 3000, 2000 et 5000 habitants ?

Représentons les montants inconnus par x, y et z. Nous avons les relations

$$x + y + z = 12500 \text{ et } \frac{x}{3000} = \frac{y}{2000} = \frac{z}{5000}$$

Etant donné que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, nous pouvons donc écrire que

$$\frac{x}{3000} = \frac{y}{2000} = \frac{z}{5000} = \frac{x+y+z}{3000+2000+5000} = \frac{12.500}{10.000}$$

Dès lors, il vient

$$\begin{array}{lcl} \frac{x}{3000} = \frac{12500}{10000} & \Rightarrow & x = 3000.\frac{12500}{10000} = 3750 \ e \\ \frac{y}{2000} = \frac{12500}{10000} & \Rightarrow & y = 2000.\frac{12500}{10000} = 2500 \ e \\ \frac{z}{5000} = \frac{12500}{10000} & \Rightarrow & z = 5000.\frac{12500}{10000} = 6250 \ e \end{array}$$

En disposant les données comme précédemment, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccc} & 3000+2000+5000 = 10000 \ \text{hab} & \longleftrightarrow & 12500 \ e & \\ \times\frac{3000}{10000}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{3000}{10000} \\ & 3000 \ \text{hab} & \longleftrightarrow & x \ km & \end{array}$$

On tire par exemple

$$x = 3000.\frac{12500}{10000} = 3750 \ e$$

2. **Partage proportionnel inverse.**

Une propriété de 42,5 ha est formée de trois lots dont les surfaces sont inversément proportionnelles à l'âge des trois enfants héritiers qui ont respectivement 10, 8 et 5 ans. Quelle est la superficie de chaque lot ?

Représentons les superficies inconnues par x, y et z. Nous avons les relations

$$x + y + z = 42,5 \text{ et } x.10 = y.8 = z.5$$

Etant donné que $ab = \frac{a}{\frac{1}{b}}$, nous pouvons donc écrire que

$$\frac{x}{\frac{1}{10}} = \frac{y}{\frac{1}{8}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}} = \frac{42,5}{0,1+0,125+0,2}$$

Dès lors, il vient

$$\begin{array}{lcl} \frac{x}{\frac{1}{10}} = \frac{42{,}5}{0{,}425} & \Rightarrow & x = \frac{1}{10}.\frac{42{,}5}{0{,}425} = 10 \ ha \\ \frac{y}{\frac{1}{8}} = \frac{42{,}5}{0{,}425} & \Rightarrow & y = \frac{1}{8}.\frac{42{,}5}{0{,}425} = 12,5 \ ha \\ \frac{z}{\frac{1}{5}} = \frac{42{,}5}{0{,}425} & \Rightarrow & z = \frac{1}{5}.\frac{42{,}5}{0{,}425} = 20 \ ha \end{array}$$

En disposant les données comme précédemment, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5} & \longleftrightarrow & 42,5 \ ha & \\ \times\frac{0{,}1}{0{,}425}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{0{,}1}{0{,}425} \\ & \frac{1}{10} & \longleftrightarrow & x \ km & \end{array}$$

On tire par exemple

$$x = 42,5.\frac{0,1}{0,425} = 10\ ha$$

3. **Partage proportionnel composé.**

Un budget de 156250 e est alloué entre trois universités en raison directe du nombre d'étudiants et en raison inverse du coût de l'inscription. La première université a 500 étudiants et 160 e par inscription. La deuxième a 1000 étudiants et 400 e par inscription. La troisième a 1200 étudiants et 120 e par inscription.
Quelle est la part du budget de 156250 e alloué à chaque université ?

Représentons les montants inconnus par x, y et z. Nous avons les relations

$$x + y + z = 156250 \text{ et } \frac{x}{500}.160 = \frac{y}{1000}.400 = \frac{z}{1200}.120$$

Etant donné que $ab = \frac{a}{\frac{1}{b}}$, nous pouvons donc écrire que

$$\frac{x}{\frac{500}{160}} = \frac{y}{\frac{1000}{400}} = \frac{z}{\frac{1200}{120}} = \frac{x+y+z}{\frac{500}{160}+\frac{1000}{400}+\frac{1200}{120}} = \frac{156.250}{3,125+2,5+10}$$

Dès lors, il vient

$$\begin{array}{lcl} \frac{x}{\frac{500}{160}} = \frac{156250}{15,625} & \Rightarrow & x = \frac{500}{160}\cdot\frac{156250}{15,625} = 31.250\ e \\ \frac{y}{\frac{1000}{400}} = \frac{156250}{15,625} & \Rightarrow & y = \frac{1000}{400}\cdot\frac{156250}{15,625} = 25.000\ e \\ \frac{z}{\frac{1200}{120}} = \frac{156250}{15,625} & \Rightarrow & z = \frac{1200}{120}\cdot\frac{156250}{15,625} = 100.000\ e \end{array}$$

Etant donné que $x = \frac{156250}{\frac{500}{160}+\frac{1000}{400}+\frac{1200}{120}}\cdot\frac{500}{160}$, on peut déduire la règle suivante : **pour partager un nombre en parties proportionnelles à des nombres données, on divise le nombre à partager par la somme des autres, et l'on multiplie séparément le quotient obtenu par chacun de ces nombres.**

En disposant les données comme précédemment, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{500}{160}+\frac{1000}{400}+\frac{1200}{120} & \longleftrightarrow & 156250€ & \\ \times\frac{3,125}{15,625}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{3,125}{15,625} \\ & \frac{500}{160} & \longleftrightarrow & x\ e & \end{array}$$

On tire par exemple

$$x = 156250.\frac{3,125}{15,625} = 31.250\ e$$

16.3 Méthode de réduction à l'unité

La méthode de réduction à l'unité est surtour appliquée à la résolutin de problèmes de la règle de trois, des problèmes de partages proportionnels et, évidemment, de tous ceux qui se ramènent à ces questions.

16.3.1 La règle de 3

Dans les problèmes de la règle de trois, la méthode de réduction à l'unité consiste à rechercher la valeur d'une grandeur de même espèce que l'inconnue, quand on donne à chacune des autres grandeurs du problème la valeur 1, puis d'en déduire la valeur de l'inconnue, quand les autres grandeurs prennent les valeurs données correspondantes à cette inconnue.

Exemples :

1. **Règle de trois directe.**

   Un avion a accompli un trajet de 480 km en 3 h. Quelle distance pourra-t-elle effectuer en 7 h ?

   Disposons les données comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} & 3\ h & \longleftrightarrow & 480\ km & \\ \times\frac{1}{3}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{1}{3} \\ & 1\ h & \longleftrightarrow & 160\ km & \\ \times 7\downarrow & & & & \downarrow\times 7 \\ & 7\ h & \longleftrightarrow & 1120\ km & \end{array}$$

2. **Règle de trois inverse.**

   Il faut 5 h à 32 frelons asiatiques pour décimer une ruche d'abeilles. Combien d'heures faudra-t-il à 40 frelons asiatiques pour décimer la même ruche ?

   Il est évident que plus il y aura de frelons, plus vite la ruche sera décimée. Dès lors, le temps est inversément proportionnel au nombre de frelons.

   Disposons les données comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} & 32 & \longleftrightarrow & 5\ h & \\ \times\frac{1}{32}\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{1}{\frac{1}{32}}=32 \\ & 1 & \longleftrightarrow & 160\ h & \\ \times 40\downarrow & & & & \downarrow\times\frac{1}{40} \\ & 40 & \longleftrightarrow & 4\ h & \end{array}$$

3. **Règle de trois composée.**

15 ouvriers ont construit 84 km de route en 63 j. Combien faudra-t-il de temps à 9 ouvriers pour terminer les 108 km restants ?

Disposons les données comme suit :

$$\begin{array}{rcccccll}
 & 84 & \longleftrightarrow & 15 & \longleftrightarrow & 63\ j & & \\
\times\frac{1}{84}\downarrow & & & & & & \downarrow\times\frac{1}{84} & \text{(directement proportionnel)} \\
 & 1 & \longleftrightarrow & 15 & \longleftrightarrow & \frac{3}{4}\ j & & \\
\times\frac{1}{15}\downarrow & & & & & & \downarrow\times 15 & \text{(inversement proportionnel)} \\
 & 1 & \longleftrightarrow & 1 & \longleftrightarrow & \frac{45}{4}\ j & & \\
\times 108\downarrow & & & & & & \downarrow\times 108 & \text{(directement proportionnel)} \\
 & 108 & \longleftrightarrow & 1 & \longleftrightarrow & 1215\ j & & \\
\times 9\downarrow & & & & & & \downarrow\times\frac{1}{9} & \text{(inversement proportionnel)} \\
 & 108 & \longleftrightarrow & 9 & \longleftrightarrow & 135\ j & &
\end{array}$$

16.3.2 Partages proportionnels

Lorsqu'il s'agit de partager un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés, la méthode de réduction à l'unité consiste à rechercher ce que seraient ces parties si le nombre à partager était 1, puis à déterminer ce que ces parties deviennent lorsqu'on revient au nombre proposé.

1. **Partage proportionnel direct.**

   Trois communes rurales doivent, en raison directe de leur population, intervenir dans les frais d'entretien d'un cours d'eau. Ces frais s'élèvent à 12500 e. Quelle est le montant à payer par chacune si elles ont respectivement 3000, 2000 et 5000 habitants ?

   Si le montant à partager était de 3000+2000+5000 e, il est évident que les trois montants seraient respectivement de 3000, 2000 et 5000 e.

   Donc, si le montant à partager était de 1 e, chaque partie serait de $\frac{3000}{10000}.1 = 0,3$, $\frac{2000}{10000}.1 = 0,2$ et $\frac{5000}{10000}.1 = 0,5\ e$.

