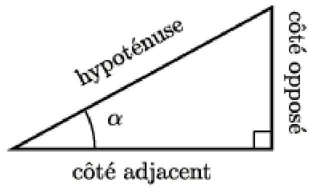
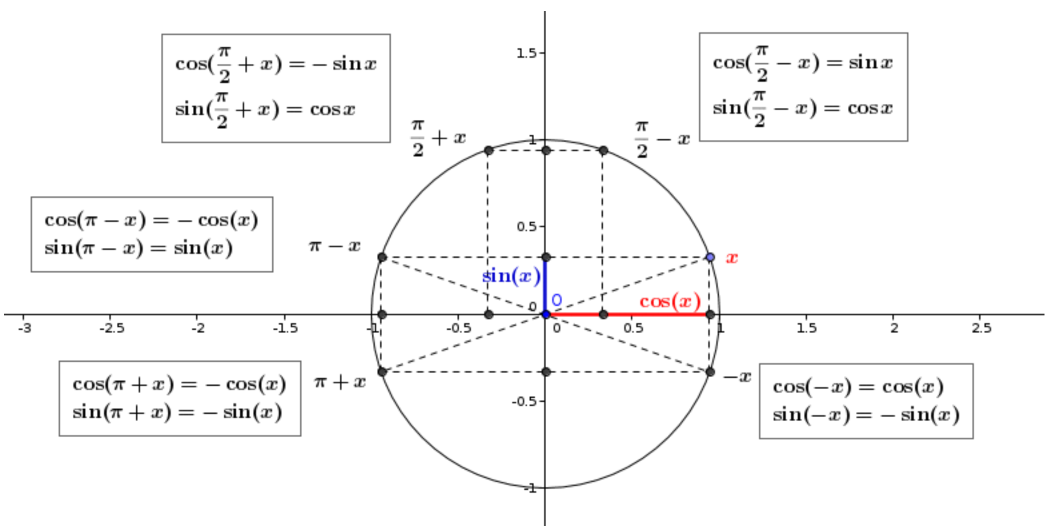
## Trigonométrie




$$\cos\alpha = \frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}}$$
$$\sin\alpha = \frac{\textit{côté oppposé}}{\textit{hypoténuse}}$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\textit{côté oppposé}}{\textit{côté adjacent}}$$

Formules fondamentales

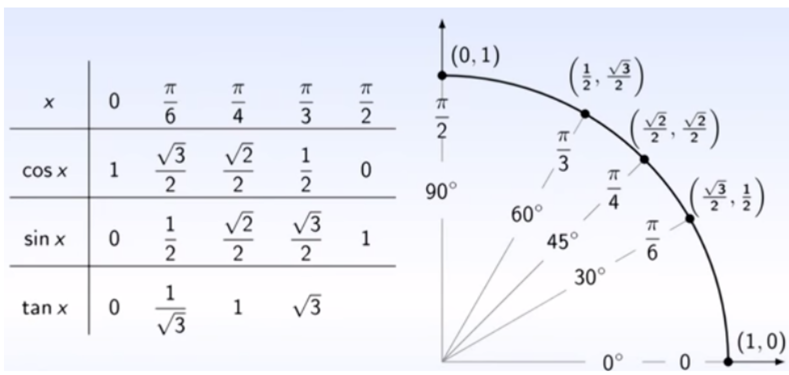
$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \qquad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$




Angles associés

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(\pi + x) \qquad \tan(\pi + x) = \tan x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

| $\alpha$ ($^o$) | $\alpha$ $(rad)$ | cos | sin | tan | cot |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $\nexists$ |
| $30^o$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $45^o$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| $60^o$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $90^o$ | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | 1 | $\nexists$ | 0 |
| $180^o$ | $\pi$ | $-1$ | 0 | 0 | $\nexists$ |
| $270^o$ | $\frac{3\pi}{2}$ | 0 | $-1$ | $\nexists$ | 0 |




Formules d'addition

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Formules de duplication

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

Formules de Carnot (linéarisation)

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

## Opérations sur les vecteurs

| | $\vec{u}(u_x, u_y)$ et $\vec{v}(v_x, v_y)$ | |
|---|---|---|
| addition | $\vec{u}+\vec{v}$ | $(u_x+v_x, u_y+v_y)$ |
| soustraction | $\vec{u}-\vec{v}$ | $(u_x-v_x, u_y-v_y)$ |
| multiplication par un scalaire | $k\vec{u}$ | $(ku_x, ku_y)$ |
| norme | $\|\|\vec{u}\|\|$ | $\sqrt{u_x^2+u_y^2}$ |
| | | $=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{\vec{u}^2}$ |
| produit scalaire | $\vec{u}\cdot\vec{v}$ | $u_xv_x+u_yv_y$ |
| | | $=\|\|\vec{u}\|\|.\|\|\vec{v}\|\|.\cos\alpha$ |
| produit vectoriel (norme) | $\|\|\vec{u}\times\vec{v}\|\|$ | $\|\|\vec{u}\|\|.\|\|\vec{v}\|\|.\sin\alpha$ |

## MCU

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi\nu$$
$$v_t = R\omega \quad a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

## MRU, MRUA, chute d'un corps

cas général

$$\vec{r}(t)-\vec{r}_0 = \vec{a}\frac{(t-t_0)^2}{2}+\vec{v}_0(t-t_0)$$
$$\vec{v}(t)-\vec{v}_0 = \vec{a}(t-t_0)$$

| MRU | MRUA | chute d'un corps |
|---|---|---|
| $x-x_0=v_0t$ | $x-x_0=a\frac{t^2}{2}+v_0t$ | $y-y_0=-g\frac{t^2}{2}+v_0t$ |
| $v(t)=v_0$ | $v(t)-v_0=at$ | $v(t)-v_0=-g$ |

## Parabole de tir

$$r_x(t)-r_{x0}=v_{0x}t \quad \text{et} \quad r_y(t)-r_{y0}=-g\frac{t^2}{2}+v_{0y}t$$
$$v_x(t)=v_{x0} \qquad v_y(t)-v_{y0}=-gt$$

| | |
|---|---|
| équation | $r_y=-\frac{r_x^2}{2g\cos^2\alpha}+r_x\tan\alpha$ |
| portée | $x_p=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ |
| hauteur | $y_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$ |
| temps de montée | $t_m=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$ |

