Première partie

Mécanique rationnelle

Table des matières

I Mécanique rationnelle **1**

1 Calcul vectoriel **8**

1.1 Scalaires et vecteurs 8
1.1.1 Scalaire : 8
1.1.2 Vecteur (lié) : 9
1.1.3 Vecteur libre : 10
1.1.4 Vecteur glissant : 11
1.2 Opérations sur les vecteurs 12
1.2.1 Addition de 2 vecteurs 13
1.2.2 Soustraction de 2 vecteurs 16
1.2.3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire 19
1.2.4 Combinaison linéaire de vecteurs 21
1.2.5 Norme d'un vecteur 22
1.2.6 Produit scalaire de 2 vecteurs 23
1.2.7 Produit vectoriel de 2 vecteurs 30
1.2.8 Identités de Lagrange 35

2 Cinématique du point **38**

2.1 Dérivées, trajectoire, vitesse et accélération 38
2.1.1 Trajectoire 38
2.1.2 Vitesse moyenne et vitesse instantannée 39
2.1.3 Accélération moyenne et accélération instantannée 42
2.1.4 Equation différentielle du mouvement 47
2.2 Mouvements particuliers 48
2.2.1 Mouvement rectiligne uniforme 48
2.2.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré 49
2.2.3 Mouvement circulaire uniforme 53
2.2.4 La parabole de tir 56
2.3 Applications de la cinématique 67

3 Statique **69**

3.1 Degrés de liberté 70
3.2 Moments de forces, bras de leviers 71
3.2.1 Moment de force 75

3.2.2 Couple 77
3.2.3 Levier et avantage mécanique 78
3.3 Equilibre statique 82
3.3.1 Résultante des forces 82
3.3.2 Moment résultant 83
3.3.3 Centre de masse, stabilité 84
3.4 Applications de la statique 87

4 Dynamique du point 88
4.1 Lois de Newton 88
4.1.1 La masse redéfinie 89
4.1.2 Masse volumique, densité, force, poids 90
4.1.3 Les 3 lois de Newton : inertie, force et accélération, action et réaction 95
4.2 Mouvements particuliers et gravitation 102
4.2.1 Mouvement rectiligne uniforme (MRU) 102
4.2.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) 103
4.2.3 Mouvement circulaire uniforme (MCU) 104
4.2.4 Mouvement circulaire accéléré : cas général 107
4.2.5 La parabole de tir (MRU + MRUA) 108
4.2.6 chute libre d'un corps avec frottements 110
4.2.7 La parabole de tir avec frottements 113
4.2.8 Poids et forces de gravitation 115
4.3 Lois de Kepler et applications de la dynamique 117
4.3.1 Forme newtonienne de la troisième loi de Kepler 120
4.3.2 Application : Découverte de nouveaux corps célestes 120

5 Travail, puissance, énergie 121
5.1 Travail 121
5.1.1 Cas particuliers 122
5.2 Energie 123
5.2.1 Energie potentielle de pesanteur 124
5.2.2 Energie cinétique 124
5.2.3 Autres formes d'énergie 126
5.3 Puissance 128
5.3.1 Puissance d'une force 130
5.3.2 Puissance d'un couple 130
5.4 Conversion énergie(s) - travail 130
5.4.1 Loi de conservation 130
5.4.2 Loi de transformation de l'énergie mécanique 131
5.5 Application : Exemple de la chute d'un corps 132

6 Mécanique relativiste et mécanique quantique **133**
6.1 Mécanique quantique 133
6.1.1 Paradoxes de la mécanique quantique : le chat de Schrodinger 134
6.2 Mécanique relativiste 135
6.2.1 Dilatation du temps 136
6.2.2 Contraction des longueurs 137
6.2.3 Relativité de la simultanéité : le paradoxe du train 137

7 Exercices **139**
7.1 Calcul vectoriel 139
7.1.1 Les bases 139
7.1.2 Problèmes 141
7.1.3 Produit scalaire et vectoriel 143
7.1.4 Exercices récapitulatifs et de drill 144
7.2 Cinématique 146
7.2.1 Vitesse et accélération 146
7.2.2 Mouvement rectiligne 149
7.2.3 chute d'un corps 150
7.2.4 Mouvement circulaire 152
7.2.5 Mouvement d'un projectile sans frottements (P_{tir}) 153
7.2.6 Exercices récapitulatifs 155
7.3 Statique 157
7.3.1 Moments de forces et équilibre des corps solides 157
7.3.2 Centre de gravité 159
7.3.3 Réactions de liaison 160
7.3.4 Exercices récapitulatifs 162
7.4 Dynamique 164
7.4.1 Densité - masse - masse volumique 164
7.4.2 Poids et gravitation 166
7.4.3 Exercices récapitulatifs 167
7.5 Théorèmes énergétiques 168
7.5.1 Travail 168
7.5.2 Energie cinétique et potentielle 169
7.5.3 Puissance 170
7.5.4 Conversion énergie - travail 171
7.5.5 Exercices récapitulatifs 172