   Etant donné que le montant à partager est de 12500 e, nous pouvons donc écrire que

$$\begin{array}{lcl}
x = 0,3.12500 & \Rightarrow & x = 3750\ e \\
y = 0,2.12500 & \Rightarrow & y = 2500\ e \\
z = 0,5.12500 & \Rightarrow & z = 6250\ e
\end{array}$$

2. **Partage proportionnel inverse.**

   Une propriété de 42,5 ha est formée de trois lots dont les surfaces sont inversément proportionnelles à l'âge des trois enfants héritiers qui ont respectivement 10, 8 et 5 ans. Quelle est la superficie de chaque lot ?

Ce problème peut être exprimé comme un partage proportionnel direct en considérant que les surfaces des lots sont « directement proportionnelles à l'inverse de l'âge » des trois enfants.

Donc, si la superficie à partager était de 1 ha, la première partie serait de $\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}}.1 = \frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}125+0{,}2} = \frac{100}{4125}$ ha, la deuxième de $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}}.1 = \frac{0{,}125}{0{,}1+0{,}125+0{,}2} = \frac{125}{4125}$ ha et la troisième $\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}}.1 = \frac{0{,}2}{0{,}1+0{,}125+0{,}2} = \frac{200}{4125}$ ha.

Etant donné que la superficie à partager est de 42,5 ha, nous pouvons donc écrire que

$$\begin{array}{lcc} x = \frac{100}{4125}.42,5 & \Rightarrow & x = 10\ ha \\ y = \frac{125}{4125}.42,5 & \Rightarrow & y = 12,5\ ha \\ z = \frac{200}{4125}.42,5 & \Rightarrow & z = 20\ ha \end{array}$$

3. **Partage proportionnel composé.**

Un budget de 156250 e est alloué entre trois universités en raison directe du nombre d'étudiants et en raison inverse du coût de l'inscription. La première université a 500 étudiants et 160 e par inscription. La deuxième a 1000 étudiants et 400 e par inscription. La troisième a 1200 étudiants et 120 e par inscription.
Quelle est la part du budget de 156250 e alloué à chaque université ?

Ce problème peut être exprimé comme un partage proportionnel direct en considérant que les montants sont « directement proportionnels au nombre d'étudiants et à l'inverse du coût de l'inscription ».

Donc, si le montant à partager était de 1 e, la première partie serait de $\frac{\frac{500}{160}}{\frac{500}{160}+\frac{1000}{400}+\frac{1200}{120}}.1 = \frac{3{,}125}{15{,}625} = 0,20\ e$, la deuxième de $\frac{\frac{1000}{400}}{\frac{500}{160}+\frac{1000}{400}+\frac{1200}{120}}.1 = \frac{2{,}5}{15{,}625} = 0,16\ e$ et la troisième $\frac{\frac{1200}{120}}{\frac{500}{160}+\frac{1000}{400}+\frac{1200}{120}}.1 = \frac{10}{15{,}625} = 0,64\ e$.

Dès lors, il vient

$$\begin{array}{lcc} x = 0,20.156250 & \Rightarrow & x = 31250\ e \\ y = 0,16.156250 & \Rightarrow & y = 25000\ e \\ z = 0,64.156250 & \Rightarrow & z = 100000\ e \end{array}$$

16.4 Méthode de la règle conjointe

La règle conjointe a pour but de déterminer la valeur de telle espèce de grandeur pour une quantité donnée d'une autre grandeur lorsqu'on ne connaît pas le rapport immédiat entre ces grandeurs mais qu'on connaît le rapport de grandeurs intermédiaires.

Par exemple, une perfusion de 1,44 litres de solution glucosée doit couler en 24 heures. Quel sera le débit de la perfusion (en gouttes/minute) sachant que 1 ml = 20 gouttes ?

On sait que 60 min correspondent à 1 h, qu'en 24 h coule 1,44 L, que 1 L correspond à 1000 ml et que 1 ml correspond à 20 gouttes.

Disposons les données comme suit

Temps (min)	Temps (h)	Capacité(L)	Capacité(mL)	Gouttes
60	1			
	24	$1,44$		
		1	1000	
			1	20
60.24				x

Donc, on a 24.60 = 1440 min qui correspondent à 1,44 L = 1,44.1000 ml = 20.1,44.1000 gouttes. Dès lors, le débit sera de $\frac{20.1,44.1000}{24.60} = 20$ gouttes/min.

16.5 Autres méthodes

16.5.1 Méthode rétrograde

Lorsque, dans un problème, on donne le résultat final de plusieurs opérations successives, il y a parfois moyen de remonter de proche en proche jusqu'à la valeur primitive demandée.

Par exemple, l'indice branquignol d'un patient atteint d'une certaine pathologie augmente chaque jour de $\frac{2}{5}$ de sa valeur. A la fin de la journée, le patient gobe un cachet qui fait chuter le branquignol de 50 unités. A la fin du 3^e jour suivant sa prise en charge par une équipe médicale, la mesure du branquignol du patient affiche encore 56,4 unités après avoir pris son cachet. Combien d'unités avait-il en arrivant à l'hôpital ?

Puisqu'en un jour le patient augmente son indice de $\frac{2}{5}$, à la fin de la journée l'indice sera de $\frac{7}{5}$ de ce qu'il était au début de la journée. Par la suite, au commencement de la journée suivante, l'indice sera de $\frac{5}{7}$ de ce qu'il sera en fin de journée. On a donc

1. A la fin de la 3^e journée, le patient affiche 54,4 unités. Avant de prendre son cachet, il avait 56,4+50 = 106,4 unités.

   Au commencement de la 3^e journée, il avait $\frac{5}{7}.106,4 = 76,0$ unités.

2. A la fin de la 2^e journée, le patient affiche 76,0 unités. Avant de prendre son cachet, il avait 76,0+50 = 126,0 unités.

   Au commencement de la 2^e journée, il avait $\frac{5}{7}.126,0 = 90,0$ unités.
3. A la fin de la 1^e journée, le patient affiche 90,0 unités. Avant de prendre son cachet, il avait 90,0+50 = 140,0 unités.

   Au commencement de la 1^e journée (à l'admission), il avait $\frac{5}{7}.140,0 = 100,0$ unités.

16.5.2 Méthode des hypothèses

Lorsque, dans la solution d'un problème, on peut donner une valeur arbitraire à l'inconnue, ou à l'une des inconnues et faire sur cette valeur toutes les opérations qui ont été faites sur l'inconnue elle-même, on ramène parfois le problème proposé à un autre, beaucoup plus simple, se résolvant habituellement par une règle de trois.

Les problèmes de partages proportionnels peuvent notamment être résolus par cette méthode.

Par exmple, trois communes rurales doivent, en raison directe de leur population, intervenir dans les frais d'entretien d'un cours d'eau. Ces frais s'élèvent à 12500 e. Quelle est le montant à payer par chacune si elles ont respectivement 3000, 2000 et 5000 habitants ?

Supposons que la première commune ait à payer 3 e. Dans ce cas, la seconde devra payer 2 e et la troisième devra payer 5 e.

Le montant total sera dès lors de $3 + 2 + 5 = 10$ e.

Si le montant total vaut 12500 e, la première commune devra payer $\frac{3}{10}.12500 = 3750$ e, la seconde $\frac{2}{10}.12500 = 2500$ e, la troisième $\frac{5}{10}.12500 = 6250$ e.

Le cas de l'hypothèse double (ou de fausse position) ne sera pas abordé ici.

16.5.3 Méthode de réduction au même coefficient

Lorsque, dans un problème, la différence entre les résultats de deux additions ou de deux soustractions provient de deux causes seulement, on fait disparaître une de ces causes au moyen de multiplicateurs et diviseurs convenablement choisis, afin de retrouver facilement la valeur d'une inconnue.

Il s'agit en fait de la version concrète de la résolution par combinaisons linéaires d'un système de 2 équations à 2 inconnues. Partant de ce constat, il est facile d'étendre cette méthode aux problèmes assimilables à un système de N équations à N inconnues.

Par exemple, quatre boîtes de compresses et cinq rouleaux de sparadrap se paient 33,04 e. D'autre part, six boîtes et sept rouleaux se paient 47,60 e. Trouvez le prix d'une boîte de compresses et d'un rouleau de sparadrap.

Soit b le prix d'une boîte et r le prix d'un rouleau. On a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 4.b & + & 5.r & = & 33,04 \\ 6.b & + & 7.r & = & 47,60 \end{array}\right.$$

Tâchons d'avoir un terme commun aux deux équations, soit 12 boîtes. Multiplions par 3 la 1^e équation et par 2 la 2^e équation. On a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 12.b & + & 15.r & = & 99,12 \\ 12.b & + & 14.r & = & 95,20 \end{array}\right. \text{ soustrayons membre à membre} \Rightarrow (12-12).b+(15-14).r = 99,12-95,20 \quad \Leftrightarrow \quad r = 3,92$$

Dès lors, pour trouver b, il suffit de procéder de la même manière : par exemple, multiplier par 7 la première équation et par 5 la deuxième, de les soustraire membre à membre et de déduire la valeur de b.

Nous pouvons aussi remplacer la valeur de $r = 3,92$ dans l'une des deux équations primitives et de déduire la valeur de b : par exemple, $4b + 5.3,92 = 33,04 \Leftrightarrow b = \frac{33,04-5.3,92}{4} = 3,36$.

La boîte s'achète donc **3,36** e et le rouleau **3,92** e

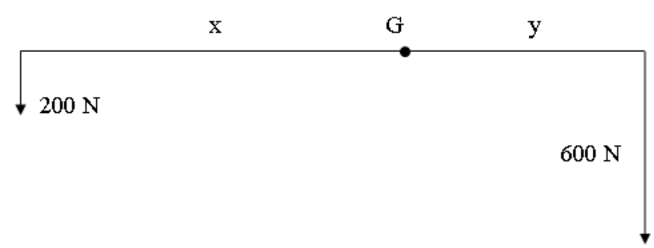
Chapitre 17

Applications particulières des proportions

17.1 Proportions en physique et chimie

17.1.1 Forces parallèles : recherche du centre de gravité

On utilise une planche homogène de 4 m de long pour déterminer le centre de gravité d'une personne. Lorsqu'une personne se trouve sur la planche, les balances, situées aux extrémités de celle-ci indiquent respectivement 200 N et 600 N. Où se trouve le centre de gravité de la personne ?