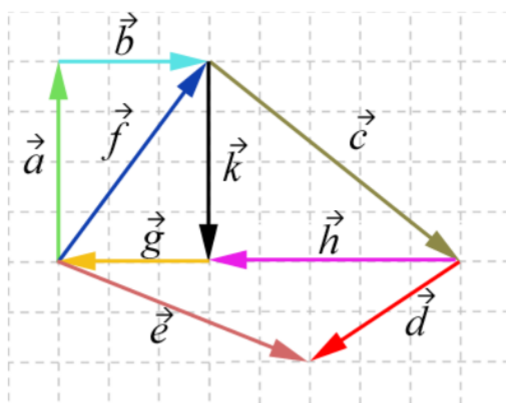
# Chapitre 1

# Exercices

## 1.1 Calcul vectoriel

### 1.1.1 Les bases

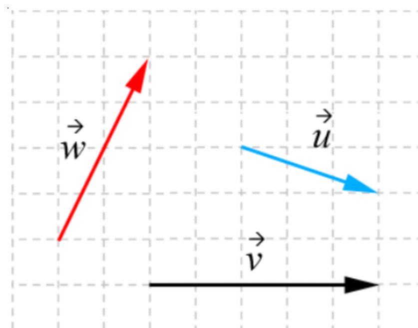
**Exercice 1 : équations vectorielles simples**




1. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$
2. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{c} + \vec{h} + \vec{g}$
3. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{c} + \vec{h}$
4. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{k} + \vec{g}$
5. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{h}$
6. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{c} - \vec{k}$
7. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} + \vec{b} = \vec{f}$
8. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} + \vec{d} = \vec{e}$
9. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} - \vec{f} = \vec{c}$
10. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{h} + \vec{g} - \vec{x} = \vec{d}$
11. Exprimer $\vec{c}$ par rapport à $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$
12. Exprimer $\vec{g}$ par rapport à $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{k}$
13. Exprimer $\vec{e}$ par rapport à $\vec{d}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$
14. Exprimer $\vec{e}$ par rapport à $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$

**Exercice 2 : combinaisons linéaires**

Utiliser les vecteurs de la figure ci-dessus pour dessiner, sur une feuille quadrillée, les vecteurs suivants :




$\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{v}$, $3\vec{v}$, $4\vec{w}$, $\vec{v}-\vec{w}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $3(\vec{v}+\vec{u})-2\vec{w}$ et $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$

**Exercice 3 : relation de Chasles**

Soient $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ cinq points quelconques. Simplifier au maximum les expression suivantes (sans faire de dessin).

$$\vec{a}=\vec{BC}+\vec{DE}+\vec{DC}+\vec{AD}+\vec{EB} \qquad \vec{b}=\vec{AC}-\vec{BD}-\vec{AB} \qquad \vec{c}=\vec{EC}-\vec{ED}+\vec{CB}-\vec{DB}$$
$$\vec{d}=3\vec{AB}+2\vec{BC}-\vec{DB} \qquad \vec{e}=7\vec{AC}+2\vec{CD}+3\vec{AD} \qquad \vec{f}=3\vec{AD}-2\vec{ED}+\vec{DC}+2\vec{EA}-\vec{AC}$$

**Exercice 4 : relation de Chasles**

Soient trois points $A$, $B$ et $C$ non alignés. Soit le point $G$ défini par la relation $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$. Démontrer que, pour tout point $M$ du plan, on a la relation $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=3\vec{MG}$.

**Exercice 5 : norme et vecteurs définis par les coordonnées de deux points**

Soit le vecteur $\vec{PQ}$ ayant comme départ le point $P$ et comme arrivée le point $Q$. Donner les composantes de $\vec{PQ}$ sous la forme $(v_x, v_y)$ et calculer sa norme $||\vec{PQ}||$.

1. $P(0,0)$ et $Q(3,4)$
2. $P(3,2)$ et $Q(5,6)$
3. $P(-2,-1)$ et $Q(6,-2)$
4. $P(-3,7)$ et $Q(0,0)$

**Exercice 6 : norme**

1. Que vaut la norme d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(3,4)$ ?
2. Que vaut la norme d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ?
3. Trouver un vecteur $\vec{v}$ dont la norme est égale à 13 et dont la composante dans la direction $x$ vaut 4.
4. Trouver un vecteur $\vec{v}$ dont la norme est égale à 6 et dont la composante dans la direction $y$ vaut 3.
5. Trouver un vecteur $\vec{v}$ dont la norme est égale à 4 et dont la composante dans la direction $x$ est deux fois plus grande que la composante dans la direction $y$.
6. Trouver un vecteur $\vec{v}$ de direction $(-1,3)$ et dont la norme vaut 8.

7. Trouver un vecteur $\vec{v}$ incliné de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'horizontale et dont la norme vaut 7.

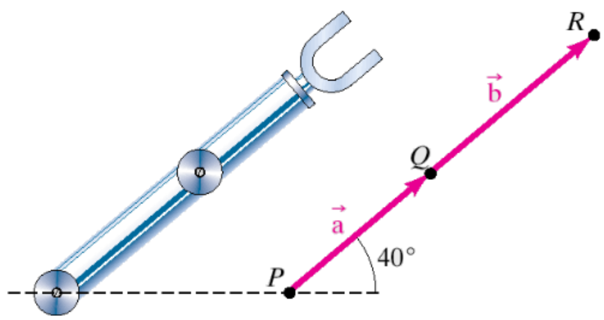
**Exercice 7 : récapitulatif**

Soit $\vec{v}(3,-5)$ et $\vec{w}(-2,3)$. Calculer

1. $\vec{v}+\vec{w}$
2. $\vec{w}-\vec{v}$
3. $-5\vec{v}$
4. $||\vec{v}||$
5. $2\vec{v}+3\vec{w}$
6. $3\vec{v}-2\vec{w}$
7. $||\vec{v}-\vec{w}||$
8. $||\vec{v}||-||\vec{w}||$
9. le vecteur unité $\vec{1_v}$