	~~Force~~	**Force**	**Energie**
~~Temps~~	Calcul vectoriel : *outil abstrait*	Statique : *abstraction du temps*	Théorèmes énergétiques
Temps	Cinématique : *abstraction des causes*	Dynamique	

Dans le langage courant, la mécanique est le domaine des machines, moteurs, véhicules, organes (engrenages, poulies, courroies, vilebrequins, arbres de transmission, pistons, ...), bref, de tout ce qui produit ou transmet un mouvement, une force, une déformation.

On parle ainsi de mécanique automobile, mécanique rationnelle, mécanique quantique, mécanique relativiste, etc.

Selon Newton, la science mécanique est la fusion de la physique et de l'astronomie. Du point de vue historique, donc, la physique est une partie de la mécanique.

Actuellement, la mécanique est la branche de la science qui étudie le mouvement des systèmes matériels et leurs déformations, en relation avec les forces qui provoquent ou modifient ce mouvement ou ces déformations. Elle peut être considerée comme une partie de la physique. Elle a donc pour but de décrire et prévoir les mouvements de matières inertes, de corps célestes ou quantiques ou d'organismes vivants (biomécanique) et comprend notamment :

- La mécanique classique, dite aussi newtonienne, qui traite de l'étude cinématique (étude du mouvement sans s'intéresser à sa cause), statique et dynamique d'un système, que ce soit un système simple (mécanique du point) ou un système complexe (mécanique générale).
- La mécanique céleste étudie les mouvements des corps célestes.
- La mécanique statistique étudie des systèmes à grand nombre de composants, comme par exemple les gaz, composés de milliards de molécules.
- La mécanique physique traite les systèmes qui ont des comportements physiques comme la mécanique des fluides, la mécanique des milieux continus, correspondant à une mécanique des systèmes déformables.
- La mécanique quantique traite du comportement des systèmes physiques à l'échelle des particules.
- La mécanique relativiste traite les systèmes se déplaçant à des vitesses proches de celle de la lumière.
- La mécanique statique est la branche de la physique qui étudie les systèmes mécaniques au repos dans un repère galiléen.
- La biomécanique traite de la déformation des corps vivants, notamment du corps humain par exemple en situation de chocs (ex : crash véhicule) ou d'accélérations importantes (ex : combat aérien).
- L'acoustique physique est la branche de la mécanique qui étudie les petits mouvements de vibration dans les solides, les liquides ou les gaz.
- La mécatronique traite de l'ingénierie d'objets mécaniques actifs, dont la cinématique, les déformations, les comportements dynamiques sont mesurés voire controlés par des dispositifs électroniques (ex : capteurs, calculateurs, actionneurs) et numériques (ex : logiciels).

Avant de devenir une science à part entière, la mécanique a longtemps été une section des mathématiques.

De nombreux mathématiciens y ont apporté une contribution souvent décisive, parmi eux des grands noms tels que Euler, Cauchy, Lagrange, ... Jusqu'à la fin du XVIII^e siècle, la mécanique a été le domaine applicatif naturel des mathématiques, le domaine dans lequel on pouvait tenter de faire entrer les faits expérimentaux dans le cadre rigoureux des mathématiques. Inversement, certains problèmes de mécanique ont donné naissance ou orienté l'intérêt des mathématiciens vers des théories telles que la géométrie ou les équations différentielles.

La mécanique classique peut en effet être écrite (formalisée) de différentes manières. La plus courante et celle utilisée pour ce cours est la formulation de Newton, qui utilise la notion de force. Elle est de loin la plus simple lorsqu'il s'agit de considérer un problème concret et c'est pourquoi c'est celle qui est enseignée. Mais pour pouvoir traiter des problèmes plus complexes ou plus finement, et pour pouvoir faire des démonstrations rigoureuses, cette formulation n'est pas la plus pratique.