En se référant à la physique, on peut dire que les parties x et y sont respectivement proportionnelles aux forces de 600 N et 200 N. Dès lors, il vient $\frac{x}{y} = \frac{600}{200}$. De plus, la théorie des proportions nous permet d'écrire que $\frac{x}{x+y} = \frac{600}{600+200}$. Or, $x + y = 4\ m$. On a finalement que $x = 4.\frac{6}{8}$. Le centre de gravité de la personne se situe donc à $x = 3\ m$ du bord gauche de la planche.

17.1.2 Leviers

Un homme de 80 kg ($\approx 800\ N$) place une barre de 2 m de long au-dessous d'une grosse pierre de 420 kg ($\approx 4200\ N$). À quelle distance d maximum de la pierre doit-il placer le point d'appui de son levier s'il veut être capable de la soulever ?

Pour commencer, si d est la distance entre le point d'appui et la pierre, étant donné que la barre fait 2 m de long, alors $(2-d)$ est la distance entre le point d'appui et l'homme.

En se référent à la physique, on peut dire que

$$d.4200 = (2-d).800 \quad \Leftrightarrow \quad d.4200 = 2.800 - d.800 \quad \Leftrightarrow \quad d.(4200+800) = 1600 \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{1600}{5000} = 0,32$$

L'homme devra donc placer son point d'appui à un maximum de 32 cm de la pierre.

17.1.3 Engrenages et poulies

Le nombre de tours accomplis par deux cylindres tournant par frottement (ou reliés par une courroie) sont exprimés par des nombres inversément proportionnels aux rayons de ces cylindres. Il en est de même dans le cas des roues dentées qui s'engrènent (engrenages) ou qui sont reliées par une chaîne.

Si les cylindres ou les roues dentées ont respectivement pour rayon R et R', et si les nombres respectifs de tours, pendant un temps déterminé, sont n et n', on a

$$2\pi Rn = 2\pi R'n'$$

D'où $Rn = R'n'$ et

$$\frac{n}{n'} = \frac{R'}{R}$$

Les nombres de dents des roues, N et N' sont proportionnels aux circonférences, donc aux rayons, et l'on a

$$\frac{N}{N'} = \frac{R}{R'}$$

D'où

$$\frac{n}{n'} = \frac{N'}{N}$$

Par exemple, deux roues d'engrenage ont respectivement 120 et 50 dents. Quel est le nombre de tours accomplis par seconde si la première fait 30 tours par seconde ?

On a $\frac{x}{30} = \frac{120}{50} \quad \Leftrightarrow \quad x = 30.\frac{12}{5} = 72\ tr/s.$

17.1.4 Réactions chimiques

Considérons la réaction chimique

$$Zn + H_2SO_4 \longrightarrow ZnSO_4 + H_2$$

Le zinc, l'hydrogène, le soufre et l'oxygène ont pour masse atomique, respectivement 65, 1, 32 et 16 g/mol.

Dans le cas présent, on en déduit qu'à 65 g de zinc correspond un dégagement de 2 g d'hydrogène.

Par exemple, à 10,4 g de zinc correspondra un dégagement de $10,4.\frac{2}{65} = 0,32$ g d'hygrogène.

17.1.5 Mélanges et alliages : moyenne pondérée

Quelle sera la pureté (exprimée en pourcent) d'un lingot d'or obtenu à partir de 2 g d'un lingot pur à 90% et de 3 g d'un lingot pur à 75% ?

La pureté (pourcentage) sera exprimée comme une **moyenne pondérée** par les masses : $\frac{2.90\%+3.75\%}{2+3} = 81\%$.

Par conséquent, quel est le rapport des quantités qu'on doit prélever sur deux lingots d'or, purs à respectivement 90% et 75%, pour obtenir un lingot d'or pur à 80% ?

Soient x et y les nombres de grammes des quantités prélevées sur les deux lingots. Dans le calcul ci-dessus, x valait 3 g et y valait 2 g. Si l'on applique la formule issue de ce calcul, on a que $0,8 = \frac{x.0,9+y.0,75}{x+y}$.

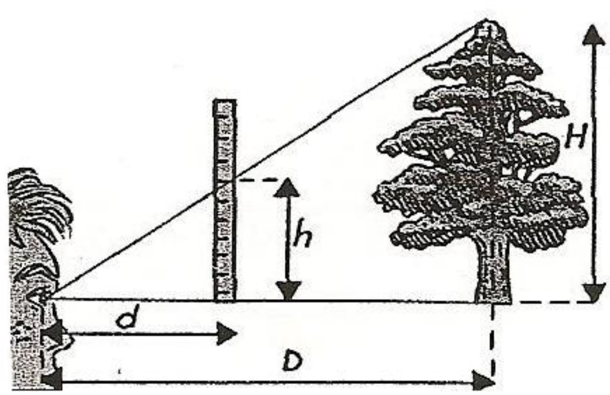
Il vient $0,8.(x+y) = 0,9.x + 0,75.y \quad \Leftrightarrow \quad y.(0,8-0,75) = x.(0,9-0,8) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{y} = \frac{0,8-0,75}{0,9-0,8} = \frac{1}{2}$.

En conclusion, il faudra prélever le double de la masse sur le lingot pur à 90%.

17.2 Proportions en géométrie

17.2.1 Théorème de Thalès

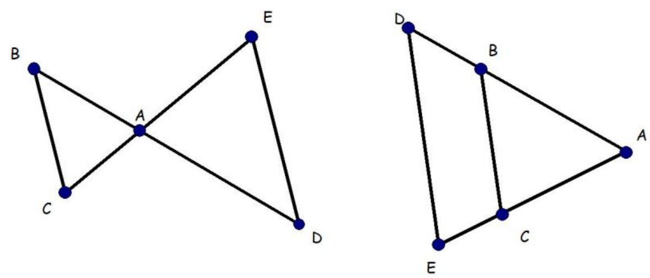
Lorsqu'on cherche à évaluer d'un coup d'oeil la hauteur d'un bâtiment, le cerveau l'applique sans qu'il le connaisse ...



En pratique, le théorème de Thalès permet de calculer des rapports de longueur et de mettre en évidence des relations de proportionnalité en présence de parallélisme. Il s'agit de la « version géométrique des proportions ».

Soit un triangle ABC, et deux points D et E des droites AB et AC de sorte que la droite DE soit parallèle à la droite BC (comme indiqué sur la figure).

Alors on a :



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Le théorème de Thalès présente des proportions égales entre plusieurs grandeurs. Si les segments et les triangles appartiennent à la branche mathématique appelée géométrie, les fractions font partie de l'algèbre. Le fait que le théorème de Thalès offre des égalités sur les fractions en fait une méthode qui s'applique à l'algèbre.

Il est donc possible d'établir toutes les lois régissant le comportement des fractions et par là, les mécanismes qui permettent de venir à bout de toutes les équations du premier degré.

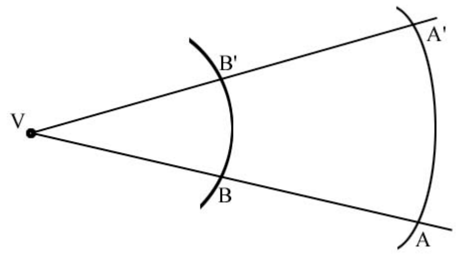
Par exemple, un étudiant voit l'école au bout de la rue. Il sait qu'il lui reste 150 m à parcourir pour arriver au bas de l'entrée principale. Il regarde l'école et se demande quelle peut bien être sa hauteur. En portant sa main au bout de son bras il arrive juste à cacher l'école avec ses 4 doigts boudinés (tous sauf le pouce). Sa main mesure 8 cm et son bras 1 m. Quelle est la hauteur de l'école ?

Prenons la figure de la page précédente (celle avec l'arbre) et attribuons les valeurs 150 m, 1 m et 8 cm (= 0,08 m) à, respectivement, D, d et h. Le théorème de Thalès nous fournit l'égalité suivante :

$$\frac{H}{h} = \frac{D}{d} \quad \Leftrightarrow \quad H = h.\frac{D}{d} \quad \Rightarrow \quad H = 0,08\frac{150}{1} = 12\ m$$

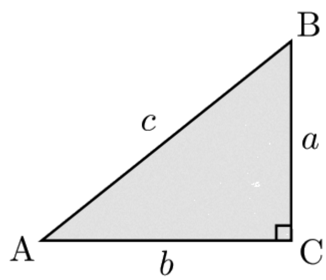
17.2.2 Mesure d'un angle et trigonométrie

Considérons la définition du radian, à savoir : soit un secteur angulaire, formé de deux droites concourantes distinctes, et un cercle de rayon r tracé dans un plan contenant ces deux droites, dont le centre est le point d'intersection des droites. Alors, la valeur de l'angle en radians est le rapport entre la longueur L de l'arc de cercle intercepté par les droites et le rayon r.



Sur cette figure, on peut clairement voir que, quel que soit le rayon, l'angle sera toujours le même car $\frac{|A'A|}{|VA|} = \frac{|B'B|}{|VB|} =$ l'angle exprimé en radians.

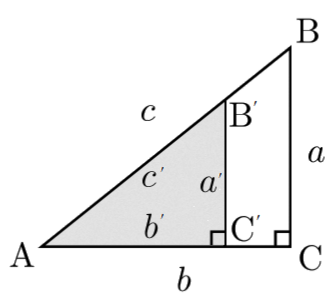
Un constat similaire peut s'établir pour les valeurs trigonométriques d'un angle.



En effet,

$$\sin A = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c} \qquad \cos A = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c} \qquad \tan A = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{a}{b}$$

Remarquons la similitude des proportions présentées ici avec celles du théorème de Thalès. En effet, pour un triangle rectangle $A'B'C'$ de proportions identiques, les angles sont identiques et, par conséquent, les valeurs trigonométriques également.