### 1.1.2 Problèmes

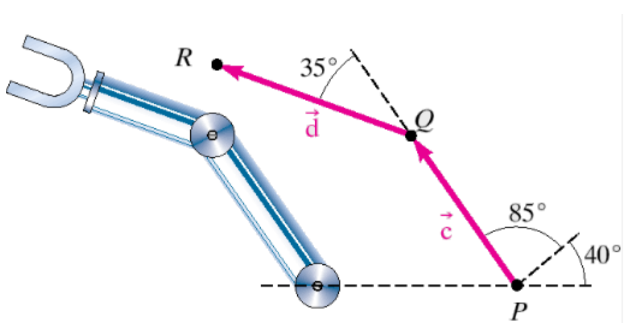
**Exercice 1**




La figure ci-dessus représente le bras d'un robot. Ce bras peut pivoter aux articulations $P$ et $Q$. Le bras supérieur (représenté par $\vec{a}$) fait $37,5\ cm$ de long et l'avant-bras, y compris la main (représenté par $\vec{b}$), a une longueur de $42,5\ cm$. Calculer les coordonnées du point $R$ situé sur la main.

**Exercice 2**

Partant de la figure de l'exercice précédent, le bras est pivoté de $85^o$ et l'avant-bras de $35^o$, comme présenté dans la figure ci-dessous. Calculer les nouvelles coordonnées de $R$.



**Exercice 3**

Si le vent souffle à 20 $km/h$ dans la direction de $40^o$ vers l'ouest par rapport au nord, exprimer sa vitesse par un vecteur $\vec{v}$ dans le système d'axes défini par $Ox$ dans la direction est et $Oy$ dans la direction nord.

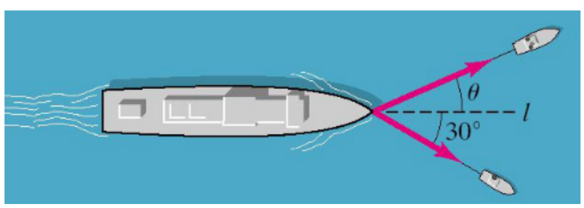
**Exercice 4**

D'après ses instruments de bord, un avion se déplace à 500 $km/h$ dans la direction est. Si le vent souffle à une vitesse de 60 $km/h$ dans la direction nord-ouest, déterminer (la norme de) la vitesse de l'avion par rapport au sol.

**Exercice 5**

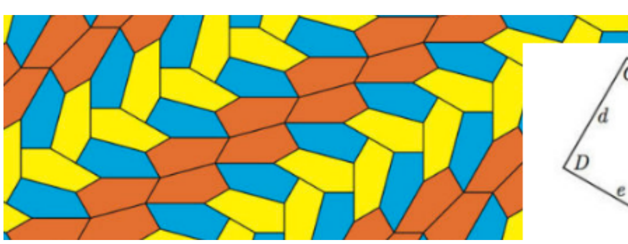
Vu du sol, un avion se déplace vers le nord-ouest à une vitesse constante de 250 miles par heure. Sachant qu'il est poussé par un vent d'est de 50 miles par heure, quelle serait la vitesse de l'avion s'il n'y avait plus de vent ?

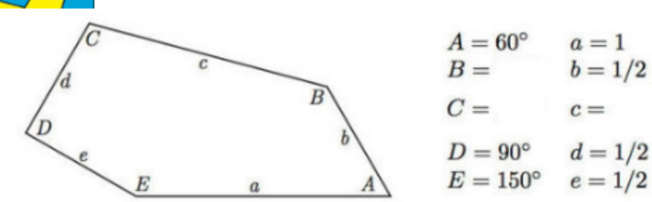
**Exercice 6**




Deux remorqueurs amènent un navire dans un port. Le remorqueur le plus puissant génère une force de 20000 $N$ et le plus petit une force de 16000 $N$. Le navire suit une ligne droite $l$. Calculer l'angle que forme le plus puissant remorqueur avec la droite $l$.

**Exercice 7**






Un nouveau type de pentagone pouvant paver le plan a été découvert en 2015. Que valent les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ ? Quelle est la longueur du côté $c$ ?

### 1.1.3 Produit scalaire et vectoriel

**Exercice 1 : les bases du produit scalaire**

Soient deux vecteurs $\vec{v}(2,-3)$ et $\vec{w}(5,3)$. Calculer en utilisant le produit scalaire

1. $\vec{v} \cdot \vec{w}$
2. $\vec{w} \cdot \vec{v}$
3. $\vec{v} \cdot \vec{v}$
4. $\vec{w} \cdot \vec{w}$
5. $||\vec{v}||$
6. $||\vec{w}||$

**Exercice 2 : problème**

Un bateau veut atteindre le point de la rive opposée situé exactement en face de lui. La vitesse du courant est de 3 $km/h$. Le bateau est capable de maintenir une vitesse constante de 20 $km/h$. Selon quel angle par rapport à la ligne directe doit être dirigé le bateau pour qu'il atteigne son objectif ?

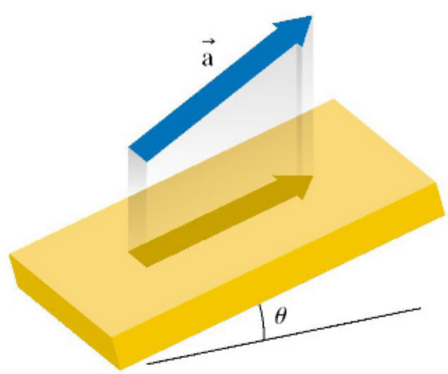
Si la rivière a une largeur de 0,5 $km$, combien de temps durera la traversée ?

**Exercice 3 : perpendicularité**

Trouver $v_x$ tel que $\vec{v}(v_x,-1)$ et $\vec{w}(2,3)$ soient perpendiculaires.