La mécanique analytique, initiée dès le XVIIIe siècle, regroupe ainsi différentes formulations très mathématisées de la mécanique classique, notamment les mécaniques de Hamilton et de Lagrange. Toutes ces formulations sont équivalentes.

Historiquement, la statique a été le premier domaine étudié par les savants. De l'antiquité jusqu'au Moyen Âge des notions fondamentales telles que l'équilibre, le célèbre bras de levier d'Archimède ou encore la notion beaucoup plus abstraite de force ont été étudiées. Plus tard, l'intérêt s'est porté vers la dynamique, c'est-à-dire les phénomènes qui régissent le mouvement des solides, domaine dans lequel Galilée, pour la chute des corps, et Newton dans ses célèbres *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ont apporté des contributions décisives.

L'époque contemporaine et le positivisme scientifique, qui succédèrent à la révolution française, modifièrent en profondeur le contenu des enseignements dispensés en France. En effet, la pensée en vogue considérait que seules la connaissance et l'étude des faits vérifiés par l'expérience scientifique pouvaient décrire (et non expliquer) les phénomènes du monde. Remarquons que cette conception est, encore de nos jours, parfois associée une foi quasi religieuse dans le progrès scientifique et la philosophie mécaniste.

Dès lors, la mécanique classique dans sa formulation newtonienne était du ressort des professeurs de mathématiques et non des physiciens. Elle présentait plusieurs avantages. Peu onéreuse, elle ne nécessitait qu'un papier et un crayon, au lieu de coûteuses expériences et démonstrations en laboratoire. Par ailleurs, elle permettait de renforcer le cours de mathématiques, sous couleur de physique.

En outre, de par la rigueur des mathématiques, elle véhiculait tacitement les idées suivantes :
- Qu'il y a des vérités définitives en sciences.
- Que la forme aboutie de la connaissance scientifique est mathématique.
- Que tous les phénomènes de la nature sont réductibles à un principe de conservation (ou d'invariance) très général, de nature plus ou moins déiste [1].

On cherchait en effet dès la deuxième moitié du XVIII^{e} siècle à justifier le progrès de l'esprit humain par le développement des « sciences positives » telles que les mathématiques, physique, chimie, etc., sensées remplacer les croyances théologiques ou les explications métaphysiques.

1. Le déisme, est la croyance en un Dieu créateur, mais pas en son instrumentalisation religieuse. Les déistes ne croient ni aux prêtres, ni à une « Église », ni à des textes sacrés ou des messies. Le déisme consiste donc en l'affirmation, hors de toute révélation religieuse, de l'existence d'un être suprême dont la nature et les propriétés restent inconnaissables.

En devenant « positif », l'esprit renoncerait donc à la question « pourquoi ? », c'est-à-dire à chercher les causes premières des choses. Il se limiterait au « comment », c'est-à-dire à la formulation des lois de la nature, exprimées en langage mathématique, en dégageant, par le moyen d'observations et d'expériences répétées, les relations constantes qui unissent les phénomènes, et permettent d'expliquer la réalité des faits sans argumenter sur le sens de la vie.

La mécanique quantique apporta une révolution à cette manière de penser tant nous disposons de moyens probabilistes de prédire le comment sans avoir la moindre idée du modèle nous suggérant le pourquoi. Il en va de même pour la physique des particules. Pourquoi ces charges et masses de particules et pas d'autres ? Pourquoi ces constantes universelles et pas d'autres ? Pourquoi ces lois de la physique et pas d'autres ?

Refuser d'envisager ces questions serait mettre fin au processus de recherche en physique, ainsi qu'à une chance d'assouvir la très grande curiosité humaine en ce domaine. Ce serait aussi le moyen assuré de n'en jamais trouver les réponses, si réponses il y a.