On a

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \quad \tan A = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

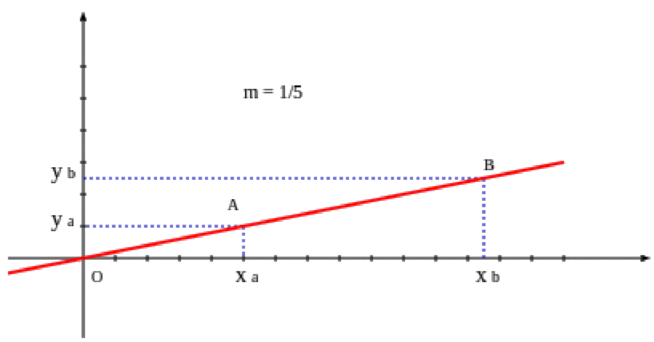
17.3 Proportions en algèbre

17.3.1 Coefficient angulaire

Le coefficient angulaire désigne le coefficient m de l'équation d'une droite, $y = mx + p$. Cette quantité représente la variation de l'ordonnée y lorsque l'abscisse x augmente d'une unité.

(Les droites parallèles à Oy, exclues de cette définition, sont à considérer comme un cas particulier.)

La pente d'une droite (non parallèle à l'axe Oy) correspond au rapport entre la variation de y et la variation correspondante de x. Cela correspond donc également à la tangente de l'angle que fait la droite avec l'axe Ox. L'axe Ox étant interprété comme l'axe horizontal, la pente représente le rapport entre la distance verticale et la distance horizontale lorsqu'on suit le mouvement d'un point sur la droite. Cette pente peut par exemple être exprimée par un pourcentage : une pente de 20 % correspond par exemple à un coefficient angulaire de $\frac{1}{5}$ pour lequel, « si x avance de 1, y monte de $\frac{1}{5}$ » (ou encore, si « x avance de 5, y monte de 1 »).



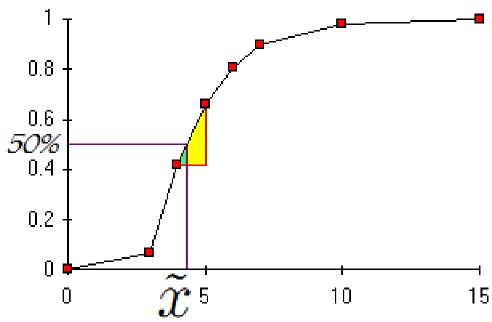
Si la droite n'est pas parallèle à l'axe Oy, et si l'on connaît deux points distincts $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, le coefficient angulaire m de cette droite vaut :

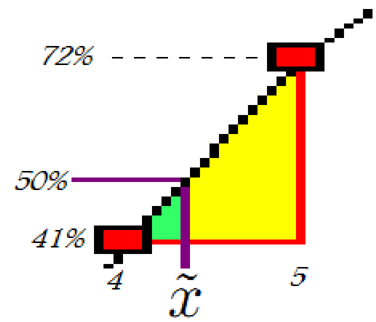
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

17.3.2 Calcul d'une médiane en statistiques

La médiane est la valeur du caractère statistique qui coupe la population en deux populations de taille égale. Sur le polygone cumulatif, il s'agit de l'abscisse du point dont l'ordonnée, qui est la fréquence cumulée, vaut 50 %.

Dans le schéma ci-dessous, Si nous interprétons la figure de droite comme deux triangles semblables, on constate que, pour passer de 41 % à 72 % en suivant y (à savoir un gain de 31 %), x est passé de 4 à 5 (à savoir un gain de 1). Dès lors, que vaut la valeur $\tilde{x}$ correspondant à 50 % ?



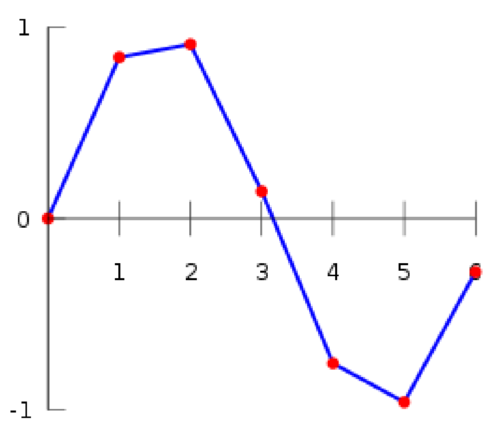


Nous avons que

$$\frac{72-41}{5-4} = \frac{50-41}{\tilde{x}-4} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x}-4 = (5-4).\frac{50-41}{72-41} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x} = 4+1.\frac{9}{31} \approx 4,29$$

17.3.3 Interpolation linéaire : déduire une 3^{e} valeur située entre 2 couples de valeurs

L'interpolation linéaire est la méthode la plus simple pour estimer la valeur prise par une fonction continue entre deux points déterminés (interpolation). Elle consiste à utiliser pour cela la fonction de la forme $f(x) = mx + b$ passant par les deux points déterminés.



Si nous souhaitons déterminer $f(2,5)$ alors que l'on connaît les valeurs de $f(2) = 0,9093$ et $f(3) = 0,1411$, cette méthode consiste à prendre la moyenne des deux valeurs sachant que 2,5 est le milieu des deux points. On obtient par conséquent $f(2,5) \approx \frac{0,9093+0,1411}{2} = 0,5252$.

Comme dans le cas de la médiane, imaginons maintenant que nous cherchions à déterminer une valeur qui n'est pas située exactement entre deux valeurs connues. Par exemple, cherchons à estimer $f(2,1)$. Or

2,1 est « situé » à 0,1 de 2 et à 0,9 de 3. Dès lors, le « poids » de 2 sera plus important que le « poids » de 3 et, en considérant une moyenne pondérée où le poids est inversément proportionnel à la « distance », il vient $f(2,1) \approx \frac{0,9.0,9093+0,1.0,1411}{0,9+0,1} = 0,83248$.

17.4 Divers

17.4.1 Partage des bénéfices

La règle de société a pour but de partager entre plusieurs associés les banafices ou les pertes qui résultent d'une entreprise commune.

Pa exemple, deux associés ont investi dans une entreprise. Le premier 84000 e, le deuxième 75000 e et le troisième 90000 e. Ils ont fait un bénéfice de 34860 e. Quel sera la part de chaque associé ?

Sachant qu'à eux trois ils ont investi un total de 249000 e, en appliquant le principe des partages proportionnels composés, il vient que

- la part du 1^{er} sera de $\frac{84000}{249000}.34860 = 11760\ e$
- la part du 2^{e} sera de $\frac{75000}{249000}.34860 = 10500\ e$
- la part du 3^{e} sera de $\frac{90000}{249000}.34860 = 12600\ e$.

17.4.2 Application des proportions en cuisine

Gâteau au chocolat d'étudiant pour 4 solides mangeurs :

- Faire fondre à feu très doux 250 g de chocolat noir (une tablette + 2 barres).
- Toujours à feu très doux, faire fondre 125 g de beurre ($\frac{1}{2}$ paquet) dans le chocolat.
- Obtenir un mélange homogène.
- Ajouter 6 cuillères à soupe de sucre (150 g) et mélanger.
- Ecraser un paquet de petits beurres (300 g) et les ajouter au mélange.
- Couper le feu.
- Ajouter un capuchon de rhum (ou improvisez si vous n'êtes pas un vrai pirate).
- Battre un oeuf et l'incorporer au mélange.
- Mettre le mélange dans un moule et hop, directement au frigo le temps qu'il refroidisse.

Comment adapter cette recette pour qu'elle convienne à 8 personnes ? Et à 3 personnes ?

Chapitre 18

Exercices

18.1 Rapports et proportions

Exercice 1

Représentez le rapport des longueurs de deux sparadraps, l'un de 10 cm, l'autre de 8 cm. Que devient la valeur de ce rapport si l'on

1. augmente de 2 cm chacun des deux sparadraps ?
2. diminue de 2 cm chacun des deux sparadraps ?
3. diminue de 5 cm le premier sparadrap et de 4 cm le deuxième sparadrap ?
4. diminue de 5 cm le premier sparadrap uniquement ?
5. multiplie par 2 chacun des deux sparadraps ?
6. divise par 2 le premier sparadrap uniquement ?

Exercice 2

Le rapport de deux longueurs est de 1,7. La première longueur mesure 204 mm. Que vaut la seconde ?

Exercice 3

Le rapport des capacités de deux réservoirs est de $\frac{17}{7}$. Le second mesure 658 dm^3. Quelle est la capacité du premier ?

Exercice 4

Cherchez la valeur de x :

$$\frac{x}{6} = \frac{9}{18} \quad ; \quad \frac{21}{x} = \frac{6}{2} \quad ; \quad \frac{4}{3} = \frac{x}{6} \quad ; \quad \frac{12}{15} = \frac{4}{x} \quad ; \quad \frac{20}{10} = \frac{5}{x}$$

Exercice 5

D'après la proportion $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, combien de fois a est-il contenu dans b ?

Exercice 6

Comment écririez-vous, sous forme de proportion,

1. que a contient 3 fois b ?
2. que a vaut les $\frac{3}{7}$ de b ?
3. que a est contenu 3 fois dans b ?

Trouvez ces deux nombres sachant que leur somme vaut 204.

Exercice 7

Sur une population de 11 millions d'habitants, 11.000 sont recensées séropositives fin 2012, calculez le taux de prévalence pour cette même année. Au 30 juin 2013, 550 nouveaux cas ont été dépistés et 50 séropositifs de l'année 2012 sont décédés. Calculez le taux d'incidence (proportion de nouveaux cas) au 30 juin 2013.

18.2 Règle de trois simple

Exercice 1

En 4 tours, une vis avance de 1,5 mm. De combien avancera-t-elle si elle fait 84 tours de plus ?