**Exercice 4 : application du produit scalaire**

On utilise le calcul vectoriel en informatique pour calculer la longueur des ombres sur les surfaces plates. On peut représenter la longueur des objets par le vecteur $\vec{a}$. Sur la figure ci-dessous, une source lumineuse éclaire un objet et projette son ombre sur le sol verticalement. Le sol forme un angle $\theta$ avec l'horizontale.




Calculer la longueur de l'ombre sur le sol pour

1. $\vec{a}(3;5),\ \theta = 0^o$ 2. $\vec{a}(25,7;-3,9),\ \theta = 12^o$ 3. $\vec{a}(-13,8;19,4),\ \theta = -17^o$

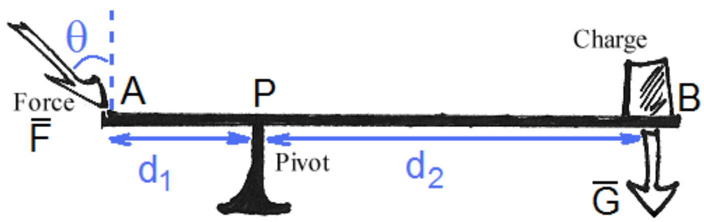
**Exercice 5 : les bases du produit vectoriel**

Calculer $||\vec{a} \times \vec{b}||$ si $||\vec{a}|| = 6$, $||\vec{b}|| = 5$ et l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut $30^o$.

**Exercice 6 : produit vectoriel et produit scalaire**

Que vaut la norme du produit vectoriel $\vec{v}(2,-3) \times \vec{w}(5,3)$ ?

**Exercice 7 : introduction à la statique**




Le dispositif ci-dessus présente les dimensions suivantes : $d_1 = 20\ cm$, $d_2 = 65\ cm$. Le poids $\vec{G}$ de la charge vaut $50\ N$ et la force $||\vec{F}|| = 350\ N$.

1. Calculer la norme du produit vectoriel $||\vec{PB} \times \vec{G}||$.
2. Calculer la norme du produit vectoriel $||\vec{PA} \times \vec{F}||$ avec $\theta = 0$.
3. Que devrait valoir l'angle $\theta$ pour que ces deux normes $||\vec{PB} \times \vec{G}||$ et $||\vec{PA} \times \vec{F}||$ soient égales ?

### 1.1.4 Exercices récapitulatifs et de drill

**Exercice 1 : combinaisons linéaires et produit scalaire**

Soient 2 vecteurs $\vec{a} \equiv (-6,0)$ et $\vec{b} \equiv (3,4)$. Calculer et illustrer graphiquement

1. $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$, $2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{a}$
2. les normes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$
3. l'angle compris entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, entre $\vec{a}$ et $\vec{a}+\vec{b}$, entre $\vec{b}$ et $\vec{a}+\vec{b}$, entre $\vec{a}+\vec{b}$ et $\vec{a}-\vec{b}$, entre $\vec{a}-\vec{b}$ et $\vec{b}-\vec{a}$

**Exercice 2 : projections orthogonales**

Soient 2 vecteurs $\vec{a} \equiv (-6,0)$ et $\vec{b} \equiv (3,4)$. Calculer les projections orthogonales suivantes et illustrer graphiquement

1. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sur l'axe $Ox$
2. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sur l'axe $Oy$
3. $\vec{a}$ sur $\vec{b}$
4. $\vec{b}$ sur $\vec{a}$
5. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sur la droite d'équation $d \equiv y = 2x+3$
6. $\vec{a}+\vec{b}$ sur l'axe $Ox$

7. $\vec{a}+\vec{b}$ sur l'axe $Oy$
8. $\vec{a}+\vec{b}$ sur la droite d'équation $d \equiv y = 2x+3$
9. $\vec{a}+\vec{b}$ sur la droite d'équation $d \equiv y = -x+1$

**Exercice 3 : produit scalaire**

Soient les vecteurs $\vec{u} \equiv (2,3)$, $\vec{v} \equiv (-4,5)$, $\vec{w} \equiv (2,-4)$, $\vec{x} \equiv (1,0)$, $\vec{y} \equiv (0,1)$ et $\vec{z} \equiv (1,1)$. Calculer

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $\vec{w}\cdot\vec{x}$, $\vec{x}\cdot\vec{y}$, $\vec{y}\cdot\vec{z}$, $\vec{z}\cdot\vec{u}$
2. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$, $(\vec{u}+\vec{w})\cdot\vec{v}$, $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}$, $(\vec{w}-\vec{u})\cdot\vec{w}$, $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{z})$, $(\vec{u}-\vec{z})\cdot(\vec{z}-\vec{u})$, $(\vec{w}+\vec{v})\cdot(\vec{v}+\vec{z})$, $(\vec{u}+\vec{w})\cdot(\vec{z}-\vec{y})$

**Exercice 4 : vecteurs unitaires**

Sachant que $\vec{a} \equiv (-6,0)$ et $\vec{b} \equiv (3,4)$. Calculer

1. $\vec{1_a}$ et $\vec{1_b}$
2. le vecteur unitaire correspondant à $2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$
3. le vecteur unitaire $\vec{1_v}$ correspondant à $\vec{v} \equiv (\sin\theta, \cos\theta)$

**Exercice 5 : produit vectoriel et produit scalaire**

Soient les vecteurs $\vec{u} \equiv (2,3)$, $\vec{v} \equiv (-4,5)$, $\vec{w} \equiv (2,-4)$, $\vec{x} \equiv (1,0)$, $\vec{y} \equiv (0,1)$ et $\vec{z} \equiv (1,1)$. Calculer les normes des produits vectoriels suivants en utilisant, si c'est nécessaire, le produit scalaire pour obtenir l'angle $\alpha$ entre 2 vecteurs.

1. $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $\vec{w}\times\vec{x}$, $\vec{x}\times\vec{y}$, $\vec{y}\times\vec{z}$, $\vec{z}\times\vec{u}$
2. $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}$, $(\vec{u}+\vec{w})\times\vec{v}$, $(\vec{u}-\vec{v})\times\vec{w}$, $(\vec{w}-\vec{u})\times\vec{w}$, $(\vec{u}-\vec{v})\times\vec{v}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{w}+\vec{z})$, $(\vec{u}-\vec{z})\times(\vec{z}-\vec{u})$, $(\vec{w}+\vec{v})\times(\vec{v}+\vec{z})$, $(\vec{u}+\vec{w})\times(\vec{z}-\vec{y})$

**Exercice 6 : problème**

Soit un losange $ABCD$ où la longueur de la grande diagonale vaut $|AC| = 24\ cm$ et la longueur de la petite diagonale vaut $|BD| = 10\ cm$.