Au début du XX^e siècle, la mécanique relativiste d'Einstein a permis de combler les lacunes de la mécanique classique. Toutefois, il s'avère que cette dernière constitue un cas particulier de la théorie de la relativité dès lors que l'on considère des vitesses relativement faibles. On a alors défini la mécanique newtonienne, ou mécanique classique, comme le domaine de la physique qui décrit les mouvement des corps à des vitesses faibles devant celle de la lumière (soit très inférieures à 300 000 km/s environ). Dans ce domaine, tout en étant plus simple, elle fournit des résultats très voisins de ceux de la relativité restreinte, adaptée quant à elle à tous les domaines de vitesse, tant que celle-ci reste intérieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

Conceptuellement, la mécanique a donc connu trois révolutions :

1. la prise de conscience que c'est l'accélération qui est proportionnelle à la force (on pensait initialement que c'était la vitesse),
2. la prise de conscience que le mouvement des planètes est régi par le même phénomène que la chute des corps, la fameuse attraction universelle de Newton,
3. la modélisation de la gravitation non plus par une force, mais par une déformation de l'espace avec la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Dans ce cours, la mécanique regroupera le calcul vectoriel, c'est-à-dire l'outil mathématique abstrait utilisé pour résoudre des problèmes relatifs aux 3 matières suivantes : la cinématique du point (qui décrit le mouvement d'un corps en faisant abstraction de ce qui cause ce mouvement), la statique (qui étudie les positions d'équilibre, autrement dit les systèmes dont l'évolution ne dépend pas du temps) et la dynamique (qui décrit le mouvement d'un corps connaissant les causes de ce mouvement).

Les théorèmes énergétiques constituent une manière différente d'aborder certains problèmes relatifs à la mécanique, aboutissant à des résultats identiques. Leur utilisation permet de simplifier la résolution de certains problèmes.

Chapitre 1

Calcul vectoriel

Pour étudier la mécanique, nous allons développer un outil relativement abstrait car il nous permettra d'identifier une vitesse, une trajectoire, une accélération, une force, bref tout ce qui pourrait concerner un déplacement, sans notion de masse, ni de temps.

Cet outil, le *calcul vectoriel*, fut développé dans les débuts du XIX^e siècle dans le but de faciliter les calculs géométriques. La géométrie est donc rendue plus calculatoire que démonstrative par l'emploi des vecteurs.

1.1 Scalaires et vecteurs

En mathématiques, le vecteur est un objet véhiculant plus d'information que les nombres usuels, ou scalaires, et sur lequel on peut effectuer des opérations simples.

À l'origine, un vecteur est un objet de la géométrie euclidienne. À deux points, Euclide faisait seulement correspondre leur distance. Or un couple de points porte une charge d'information bien plus grande. Ils définissent aussi une direction et un sens. Le vecteur synthétise l'ensemble de ces informations.

La notion de vecteur peut être définie en dimension 2 (vecteur du plan), 3 (vecteur de l'espace euclidien usuel). Elle se généralise à des espaces de dimension n, ou à des espaces de dimension infinie. C'est sur cette notion, devenue abstraite, que se fonde la branche des mathématiques appelée algèbre linéaire.

1.1.1 Scalaire :

Le mot scalaire provient du latin scala qui signifie échelle. C'est une quantité qui a une magnitude mais pas de direction, à l'opposé des vecteurs. Symboliquement, on le représente en général par une lettre.

En mathématiques, un scalaire est un « élément de l'anneau de base d'un module ou du corps de base d'un espace vectoriel ». En clair, c'est souvent un nombre réel ou complexe.

En physique, un scalaire est une quantité pouvant être décrite par un seul nombre et l'unité correspondante. Les quantités scalaires sont invariantes par rapport aux rotations de coordonnées. Une température, une masse, une hauteur sont des scalaires.

En bref, - **définition** - une grandeur scalaire, ou un scalaire plus simplement, s'exprime par un nombre réel (ou complexe) accompagné de ses unités.

Remarquons, juste pour l'information, que le scalaire (Pterophyllum scalare) est aussi un poisson de la famille des cichlidés.

1.1.2 Vecteur (lié) :

La vitesse d'un objet en revanche est un vecteur : elle est définie par un scalaire associé à une direction. De même pour l'accélération d'un objet.

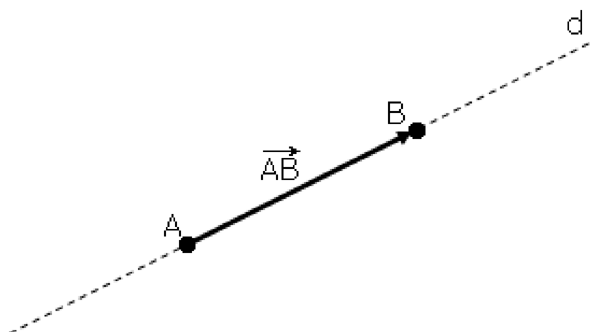


FIGURE 1.1 – Vecteur lié $\vec{AB}$

Le mot « vecteur » vient de l'indo-européen *vag*, ou *vagh*, qui désignait le chariot, et qui a laissé quelques centaines de descendants dans les langues indo-européennes. En latin, « vector » désigne le conducteur d'un chariot. Le réemploi de ce mot en mathématiques date de 1837, à l'initiative de William Hamilton.