Exercice 2

Quelle est la hauteur d'un bâtiment dont l'ombre est portée à 37,8 m de longueur, sachant qu'un poteau de 3,5 m planté verticalement, donne une ombre de 2 m ?

Exercice 3

Les températures de la glace et de la vapeur d'eau sont indiquées par 0^oC et 100^oC dans l'échelle Celsius et par 32^oF et 212^oF dans l'échelle Fahrenheit. Cela étant, qu'indique le thermomètre Celsius quand le thermomètre Fahrenheit indique 112^oF ?

Exercice 4

Vous devez injecter 7,5 mg de Valium en intramusculaire à partir d'une ampoule de 2 ml. Sachant que l'ampoule contient 10 mg de Valium, quelle quantité devez-vous prélever dans votre seringue ?

Exercice 5

Un bassin rectangulaire mesure 75 m sur 42 m. Quelle serait la longueur d'un terrain de même superficie qui aurait 50 m de largeur ?

Exercice 6

Sous la pression de 6 atmosphères, un gaz occupe un volume de 85 dm^3. Quel volume occupera-t-il sous la pression de 15 atmosphères ?

Exercice 7

Il y a une rupture de stock modiale d'un médicament contre la lapeyronie. Un hôpital possède des réserves de ce médicament pour 48 jours, ce qui permettrait de soigner 800 patients atteints de ce mal. La rupture de stock prévoit de s'éterniser 150 jours. Combien pourra-t-on soigner de patients pour qu'en diminuant la dose du médicament de $\frac{1}{5}$, les réserves soient suffisantes pour tenir jusqu'à la fin de la rupture de stock ?

18.3 Règle de trois composée

Exercice 1

Dans un laboratoire, 15 infirmiers travaillant 9 h par jour, ont mis 12 j pour réaliser 150 prélèvements. Combien de jours mettront 13 infirmiers travaillant 10 h par jour pour réaliser 120 prélèvements ?

Exercice 2

Dans un laboratoire, 15 infirmiers travaillant 9 h par jour, ont mis 12 j pour réaliser 150 prélèvements. Combien d'infirmiers travaillant 8 h par jour sera-t-il nécessaire d'engager pour réaliser 120 prélèvements en 5 jours ?

Exercice 3

Le travail effectué par 3 infirmiers expérimentés équivaut à celui de 5 débutants. Le salaire de 3 débutants équivaut à celui de 2 expérimentés. Un projet auquel ont été occupés 15 expérimentés et 40 débutants a été terminé en 8 semaines et a coûté 32400 e. Après combien de temps le même projet pourrait-il être terminé par 20 expérimentés et 20 débutants, et quel serait la dépense dans ce cas ?

Exercice 4

Une pierre taillée a la forme d'un parallélépipède rectangle de 1,8 m de longueur, de 0,8 m de largeur et de 0,7 m d'épaisseur. Sa masse est de 2318,4 kg. Quelle serait l'épaisseur d'une pierre de même nature ayant une masse de 2608,2 kg, une longueur de 2,1 m et une largeur de 0,9 m ?

Exercice 5

Sur un chantier, 15 ouvriers travaillant 9 h par jour ont mis 12 j pour construire un mur de dimensions 150 $m \times$ 2,4 $m \times$ 0,5 m. Combien 13 ouvriers travaillant 10 h par jour, mettront-ils de temps pour construire un mur de dimensions 200 $m \times$ 2,5 $m \times$ 0,6 m ?

Exercice 6

Dans un laboratoire, un certain projet peut être réalisé en 44 j par 15 chercheurs travaillant 8 h par jour. Après 10 j, 5 chercheurs cessent de travailler ; les autres passent alors à 9 h par jour. Au bout de combien de temps le projet sera-t-il terminé ? Combien recevra chacun des chercheurs, proportionnellement à leur investissement en temps, s'ils se partagent un prix de 8448 e pour leurs recherches ?

Exercice 7

La valeur d'un diamant est proportionnelle au carré de sa masse. Quel est la masse d'un diamant d'une valeur de 81082,08 e, si le carat d'un diamant vaut 48 e et si le carat est égal à 205,5 mg ?

18.4 Partages proportionnels simples

Exercice 1

Deux enfants qui ont respectivement 7 et 9 ans doivent se partager 32 noisettes en fonction de leur âge. Combien en auront-ils chacun ?

Exercice 2

On veut relier 3 localités par une route dont le coût sera de 1850000 e. Quelle sera la part contributive de ces localités, si la longueur de cette route est de 3127 m sur la première, 1945 m sur la deuxième et 2328 m sur la troisième ?

Exercice 3

A la fin de l'année, une entreprise partage une prime de 672,80 e entre 3 employés proportionnellement à leurs années de service. Quelle sera la part de chacun d'entre eux, s'ils ont respectivement 5, 7 et 8 années d'ancienneté ?

Exercice 4

Deux enfants doivent se partager 32 bonbons en raison inverse de leurs notes, qui sont respectivement de 7 et de 9. Combien de bonbons revient à chacun ?

Exercice 5

Trois étudiants doivent se partager 99 coups de fouet (auto-flagellation) en raison inverse de leurs mauvaises notes aux examens, qui sont respectivement de $1/20$, $4/20$ et $6/20$. Combien de coups de fouet revient-il à chacun ?

Exercice 6

On veut partager une somme de 25228 e entre trois frères proportionnellement à leur âge qui est de 15, 18 et 20 ans.

1. Quelle est la part de chacun d'eux ?
2. Quelle serait la part de chacun d'eux si le partage se faisait de manière inversément proportionnelle à la âge ?
3. Quelle serait la part de chacun d'eux si le partage se faisait dans 5 ans ?
4. Quelle serait la part de chacun d'eux si le partage se faisait, après ces 5 ans, de manière inversément proportionnelle à la âge ?

Exercice 7

Comment répartir 3240 patients entre 12 hôpitaux, 15 cliniques et 20 centres de soins, de manière à ce que la répartition des patients dans chaque clinique soit les $\frac{3}{4}$ de celle de chaque hôpital, et de chaque centre de soins soit la moitié de celle d'une clinique.

18.5 Partages proportionnels composés

Exercice 1

Les frais de transport de quatre livraisons s'élèvent à 1000,80 e. Ces frais sont proportionnels aux poids des colis et aux distances auxquelles ces colis ont été expédiés. Les poids sont respectivement de 1400 kg, 980 kg, 2300 kg et 2640 kg. Les distances sont respectivement de 19 km, 25 km, 21 km et 15 km. Quels sont les frais de transport de chacune des livraisons ?

Exercice 2

Trois ouvriers ont fait, en un an, un pont. Leur salaire global s'élève à 84000 e. Ils ont été payés en raison inverse de leurs jours d'absence qui sont de 30, 40 et 50, ainsi qu'en raison inverse du nombre de pauses clopes par jour qui sont respectivement de 4, 5 et 6. Quelle somme chacun a-t-il reçue ?

Exercice 3

Trois ouvriers ont fait, en un an, un pont. Leur salaire global s'élève à 84000 e. Ils ont été payés en raison inverse de leurs jours d'absence qui sont de 30, 40 et 50, ainsi qu'en raison directe de leur ancienneté qui est respectivement de 10 ans, 15 ans et 20 ans. Quelle somme chacun a-t-il reçue ?

Exercice 4

Une propriété de 36 ha est formée de 4 lots dont les surfaces sont en raison inverse des âges des 4 enfants du propriétaire qui ont respectivement 20, 15, 12 et 10 ans. Que vaut la valeur totale de la propriété, sachant que les lots sont égaux en valeur et que le mètre carré qui est constitué par le plus mauvais des 4 terrains vaut 0,5 e ?

Exercice 5

En 2002, des subsides ont été partagés entre 3 hôpitaux proportionnellement au nombre de patients qui étaient de 700, 600 et 500. En 2012, le nombre de patients a été respectivement de 600, 500 et 400.

1. Quel hôpital se retrouve gagnant vis-à-vis de ce changement ?
2. Quel hôpital se retrouve perdant ?
3. L'un des hôpitaux reçoit ainsi 12000 e de plus qu'auparavant ; quelle est la valeur des subsides reçus en 2012 ?

Exercice 6

Le gouvernement veut répartir un subside de 1757700 e entre quatre communes, en raison directe de leur population, de leur étendue et de la superficie des espaces publics (parcs, ...), mais en raison inverse de leurs revenus. Les populations respectives sont de 1200, 960, 750 et 600 habitants. Les superficies respectives sont de 900, 450, 640 et 800 ha. Les espaces publics couvrent respectivement 32, 25, 48 et 36 a. Les revenus respectifs sont de 150000, 120000, 80000 et 100000 e. Que reviendra-t-il à chacune ?

Exercice 7

Un réservoir paralléllépipédique est rempli de pétrole dont la densité vaut 0,81. On sait que la largeur vaut $\frac{4}{5}^e$ de la longueur et que la hauteur vaut $\frac{3}{5}^e$ de cette même longueur. On sait aussi que la somme des surfaces du fond et des faces latérales égale 36,26 m^2. Calculer, d'après cela, le poids du pétrole contenu dans le réservoir.

18.6 Règle conjointe

Exercice 1

Vous devez injecter 7,5 mg de Valium en intramusculaire à partir d'une ampoule de 2 ml. Sachant que l'ampoule contient 10 mg de Valium, quelle quantité devez-vous prélever dans votre seringue graduée en mm^3 ?

Exercice 2

Un quintal de betteraves produit en moyenne 4 kg d'alcool éthylique vendu en barriques de 620 litres. Combien faudra-t-il de quintaux de betteraves pour fournir 2,5 barriques, la densité de l'alcool étant de 0,940 ?