1. Que vaut la longueur du côté du losange ?
2. Que vaut l'angle $\alpha$ formé par les côtés $AB$ et $AD$ du losange ?
3. Que vaut l'angle $\beta$ formé par les côtés $BA$ et $BC$ du losange ?

4. Que vaut l'aire de ce losange ? (utiliser le produit vectoriel)

**Exercice 7 : problème**

Démontrer avec le produit scalaire que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires

## 1.2 Cinématique

### 1.2.1 Vitesse et accélération

**Exercice 1 : vitesse moyenne**

Un mobile a pour équation de position $r(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$ où $a = 1\ m/s^3$, $b = -1\ m/s^2$, $c = 10\ m/s$ et $d = -100\ m$. Calculer

1. la vitesse moyenne entre $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 10\ s$
2. la vitesse moyenne entre $t_1 = 5\ s$ et $t_2 = 15\ s$
3. la vitesse moyenne entre $t_1 = 10\ s$ et $t_2 = 20\ s$
4. la vitesse moyenne entre $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 20\ s$

**Exercice 2 : accélération moyenne**

Un mobile a pour équation de vitesse $v(t) = a\,t^2 + b\,t + c$ où $a = 3\ m/s^3$, $b = -2\ m/s^2$ et $c = 10\ m/s$. Calculer

1. l'accélération moyenne entre $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 10\ s$
2. l'accélération moyenne entre $t_1 = 5\ s$ et $t_2 = 15\ s$
3. l'accélération moyenne entre $t_1 = 10\ s$ et $t_2 = 20\ s$
4. l'accélération moyenne entre $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 20\ s$

**Exercice 3 : vitesse et accélération moyenne et instantannée**

Un mobile a pour équation

$$\begin{array}{ccc} \text{de position} & r(t) = & a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d \\ \text{de vitesse} & v(t) = & 3a\,t^2 + 2b\,t + c \\ \text{d'accélération} & acc(t) = & 6a\,t + 2b \end{array}$$

1. – Si l'accélération instantannée du mobile vaut $acc(t) = 2\ m/s^2$ à $t = 0\ s$
   – Si la vitesse instantannée du mobile vaut $v(t) = -51\ m/s$ à $t = 0\ s$
   – Si la position du mobile vaut $r(t) = 10\ m$ à $t = 0\ s$
   – Si la position du mobile vaut $r(t) = 100\ m$ à $t = 10\ s$

   Déterminer les constantes $a$, $b$, $c$ et $d$.

2. Calculer la vitesse moyenne et l'accélération moyenne du mobile pour les intervalles de temps

| $t_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_2$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 10 | 15 | 20 | 15 | 20 | 20 |

**Exercice 4 : vitesse et accélération moyenne et instantannée, dérivées**

$$\frac{d}{dt}(k\ t^n) = k\frac{d}{dt}(t^n) = k\ n\ t^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2}(k\ t^n) = k\frac{d^2}{dt^2}(t^n) = k\ n\frac{d}{dt}(t^{n-1}) = k\ n(n-1)t^{n-2}$$

$$\frac{d}{dt}(f(t)+g(t)) = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

1. Déterminer l'équation de la vitesse d'un mobile ayant $r(t) = 3t^4 - 6t^2$ comme équation de position
2. Calculer la vitesse instantannée pour $t = 0$, 5 et 10 $s$.
3. Calculer la vitesse moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0,5)$, $(0,10)$ et $(5,10)$ secondes.
4. Déterminer l'équation de l'accélération de ce mobile
5. Calculer l'accélération instantannée pour $t = 0$, 5 et 10 $s$.
6. Calculer l'accélération moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0,5)$, $(0,10)$ et $(5,10)$ secondes.

**Exercice 5 : vitesse et accélération moyenne et instantannée, dérivées**

$$\frac{d}{dt}(k\sin\omega t) = k\frac{d}{dt}(\sin\omega t) = k\ \omega\cos\omega t \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(k\cos\omega t) = k\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -k\ \omega\sin\omega t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(k\sin\omega t) = k\omega\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -k\ \omega^2\sin\omega t \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2}(k\cos\omega t) = -k\omega\frac{d}{dt}(\sin\omega t) = -k\ \omega^2\cos\omega t$$

1. Déterminer l'équation de la vitesse d'un mobile ayant $r(t) = 3\sin(\pi t)$ comme équation de position
2. Calculer la vitesse instantannée pour $t = 0$, 5 et 10 $s$.
3. Calculer la vitesse moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0,5)$, $(0,10)$ et $(5,10)$ secondes.
4. Déterminer l'équation de l'accélération de ce mobile
5. Calculer l'accélération instantannée pour $t = 0$, 5 et 10 $s$.
6. Calculer l'accélération moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0,5)$, $(0,10)$ et $(5,10)$ secondes.
7. Illustrer graphiquement le mouvement du mobile. De quel type de mouvement s'agit-il ?
   - mouvement circulaire uniforme ?
   - mouvement rectiligne uniforme ?

– mouvement rectiligne uniformément accéléré ?
– S'il ne s'agit d'aucun de ces mouvements, comment le décrire ?