Le vecteur est, en physique, ce qui permet de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre seul ou une fonction numérique seule. Par exemple, pour préciser une vitesse, une force, un champ électrique, il faut aussi connaître la direction et le sens. Les vecteurs s'opposent aux grandeurs scalaires qu'on peut décrire par un simple nombre, comme la masse, la température, la densité, etc.

En bref, - (**définition**) - un vecteur lié $\vec{AB}$ est un segment de droite $[AB]$ orienté caractérisé par les 4 propriétés suivantes (voir schéma 1.1) :

1. $\vec{AB}$ possède une origine A
2. $\vec{AB}$ possède une droite de support d qui définit sa direction

3. $\vec{AB}$ possède un sens défini par la demi-droite $[AB$
4. $\vec{AB}$ possède une magnitude définie par la longueur du segment $|AB|$

Par abus de langage, toute entité mathématique possédant ces quatre propriétés est étiqueté « vecteur [1] ».

Vecteurs équipolents

Deux vecteurs liés $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont équipolents s'ils représentent le même vecteur libre. On note

$$(A, B) \uparrow (C, D)$$

ou, de manière moins formelle, $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Autrement dit, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont équipolents ssi le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (voir schéma 1.2).

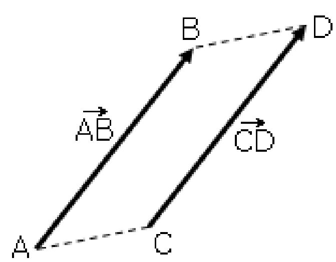


FIGURE 1.2 – Vecteurs équipolents $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$: $ABCD$ est un parallélogramme.

1.1.3 Vecteur libre :

Dans le cadre d'un espace à 3 dimensions, un champ de vecteurs associe à chaque point de l'espace un vecteur (à trois composantes réelles), tandis qu'un champ de scalaires y associe un réel. Imaginons par exemple l'eau d'un lac. La donnée de sa température en chaque point forme un champ de scalaires, celle de sa vitesse en chaque point, un champ de vecteurs libres.

On peut donc se représenter un vecteur libre comme une flèche dont l'emplacement dans le plan n'a pas d'importance, seuls comptent sa longueur, sa direction et son sens.

En bref, - (**définition**) - un vecteur libre $\vec{a}$ est un vecteur dont l'origine n'est pas fixe (voir schéma 1.3).

1. Selon la source bibliographique, un vecteur sera symboliquement représenté par la notation $\vec{a}$, $\vec{AB}$, $\bar{a}$, $\bar{AB}$, **a** ou **AB**.

Remarquons que, pour deux vecteur libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, dire que ceux-ci sont « égaux » ou « équipolents » est équivalent.

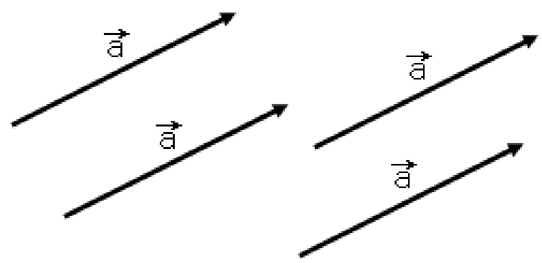


FIGURE 1.3 – Vecteur libre $\vec{a}$

1.1.4 Vecteur glissant :

Prenons maintenant l'exemple d'un wagon posé sur des rails. Qu'on pousse ou qu'on tire le wagon, celui-ci avancera. Si on représente la force agissant sur ce wagon par un vecteur, il sera tout à fait équivalent, du point de vue du mouvement, de considérer que le point d'application de cette force peut se placer à l'arrière comme à l'avant du chariot. Le vecteur représentant la force sera donc un vecteur pouvant « glisser » sur sa droite de support.