Exercice 3

Un patient doit recevoir de l'oxygène à raison de 3 litres/minute à la pression de 1 atmosphère ($\approx$ 1013 $mbar$) à partir d'une bonbonne. La bonbonne est pleine et qu'elle a une capacité de 70 litres. Pour information, le volume d'O_2 gazeux disponible est égal à la capacité de la bonbonne multiplié par la pression de cette bonbonne. Une bonbonne d'O_2 pleine a une pression de 200 bars. Quelle sera la durée de survie de la bonbonne (après combien de temps sera-t-elle vide) ?

Exercice 4

Quatre vaches laitières donnent quotidiennement 48 L de lait. 25 L de lait renferment 3 L de crème et 5 L de crème produisent 1,25 kg de beurre vendu à 360 e les 6 kg. Quelle est la valeur du beurre fourni en un jour par 7 vaches laitières ?

Exercice 5

Dans les anciennes mesures de capacités françaises, il y a de quoi se prendre la tête : les 7 muids valaient 14 feuillettes ; les 5 feuillettes valaient 670,55 L ; 312,2 L faisaient 2 setiers ; 3 setiers faisaient 36 boiseaux dont 5 égalaient 80 litrons. Combien de litrons contenait le muid ?

Exercice 6

Un hectolitre d'eau de mer a une masse de 102,6 kg et a une densité de 1,030. On sait que 1 t d'eau de mer contient 25 kg de chlorure de sodium pur. De 95 kg de $NaCl$ pur, on peut faire 100 kg de sel gris de commerce. Quel doit être le débit (en m^3/s) d'eau de mer entrant dans une saline pour obtenir 1080 kg de sel gris par jour ?

Exercice 7

Une perfusion de 1 litre de solution glucosée à 5% à laquelle ont été ajoutés 5 ampoules de Lysomucil (1 ampoule de Lysomucil = 3 cm^3) et 10 U.I. d'insuline Actrapid (100 U.I. d'insuline = 1 ml) doit couler en 24 heures. Quel sera le débit de la perfusion (en gouttes/minute) sachant que 1 ml = 20 gouttes ?

18.7 Mélanges et alliages

Exercice 1

Exprimez, en %, la pureté d'un lingot d'argent pesant 22 kg et contenant 18,7 kg d'argent pur ?

Exercice 2

On fond ensemble deux lingots d'or, l'un de 192 g pur à 87,5 % et l'autre de 525 g pur à 84 %.

1. Que vaut la pureté du mélange ?
2. Si l'on ajoute 28,5 g d'or pur, que vaudra la pureté du mélange ?
3. Si l'on ajoute 4,5 g de cuivre pur, que vaudra la pureté du mélange ?
4. Si l'on ajoute 28,5 g d'or pur et 4,5 g de cuivre, que vaudra la pureté du mélange ?

Exercice 3

Un négociant en vins a opéré le mélange suivant : 2,7 hl de vin à 17,40 e/L avec un autre vin à 14,40 e/L. Sachant que pour gagner 20 % du prix de revient, il doit vendre le litre du mélange à 18 e, combien de litres de la 2^e espèce a-t-il dû ajouter à ses 2,7 hl de départ ?

Exercice 4

On a de la cocaïne à 79,20 e, 82,80 e et 72,00 e les 2 g. Quelle quantité devra-t-on en prendre de chaque espèce pour en faire un mélange de 180 g à 37,80 e/g

1. si l'on prend la même quantité des deux premières espèces ?
2. si l'on prend 30 g de la première espèce ?

Exercice 5

Pour une orgie d'étudiants, on a fait à un négociant en liqueurs une commande de 375 litres d'eau-de-vie à 20^o. Comme ce négociant ne possède que des eaux-de-vie à 24^o et 18^o, il désire savoir

1. dans quel rapport il devra les mélanger pour satisfaire à la demande de ses clients et
2. combien de litres il devra mettre de chaque espèce.

Exercice 6

Le laiton se compose de 35 % de zinc et de 65 % de cuivre. On demande de déterminer la valeur d'une masse de laiton de 225 kg sachant que le kilogramme de cuivre coûte 3,75 e et le kilogramme de zinc coûte 0,85 e.

Exercice 7

Dans une entreprise pharmaceutique, on a acheté 200 L d'essence de jajinjojojobea à 0,16 $e/\mu L$. Combien de litres d'eau de pluie gratis faut-il ajouter pour qu'en vendant le litre de mélange à 0,20 $e/\mu L$

on gagne 30 % sur le tout ?

18.8 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

Un cultivateur veut répartir 211,2 m^3 de chaux sur trois terres. Cette répartition doit se fair en raison directe de la superficie et en raison inverse de la richesse de chacune en éléments calcaires. Leurs superficies respectives sont de 3 ha 50 a, 4 ha 8 a et 5 ha 12 a. Leurs teneurs en chaux peuvent être représentées par les nombres $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$ et $\frac{2}{11}$. Quelle quantité de chaux recevra chaque terre ?

Exercice 2

On a un alliage de 160 kg dans lequel il y a 5 g de cuivre pour 3 g d'étain. Quelle quantité de cuivre faut-il ajouter pour que le rapport du cuivre à l'étain soit de $\frac{9}{5}^e$?

Exercice 3

Une poutre en orme de 6 m de longueur et de 4 m de longueur plonge dans l'eau et 10,5 cm seulement de sa hauteur ne sont pas immergés. Calculez la valeur de cette poutre à 2000 e/m^2.

Exercice 4

Quatre personnes viennent de liquider une association qui leur a donné 8640 e de perte. Comme elles ont versé chacune 10000 e par mois, déterminez leurs pertes respectives, sachant qu'elles ont laissé leurs mises dans la société, la première pendant 9 mois, la deuxième pendant 13 mois, la 3^e pendant 15 mois et la 4^e pendant 17 mois.

Exercice 5

Une personne dispose de 4 h pour faire une excursion en planche à roulette électrique. Elle doit partir d'un point A et revenir en ce point. A cause des embouteillages, elle peut faire 75 km/h à l'aller et 45 km/h au retour. Après combien de temps devra-t-elle faire demi-tour ? A quelle distance du point A s'est-elle éloignée ?

Exercice 6

Vous devez partager une récompense de 1000 e entre 4 personnes, de manière à ce que la deuxième ait 75 e de plus que les $\frac{3}{5}$ de la part de la 1^e, la 3^e 100 e de plus que les $\frac{2}{3}$ de la part de la 2^e, et la 4^e 37,50 e de moins que les $\frac{5}{4}$ de la 3^e.

Exercice 7

Vous allez de Charleroi à Bruxelles à 50 km/h en moyenne et vous faites le retour à 100 km/h en moyenne. A quelle vitesse moyenne avez-vous roulé pour faire l'aller-retour ?

Annexe A

Tracé et équation d'une droite

A.1 Equations de droites

Une équation de droite est de la forme :

$x = c$	$y = mx + p$
où	où
c est un nombre réel	m et p sont des nombres réels
si elle est parallèle à l'axe de ordonnées	si elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées

Remarque : On rencontrera parfois des équations du type $ay + bx + c = 0$. On pourra alors (si $a \neq 0$) les transformer en une équation du type $y = mx + p$ que l'on appelle équation canonique de la droite.

Exemples :

1. $y = 3x + 2$ est l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées (Oy)
2. $x = 3$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (Oy)
3. $2y - 2x + 4 = 0$ est aussi une équation de droite, en effet $2y - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2y = 2x - 4 \Leftrightarrow y = x - 2$

A.1.1 Coefficient angulaire et ordonnée à l'origine

Toute droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées (Ox) a une unique équation canonique de la forme $y = mx + p$, et est la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$.

m	p
est	est
le coefficient angulaire de la droite	l'ordonnée à l'origine de la droite

Exemples :

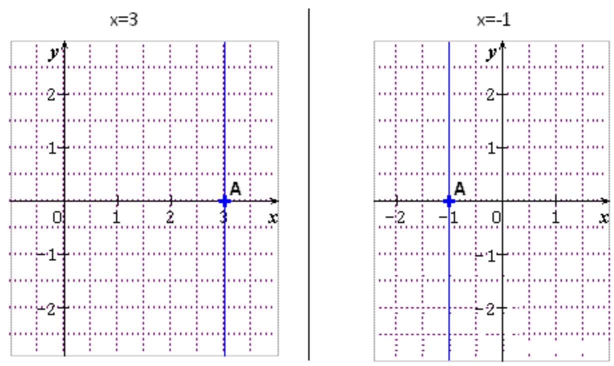
1. $y = 3x + 2$ est la droite de coefficient angulaire 3 et d'ordonnée à l'origine 2 ;
2. $y = x - 2$ est la droite de coefficient angulaire 1 et d'ordonnée à l'origine -2.

A.1.2 Tracé d'une droite

Cas où $x = c$

Il s'agit de la droite parallèle à l'axe des ordonnées (Oy) passant par le point $A(c; 0)$.

Exemples :



Cas $y = mx + p$ à partir des coefficients

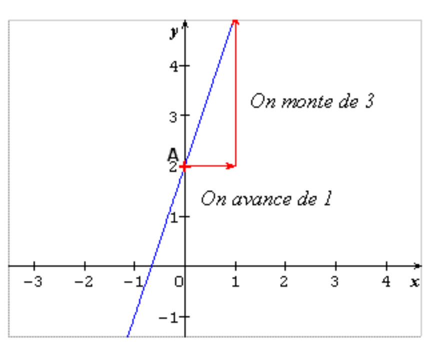
D'après ce qui précède :

p est l'ordonnée à l'origine de la droite, c'est donc l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. Le point de coordonées $(0; p)$ appartient à cette droite.

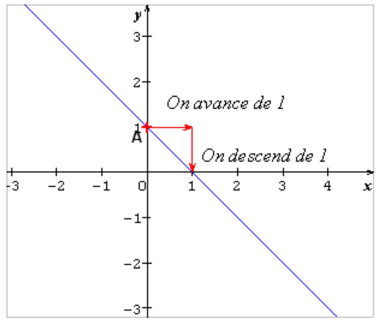
m est le coefficient angulaire de la droite, c'est-à-dire qu'il donne l'accroissement de y pour un accroissement de x valant 1. Il s'agit donc ici encore d'une application particulière des proportions ($m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$).