**Exercice 6 : hodographe, dérivées, déplacement d'un mobile dans un plan**

Soit un mobile ayant comme équations paramétriques de position

$$\begin{cases} r_x(t) &= \frac{1}{8}t^3 - \frac{2}{5}t^2 + 2t - 10 \\ r_y(t) &= -5t + 17 \end{cases}$$

1. Faire un graphique du mouvement du mobile dans un repère orthonormé $Oxy$.
2. Tracer l'hodographe des vitesses entre $t = 0\ s$ et $t = 5\ s$.
3. Déterminer graphiquement la projection orthogonale sur l'axe $Ox$ de la distance atteinte par le mobile pour $t = 5$, 10, 15 et 20 $s$.
4. Déterminer graphiquement la projection orthogonale sur l'axe $Oy$ de la distance atteinte par le mobile pour $t = 5$, 10, 15 et 20 $s$.
5. Déterminer la distance atteinte par le mobile pour $t = 5$, 10, 15 et 20 $s$.
   – a) par calcul
   – b) en utilisant les résultats des projections orthogonales des points 3 et 4
6. Calculer la norme de la vitesse instantannée du mobile pour $t = 5$, 10, 15 et 20 $s$.
7. Calculer la norme de la vitesse moyenne du mobile pour les intervalles de temps

| $t_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_2$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 10 | 15 | 20 | 15 | 20 | 20 |

**Exercice 7 : problème**

Luke Skywalker part d'Aldébaran dans une navette et fonce dans un vortex. Il voyage alors à la vitesse moyenne de 150 fois la vitesse de la lumière pendant les 8 premières minutes de son déplacement, à 300 fois pendant les 3 minutes suivantes, etc (voir tableau). La navette s'immobilise dans la cour du château de Champignac-en-Cambrousse après 45 minutes de trajet.

| vitesse ($c = 3.10^8\ m/s$) | 150 | 300 | 600 | 400 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| intervalle de temps ($min$) | 8 | 3 | 7 | 15 | 12 |

Quelle distance totale Luke a-t-il parcouru d'Aldébaran à Champignac-en-Cambrousse ? Estimer cette distance en années-lumières, sachant q'une année lumière est la distance parcourue dans le vide par la lumière pendant une année terrestre (365,25 jours).

### 1.2.2 Mouvement rectiligne

**Exercice 1 : les bases, MRUA**

L'équation du mouvement rectiligne d'un mobile est $r(t) = -5t^2 + 5t + 10$ (unités SI). Calculer la vitesse du mobile à l'instant 5 $s$ et son accélération aux instants 0 et 10 $s$.

**Exercice 2 : problème, MRUA**

Un avion part du repos et s'élance pour décoller avec une accélération de 4 $m/s^2$. Calculer

1. la distance parcourue par l'avion après 5 $s$
2. la vitesse atteinte par l'avion après 5 $s$.

**Exerice 3 : problème, MRUA**

Au CERN, des protons émergent d'un accélérateur de particules linéaire de 0,8 $km$ avec une vitesse de $2,5.10^8$ $m/s$.

1. Si l'accélération est uniforme, quelle est sa valeur ?
2. Combien de temps faut-il aux protons pour parcourir l'accélérateur ?

**Exercice 4 : problème, MRUA**

Un train a une vitesse initiale de 30 $m/s$. Il freine et s'arrête avec une décélération uniforme en 50 secondes.

1. Que vaut la décélération du train ?
2. Quelle distance parcourt-il avant de s'arrêter ?

**Exercice 5 : problème, MRUA**

Une voiture roule à 15 $m/s$ et percute un mur de pierres.

1. Un passager portant sa ceinture de sécurité s'immobilise sur une distance de 1 $m$. Que vaut la décélération moyenne de cette personne ?
2. Le nez d'un autre passager, sans ceinture de sécurité frappe le pare-brise et s'immobilise sur une distance de $0,01$ $m$. Quelle est la décélération moyenne subie par le nez de ce passager ?

**Exercice 6 : mouvement rectiligne dans un plan**

Un mobile se déplace dans un plan $Oxy$. Ses équations paramétriques du mouvement sont (en unités SI)

$$\begin{cases} r_x(t) &= \frac{t^2}{2} \\ r_y(t) &= 1 - t^2 \end{cases}$$

1. Représenter, à l'échelle (identique pour chaque axe), les positions occupées par le mobile entre $t = 0$ et 1 seconde.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire dans le plan.
3. Déterminer les équations de la vitesse et de l'accélération. Que peut-on dire des vecteurs vitesse et accélération ?
4. Calculer les coordonnées de ces vecteurs et leur norme à l'instant $t = 0,4\ s$.
5. Représenter ces vecteurs à cet instant.

**Exercice 7 : problème**

Près de la planète Omicron Perseï 8, un tyran sanguinaire du nom de Rrrrh se prépare à envoyer un missile autoguidé à plasma en direction de la terre. Le missile, initialement au repos, est mis à feu avec une accélération constante et parcourt une distance de $0,5$ années-lumières. Son moteur à distortion spatio-temporelle lui permet d'acquérir une vitesse de croisière de $0,9$ années-lumières par seconde, après quoi sa vitesse reste constante.

1. Que vaut l'accélération du missile ?
2. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir la distance de $0,5$ années-lumières et détruire la terre, située à $1486,37$ années-lumières ?

### 1.2.3 chute d'un corps

**Exercice 1**

Quelle doit être la hauteur d'une chute d'eau pour que l'eau atteigne la roue d'une turbine avec une vitesse verticale de 30 $m/s$ ? (On néglige les forces de frottement)

**Exercice 2**

Colt Silver tombe à pic d'un pont et atteint l'eau après 5 $s$. On néglige les forces de frottement.

1. Quelle est la vitesse de l'homme qui tombe à pic au moment où il touche l'eau ?
2. Quelle est la hauteur du pont ?

**Exercice 3**

Un obus anti-aérien est tiré à la verticale avec une vitesse initiale de 500 $m/s$. On néglige les forces de frottement.

1. Calculer la hauteur maximum atteinte par l'obus
2. Quel temps lui faut-il pour atteindre cette hauteur ?
3. A quel moment l'obus atteindra-t-il une hauteur de 1000 $m$ ?

4. A quel moment l'obus atteindra-t-il une hauteur de 3000 $m$ ?

**Exercice 4**

Une bombe à eau remplie de peinture est lancée vers le bas par un psychopathe, en direction d'un pare-brise de Rolls-royce avec chauffeur, du haut d'un des ponts qui passent au dessus du ring de Charleroi, avec une vitesse initiale de 10 $m/s$. Elle atteint le pare-brise après 3 $s$. On néglige les forces de frottement.

1. Qelle est la vitesse de la bombe à eau lorsqu'elle touche le pare-brise et aveugle le chauffeur ?
2. Quelle est la hauteur du pont ?
3. A quelle distance du pont se trouvait la Rolls-royce si celle-ci se déplaçait à la vitesse constante de 90 $km/h$ avant l'impact ?

**Exercice 5**

Une voiture qui se déplace à la vitesse de 108 $km/h$ entre en collision frontale avec une autre voiture roulant à 90 $km/h$. Les deux vitesses s'additionnant, de quelle hauteur faudrait-il que les voitures tombent pour subir le même choc ? (On néglige les forces de frottement)

**Exercice 6**

Un enfant, se trouvant à côté d'un immeuble, lance une balle vers le haut avec une vitesse de 15 $m/s$. (On néglige les forces de frottement)

1. Quelle hauteur la balle atteindra-t-elle ?
2. Combien de temps faudra-t-il à la balle pour atteindre cette hauteur ?
3. Un autre enfant se penche à la fenêtre, à 6 $m$ de haut, et tente d'attraper la balle. A quel moment la balle passera-t-elle à sa hauteur ?
4. De combien de temps disposera-t-il pour se concentrer s'il rate la balle la première fois ?

**Exercice 7**

Une fusée d'essai pilotée par Clint Eastwood est lancée à la verticale, à partir du sol, avec une accélération constante de 50 $m/s^2$. Elle épuise son carburant après 4 $s$. Grâce aux techniciens d'Hollywood, nous pouvons négliger la résistance de l'air. Trouver

1. la hauteur atteinte par la fusée lorsque le moteur s'arrête,
2. la hauteur maximum atteinte par la fusée,
3. la durée du vol jusqu'à la hauteur maximum.
4. Si Clint Eastwood est capable de signer 37 autographes à la minute (son organisme supporte les accélérations à la perfection), combien d'autographes pourra-t-il signer du départ de la fusée jusqu'à son amerissage au milieu de l'océan pacifique ?

### 1.2.4 Mouvement circulaire

**Exercice 1 : les bases, MCU**

Le rayon de l'orbite lunaire vaut environ 384000 $km$, la période de révolution de la lune autour de la terre est de $T = 27,32$ jours.

1. Déterminer l'accélération normale de la lune.
2. Déterminer sa vitesse instantannée.
3. Déterminer sa vitesse angulaire.

**Exercice 2 : les bases, MCU**

Le rayon de la terre fait en moyenne 6380 $km$.

1. Calculer l'angle balayé par un méridien, en 6 $h$, par suite du mouvement de rotation de la terre.
2. Calculer la vitesse angulaire d'un point situé à l'équateur.
3. Calculer la vitesse linéaire d'un point situé à l'équateur.
4. Calculer la vitesse linéraire d'un point situé à la latitude de $50^o$.

**Exercice 3 : MCU, équations du mouvement**

Un mobile se déplace dans un plan $Oxy$. Les équations paramétriquesdu mouvement dans ce plan sont

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r_x(t) & = & 2\sin 2\pi t \\ r_y(t) & = & 2\cos 2\pi t \end{array} \right. \quad \text{exprimées en } cm$$

1. Ecrire l'équation de la trajectoire du point.
2. Calculer la vitesse du point à un instant quelconque, en tirer les conclusions.
3. Calculer l'accélération en fonction du temps et la représenter aux instants $t = 0$, $T/4$, $T/2$, $3T/4$ et $T$ secondes (où $T$ est la période du mouvement).
4. Représenter graphiquement l'hodographe des vitesses.

**Exercice 4 : MCU, équations du mouvement**

On établit entre les plaques verticales d'un oscilloscope une tension $y = A\sin\omega t$ et entre les plaques horizontales une tension $x = A\sin(\omega t + \phi)$

1. Quel type de courbe observe-t-on si $\phi = \frac{\pi}{2}$ ?
2. Que devient cette courbe si $\phi = 0$ ?

**Exercice 5 : problème**

Une bille métallique de faibles dimensions est suspendue à un fil de longueur 1 $m$. On le fait tourner autour d'un axe vertical de telle façon que la bille décrit une trajectoire circulaire dans un plan horizontal.

Le fil fait un angle de $30^o$ avec l'axe de rotation. Quelle est la période du mouvement de la bille ?

**Exercice 6 : problème**

L'aviateur Howard Hughes, interprété par Léonardo Di Caprio, effectue un looping dans un plan vertical en 10 $s$. Le rayon du cercle décrit vaut 100 $m$.

1. Que vaut la vitesse angulaire (exprimée en $rad/s$) ?
2. Quelle est l'accélération radiale de Léonardo Di Caprio ?
3. En supposant que l'accélération de la force fictive exercée sur le pilote (force centrifuge) est l'opposé son accélération normale, quelle devrait être la vitesse minimum de l'avion pour éviter à notre ami de tomber lorsque celui-ci a la tête en bas ?

**Exercice 7 : problème**

Un motocycliste tourne sur une plaine horizontale à la vitesse de 54 $km/h$. Quel est le rayon de la trajectoire circulaire qu'il peut décrire, sachant qu'il peut tout au plus s'incliner de $25^o$ par rapport à la verticale ? (Conseil : considérer l'angle entre l'accélération de la gravité $\vec{g}$ et l'accélération normale $\vec{a}_n$)

### 1.2.5 Mouvement d'un projectile sans frottements ($P_{tir}$)

**Exercice 1**

Quelle est la vitesse initiale d'une sauterelle au moment où elle quitte le sol, si l'angle du saut est $55^o$ et si la portée est $0,8$ $m$ ?

**Exercice 2**

Mpenza frappe sur un ballon placé au sol. Il manque et sa chaussure part avec une vitesse initiale de 25 $m/s$ en faisant un angle de $30^o$ avec l'horizontale.