Exemples : Tracer les droites suivantes à partir de leurs équations :

1. $y = 3x + 2$. L'ordonnée à l'origine est 2. Le point $A(0; 2)$ appartient à la droite. Le coefficient directeur est 3. Donc « si on avance de 1 en abscisse, on monte de 3 en ordonnée ».



2. $y = -x+1$. L'ordonnée à l'origine est 1. Le point $(0; 1)$ appartient à la droite. Le coefficient directeur est -1. Donc si on « avance de 1 en abscisse », on « descend de 1 en ordonnée ».



Remarque : si $m > 0$, la droite « monte » et si $m < 0$, la droite « descend ». Dans le cas particulier où $m = 0$, la droite sera parallèle à l'axe des abscisses (Ox)

Cas $y = mx + p$. A partir de deux valeurs distinctes de x

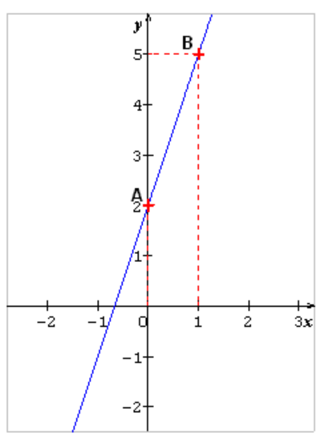
On choisit deux valeurs différentes pour x. Pour faciliter les calculs et si le problème s'y prête, on prend souvent $x = 0$ et $x = 1$. On obtient donc les coordonnées de 2 points distincts de la droite, il ne reste plus qu'à tracer la droite les reliant.

Exemples :

1. $y = 3x + 2$

Valeurs de x	0	1
$y = 3x + 2$	$3.0 + 2 = 2$	$3.1 + 2 = 5$

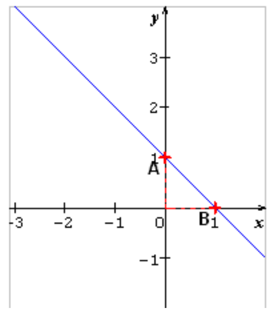
   Les points $A(0; 2)$ et $B(1; 5)$ appartiennent à la droite. On trace donc la droite passant par ces 2 points.



2. $y = -x + 1$

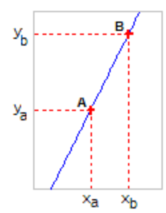
Valeurs de x	0	1
$y = -x + 1$	$-0 + 1 = 1$	$-1 + 1 = 0$

Les points $A(0;1)$ et $B(1;0)$ appartiennent à la droite. On trace donc la droite passant par ces 2 points.



A.2 Déterminer l'équation d'une droite à partir d'une représentation graphique

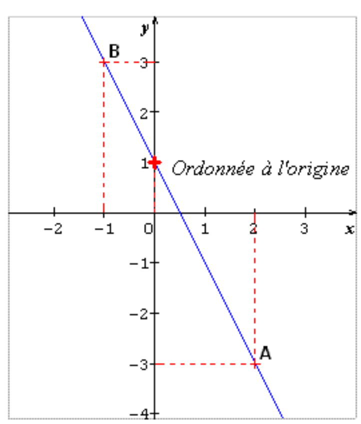
La droite a pour équation $y = mx + p$; $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ appartiennent à cette droite.



Détermination du coefficient angulaire de la droite : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Détermination de l'ordonnée à l'origine : Il suffit de lire l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Exemples : Déterminer les équations des droites suivantes

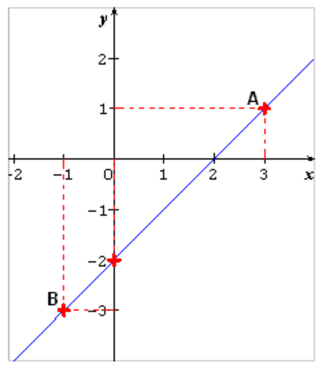


1. L'équation est de la forme $y = mx + p$. La droite passe par les points $A(2; -3)$ et $B(-1; 3)$. Donc,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-3)}{-1 - 2} = \frac{6}{-3} = 2$$

L'ordonnée à l'origine est 1. Donc $p = 1$.

L'équation de la droite est : $y = -2x + 1$



2. L'équation est de la forme $y = mx + p$. La droite passe par les points $A(3; 1)$ et $B(-1; -3)$. Donc,

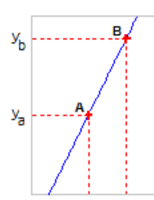
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 1)}{-1 - 3} = \frac{-4}{-4} = 1$$

L'ordonnée à l'origine est -2. Donc $p = -2$.

L'équation de la droite est : $y = x - 2$

A.3 Déterminer l'équation d'une droite à partir des coordonnées de 2 points distincts

La droite a pour équation $y = mx + p$. On sait que $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ appartiennent à cette droite.



Détermination du coefficient angulaire de la droite : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Détermination de l'ordonnée à l'origine : Le point A appartient à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation $y = mx + p$. D'où l'obtention de p par la résolution d'une équation.

Exemples : Déterminer les équations suivantes

1. Equation de la droite passant par $A(2; -3)$ et $B(-1; 3)$: $y = mx + p$
   Calcul de $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-3)}{-1-2} = \frac{6}{-3} = -2$

   $A(2; -3)$ appartient à la droite, donc $y_A = -2x_A + p \Leftrightarrow 1 = 3 + p \Leftrightarrow p = -2$.

   L'équation de la droite est : $y = -2x + 1$

2. Equation de la droite passant par $A(3; 1)$ et $B(-1; -3)$: $y = mx + p$
   Calcul de $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-1}{-1-3} = \frac{-4}{-4} = 1$

   $A(3; 1)$ appartient à la droite, donc $y_A = x_A + p \Leftrightarrow 1 = 3 + p \Leftrightarrow p = -2$.

   L'équation de la droite est : $y = x - 2$

A.4 Droites parallèles et perpendiculaires

Soient d et d' deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

1. Pour que deux droites soient parallèles, il suffit de considérer le point de vue des proportions : pour tout accroissement de x valant 1, l'accroissement de y des deux droites est identique. Dès lors, il vient que

$$d//d' \text{ (ou confondue) équivaut à } m = m'$$

2. Pour que deux droites soient perpendiculaires, l'angle formé par leur intersection doit être un angle droit. D'un point de vue trigonométrique (cf 17.2.2 p.106), la perpendiculaire à une droite donnée est formée par la rotation de cette droite d'un angle de $\pm 90^o$. De plus, le coefficient angulaire $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut être vu comme la tangente de l'angle α formé par la droite d et l'horizontale. Par conséquent, nous avons la relation $m = \tan\alpha$ et $m' = \tan(\alpha \pm 90^o) = -\cot\alpha = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{m}$. Dès lors,

$$d \perp d' \text{ équivaut à } m.m' = -1$$

A.5 Coordonnée du point d'intersection de 2 droites

Soient d_1 et d_2 deux droites, d'équations respectives dans le repère Oxy :

$$\begin{aligned} d_1 \equiv y &= 12x - 14 \\ d_2 \equiv y &= 3x + 12 \end{aligned}$$

Déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection des droites d_1 et d_2.

Le point d'intersection de deux droites appartient à chacune de ces droites : ses coordonnées vérifient donc l'équation de chacune de ces droites.

Pour déterminer l'éventuel point d'intersection des droites d_1 et d_2, il suffit donc de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y = 12x - 14 \\ y = 3x + 12 \end{cases}$$

L'abscisse x de l'éventuel point d'intersection des droites d_1 et d_2 est donc solution de l'équation :

$$12x - 14 = 3x + 12 \Leftrightarrow 9x = -26 \Leftrightarrow x = \frac{26}{9}$$

On en déduit y en remplaçant cette valeur de x dans l'équation de l'une des deux droites :

$$y = 3\frac{26}{9} + 12 = \frac{62}{3}$$

Les droites d_1 et d_2 sont donc sécantes en un point, de coordonnées $(\frac{26}{9}; \frac{62}{3})$.

A.5.1 Cas général

Soient d_1 et d_2 deux droites, d'équations respectives dans le repère Oxy :

$$\begin{aligned} d_1 \equiv y &= mx + p \\ d_2 \equiv y &= m'x + p' \end{aligned}$$

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes (ou incidentes) si et seulement si elles ont en commun le seul point P (système déterminé). Autrement dit, si

$$m \neq m'$$

A.5.2 Cas particuliers

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles et distinctes si et seulement si elles n'ont aucun point en commun (le système n'a pas de solution). Autrement dit, si

$$m = m' \text{ et } p \neq p'$$

Les droites d_1 et d_2 sont confondues (ou coïncidentes) si et seulement si elles ont une infinité de points en commun (le système a une infinité de solutions). Autrement dit, si

$$m = m' \text{ et } p = p'$$

A.6 Exercices

A.6.1 Equations de droites

Exercice 1

Dessiner la droite qui passe par les points A et B suivants :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A & (-1,4) & (2,5) & (4,3) & (4,-1) & (1,7) \\ B & (3,2) & (-2,-1) & (-2,3) & (4,4) & (-3,2) \end{array}$$

Exercice 2 : Vrai ou faux.

La droite d a pour équation $2x+3y-5=0$.
- d passe par l'origine du repère.
- d passe par $A(2;\frac{1}{3})$.
- d a 5 pour ordonnée à l'origine.
- d a pour coefficient angulaire $\frac{2}{3}$.