1. Quand la chaussure atteint-elle sa hauteur maximum ?
2. Si les buts de De Wulf se trouvent à 35 $m$ d'où il shoote, sa chaussure menacera-t-elle le célèbre gardien ?
3. Que vaut l'angle de lancement pour que la portée de la chaussure soit maximale ?
4. Si Mpenza avait tiré avec cet angle optimal, sa chaussure serait-elle entrée dans les buts d'une hauteur de $2,5$ $m$ ?

**Exercice 3**

Un point se déplace dans un plan $Oxy$. Les équations paramétriques de sont mouvement sont données par

$$\begin{cases} r_x(t) & = & 5t+2 \\ r_y(t) & = & -5t^2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation de sa trajectoire.
2. Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération à instants $t = 0$ et 6 $s$.
3. Représenter graphiquement la trajectoire du point.
4. Représenter graphiquement l'hodographe des vitesses.

**Exercice 4**

Un obus est tiré d'un mortier artisanal avec un angle de $75^o$ et une vitesse initiale de 70 $m/s$.

1. Calculer le temps de montée de l'obus.
2. Calculer la hauteur maximum atteinte par l'obus.
3. Calculer la protée de l'obus.
4. Déterminer la portée maximum correspondant à l'angle de tir optimal.
5. Quelle hauteur maximum peut atteindre l'obus ? Est-ce sans risque ?
6. Faire le graphique de la parabole de sûreté.
7. Si un tank yankee se trouve sur une hauteur de 18 $m$ et à une distance de 400 $m$, pourra-t-il être détruit par le mortier des combattants de la liberté de la république démocratique de Los Bananas ?

**Exercice 5**

Une balle est lancée horizontalement d'une fenêtre située à 15 $m$ du sol à la vitesse de 20 $m/s$.

1. Quand la balle touchera-t-elle le sol ?
2. Où la balle va-t-elle retomber ?

**Exercice 6**

Thomas Beckett, un sniper inexpérimenté planque depuis 2 semaines dans l'appartement situé en face de l'hôtel Plazza. Il tient sa cible dans sa ligne de mire. Sa cible, un homme d'une quarantaine d'années, chauve et bedonnant, qui prend l'air appuyé sur le balcon de la terrasse de son penthouse de Las Vegas, se trouve à 200 $m$, à la même hauteur que le fusil. Si la balle quitte le canon avec une vitesse initiale de 500 $m/s$, de combien la balle manquera-t-elle sa cible ?

**Exercice 7**

Un bombardier, au cours d'une descente en piqué à $53^o$ par rapport à la verticale, laisse tomber une bombe à une altitude de 730 $m$. La bombre explose au sol 5 $s$ plus tard.

1. Quelle était la vitesse du bombardier lorsqu'il a largué la bombe ?
2. Quelle était la distance horizontale parcourue par la bombe ?
3. Quelles étaient les composantes horizontale et verticale de la vitesse de la bombe, juste avant de toucher le sol ?

### 1.2.6 Exercices récapitulatifs

**Exercice 1**

Un point se déplace dans un plan $Oxy$. Les équations paramétriques de sont mouvement sont données par (en unités SI)

$$\begin{cases} r_x(t) &= t-2 \\ r_y(t) &= t^2+4 \end{cases}$$

1. Représenter quelques positions du point dans le plan entre $-3$ et $2$ $s$.
2. Représenter les vecteurs vitesse et accélération aux instants $0$, $-1$ et $2$ $s$.
3. Déterminer l'équation de la trajectoire du point.

**Exercice 2**

Un joueur de base-ball rattrape une balle qui a une vitesse de $30$ $m/s$.

1. S'il ne déplace pas la main, la balle s'immobilise dans son gant en parcourant une distance de $1$ $cm$. Que vaut la décélération moyenne ?
2. Si, en attrapant la balle, il déplace la main de manière à ce que la balle s'arrête sur une distance de $10$ $cm$, que vaut la décélération ?

**Exercice 3**

Un sac de sable lâché d'un ballon, atteint le sol après $15$ $s$. Quelle était la hauteur du ballon si, initialement, celui-ci

1. était immobile ?
2. descendait à une vitesse de $20$ $m/s$ ?
3. montait à une vitesse de $20$ $m/^s$ ?

**Exercice 4**

Une balle est fixée à l'une des extrémités d'un fil de $24$ $cm$ de longueur, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On l'oblige à décrire une circonférence dans un plan horizontal, centrée sur la verticale passant par le point fixe. Déterminer la vitesse et l'accélération de la balle lorsque le fil forme un angle de $30^o$ avec la verticale.

**Exercice 5**

Un membre d'une des triades lâche un indicateur de la police de Hong-Kong dans un puits et on l'entend toucher l'eau $3$ $s$ plus tard. Si le son se propage à la vitesse de $344$ $m/s$, quelle est la profondeur du puits ?

**Exercice 6**

Le colonel Austin, l'homme qui valait 3 milliards, tente d'attraper un homme qui s'enfuit à bord d'une voiture de sport. La distance entre eux est de 100 $m$ au moment où la voiture commence son accélération. Cette accélération est constante et vaut 5 $m/s^2$. Les jambes bioniques du colonel Austin lui permettent de courir à la vitesse de 30 $m/s$.

1. Arrivera-t-il à arrêter les méchants et à sauver le monde ?
2. Si non, quelle vitesse minimale le super ordinateur cybernétique de Lee Majors devra-t-il imposer aux jambes pour permettre à l'acteur de rattraper les méchants et empêcher la $3^e me$ guerre mondiale ?

**Exercice 7**

Supposons que Batman soit initialement suspendu la tête en bas, ses pieds se trouvant à 10 $m$ au-dessus du sol et à 15 $m$ à droite d'un canon qui pointe sur lui. Batman commence à tomber au moment où le joker coupe la corde qui le suspend et actionne le canon. Le boulet part avec une vitesse de 20 $m/s$ et un angle de $10^o$ avec l'horizontale

1. Quelles sont les composantes verticales et horizontales de la vitesse initiale du boulet ?
2. Combien de temps faut-il pour que la position horizontale du boulet varie de 15 $m$ ?
3. Quelles sont, à cet instant, les positions verticales du boulet et de batman ?
4. Est-ce la fin de batman, si celui-ci mesure $1,80$ $m$ ?