Exercice 3

Déterminer le coefficient angulaire des droites d'équation
- $d_1 \equiv 3x-7y+4=0$
- $d_2 \equiv x=-y$
- $d_3 \equiv 8y-4x=0$
- $d_4 \equiv x=4$
- $d_5 \equiv y-5=0$
- $d_6 \equiv x=y$

Exercice 4

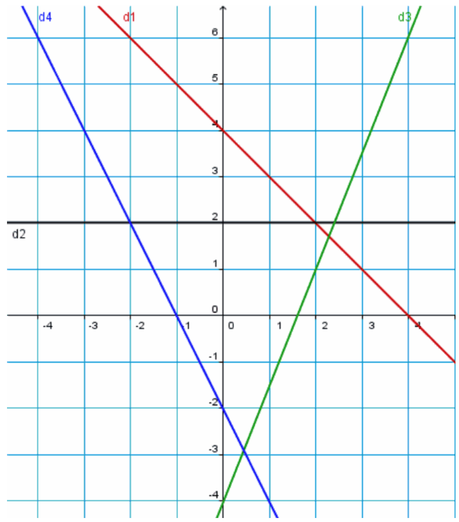
Les points suivants appartiennent-ils à la droite d'équation $y=2x+3$?
- $A(-1,1)$;
- $B(2,8)$;
- $C(0,3)$;
- $D(-3,0)$

Exercice 5

Tracer les droites :
- d'équation $y=-x+5$
- d'équation $y=-2x-3$
- de coefficient angulaire -3 et passant par $A(-2,1)$

Exercice 6

Déterminer les équations de chacune des droites tracées ci-dessous.



Exercice 7

Calculer la pente et écrire l'équation de chacune des droites de l'exercice 1.

A.6.2 Droites parallèles et perpendiculaires

Exercice 1

Les droites d et d' sont-elles parallèles ?
- $d \equiv y = 5x - 3$ et $d' \equiv y = -5x + 3$
- $d \equiv y = -4 - x$ et $d' \equiv y = -4x + 1$
- $d \equiv y = 2x - 5$ et $d' \equiv y = 2x + 3$
- $d \equiv y = \frac{1}{8}x + 2$ et $d' \equiv y = 0,125x$

Exercice 2

Soit la droite $d \equiv y = mx + p$. Rechercher l'équation des droites $d_{\parallel}$ et $d_{\perp}$ passant par le point P et qui soient respectivement parallèle et perpendiculaire à d.

m	p	P
$\frac{2}{5}$	$\frac{-9}{5}$	$(3,-4)$
2	-1	$(1,3)$
$\frac{3}{2}$	0	$(-2,3)$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(-3,2)$
0	-7	$(2,5)$
$-\frac{5}{2}$	3	$(-1,-4)$

Exercice 3

Soit la droite $d \equiv ax + by + c = 0$. Rechercher l'équation des droites $d_{\parallel}$ et $d_{\perp}$ passant par le point P et qui soient respectivement parallèle et perpendiculaire à d.

a	b	c	P
2	-5	9	$(1,3)$
2	-3	0	$(-2,3)$
4	3	-6	$(-3,2)$
0	-2	7	$(-1,-4)$
1	0	-1	$(3,-4)$
-2	-5	9	$(2,5)$

Exercice 4

On considère les deux droites d et d' d'équations respectives $2x - y + 3 = 0$ et $2x - y - 1 = 0$. Que peut-on dire de ces droites d et d' ?

Exercice 5

On donne les points $A(7;2)$, $B(3;-3)$, $C(0;2)$ et $D(8;y)$. Déterminer y pour que D soit situé
- sur la parallèle à AB passant par C ;
- sur la perpendiculaire à AB passant par C.

Exercice 6

Soit $d_{\perp}$ la perpendiculaire à la droite AB passant par $A(0;4)$. Ecrire une équation de la droite $d_{\parallel}$ parallèle à $d_{\perp}$ et passant par $B(-2;-4)$.

Exercice 7

- Quelle est l'équation de la droite d passant par (100 ;100) et par l'origine ?
- Quelle est l'équation de la droite d' parallèle à d et passant par le point $(18;8)$?
- Quelle est l'équation de la droite d'' perpendiculaire à d et passant par ce même point $(18;8)$?

A.6.3 Intersection de droites

Exercice 1

Dessiner les graphiques et rechercher les coordonnées des points d'intersection de
- $d_1 \equiv 4x + 3y = 5$ et $d_2 \equiv 3x - 2y = 8$.
- $d_1 \equiv 2x + 3y = 2$ et $d_2 \equiv x - 2y = 8$.
- $d_1 \equiv 2x + 5y = 16$ et $d_2 \equiv 3x - 7y = 24$.

Exercice 2

Soient $B(-5; 1)$ et $C(2; -4)$. Trouver les coordonnées du point A commun à BC et à l'axe des abscisses.

Exercice 3

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $d \equiv y = 4x - 1$ avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Exercice 4

Le prix total de 10 livres de mathématiques et de 15 livres de français est de 280 €. Pour 15 livres de mathématiques et 10 livres de français, le prix total serait de 270 €.

En notant x le prix d'un livre de mathématiques et y le prix d'un livre de français, transformez les phrases précédentes en un système d'équations. Dessinez le graphique correspondant et rechercher les coordonnées du point d'intersection des droites obtenues.

Exercice 5

Un groupe de x personnes décident de faire une excursion dont le prix pour le groupe est y. Si chacune d'elle verse 150 €, il manque 1500 €. Si chacune d'elle verse 200 €, on rend au groupe 200 €.

Transformez les phrases précédentes en un système d'équations. Dessinez le graphique correspondant et recherchez les coordonnées du point d'intersection des droites obtenues. Déduisez-en le nombre de personnes et le prix de l'excursion.

Exercice 6

Au cours d'une soirée, le centre de restauration rapide fait une promotion sur les desserts. Une caisse est spécialement réservée pour cette opération commerciale. Glace : 8,5 €et crème caramel : 6 €.

En fin de soirée, le caissier désire trouver rapidement le nombre de glaces et le nombre de crèmes caramel qu'il a vendues. Il a dans sa caisse 689,50 €et il sait qu'il a vendu 97 desserts au total.

Soit x le nombre de glaces et y le nombre de crèmes caramel.

Montrer que cette situation se met sous la forme d'un système de deux équations à deux inconnues, puis déterminer graphiquement et par calcul le nombre de desserts de chaque sorte.

Exercice 7

M. Dubois travaille auprès d'un industriel européen qui produit deux sortes de moteurs électriques. Il a vendu un nombre n de moteurs synchrones dont le prix unitaire est 300 €et un nombre p de moteurs asynchrones à 500 €l'unité. Pour cette vente, il a encaissé 11100 €correspondant aux paiements de 27 moteurs.

Montrer que cette situation se met sous la forme d'un système de deux équations à deux inconnues, puis déterminer graphiquement et par calcul le nombre de moteurs de chaque type.

A.6.4 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

Trouver une équation de la droite d qui satisfasse aux deux conditions suivantes :

- Passer par $A(5,-3)$ et de pente -4.
- Couper l'axe Ox en 4 et l'axe Oy en -3.
- Passer par $A(2,-4)$ et parallèle à la droite $d_{\parallel} \equiv 5x - 2y = 4$.

Exercice 2

On donne les points $M(-1;3)$, $N(8;-4)$ et $X(5;a)$ où a est un réel. Comment choisir a pour que les points M, N et X

- soient alignés ?
- déterminent un triangle rectangle en X

Exercice 3

Soient les points $A(0,-1)$ et $B(4,3)$. Calculer la coordonnée d'un point F appartenant à AB et tel que

- son abscisse et son ordonnées sont égales ;
- son abscisse et son ordonnées sont opposées.

Exercice 4

On donne $A(-2;7)$, $B(-3;5)$ et $C(4;6)$. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère Oxy, on considère quatre points $A(-1;2)$, $B(1;-1)$, $C(2;4)$ et $D(6;-2)$.

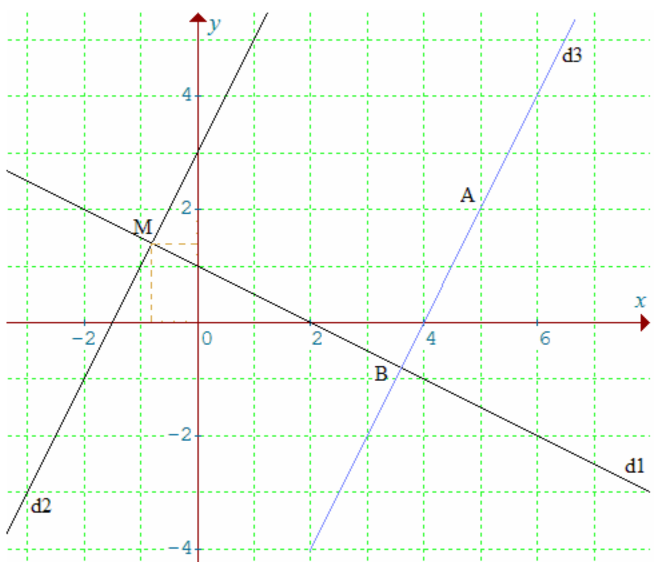
- Faire une figure.
- Montrer que $ABDC$ est un trapèze et non un parallélogramme.
- Soit I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$. Démontrer que la droite IJ est parallèle à la droite AB.

Exercice 6

Dans un plan muni d'un repère, on considère un triangle ABC où $A(-3;0)$, $B(5;0)$ et $C(6;-6)$. Soit A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

- Calculer les coordonnées des points A', B' et C'.
- Déterminer une équation de la droite AA', de la droite BB' et de la droite CC'.
- Calculer les coordonnées du point d'intersection G des droites AA' et BB'.
- Le point G est-il sur la droite CC' ?
- L'équation $x - y + 4 = 0$ est-elle une équation de AC' ?

Exercice 7



- Déterminer graphiquement (en lisant les coordonnées sur le graphique ci-dessus), puis par le calcul, l'intersection M des droites d_1 et d_2 dont les équations respectives sont : $y = -\frac{x}{2} + 1$ et $y = 2x + 3$.
- Justifier que les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires.
- La parallèle à d_2 passant par $A(5;2)$ coupe d_1 en B. Calculer les coordonnées de B.

Annexe B

Géométrie fondamentale