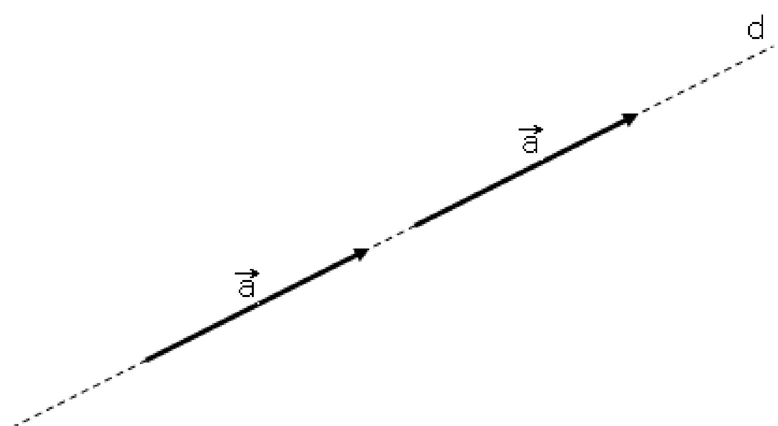


FIGURE 1.4 – Vecteur glissant $\vec{a}$

En bref, - (**définition**) - un vecteur glissant $\vec{AB}$ est un vecteur dont l'origine A peut se déplacer sur sa droite de support d (voir schéma 1.4).

1.2 Opérations sur les vecteurs

Dans un repère cartésien à 2 dimensions, on peut aussi représenter $\vec{a}$ par un couple de réels (a_x, a_y). Ou encore, en le projetant orthogonalement sur l'axe x et sur l'axe y, on obtient $a_x\vec{1_x} + a_y\vec{1_y}$. Avec cette notation, on comprend aisément que le vecteur $\vec{a}$ « avance » de a_x dans la direction x (il « recule » si a_x est négatif) et « monte » de a_y dans la direction y (il « descend » si a_y est négatif) (voir schéma 1.5).

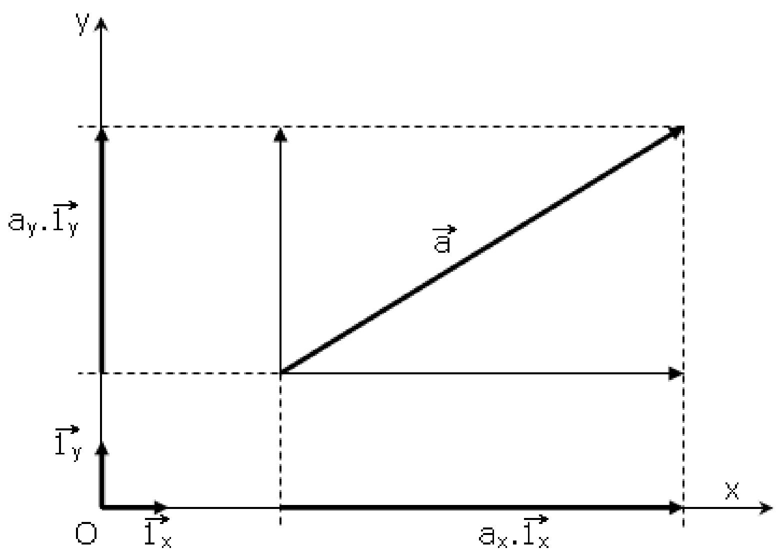


FIGURE 1.5 – Composants (x, y) d'un vecteur $\vec{a}$

Exemples :

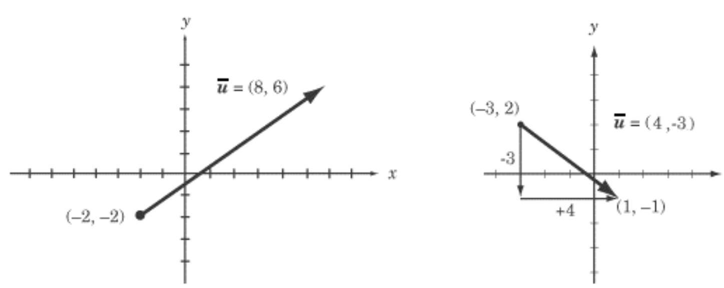


FIGURE 1.6 – Composantes (x, y) d'un vecteur libre $\vec{u}$. A gauche, le vecteur $\vec{u}$ « avance » de 8 et « monte » de 6. A droite, le vecteur $\vec{u}$ « avance » de 4 et « descend » de 3.

A 3 dimensions, le cas se généralise si on représente $\vec{a}$ par un triplet (a_x, a_y, a_z), ou encore, avec la notation vectorielle $a_x\vec{1_x} + a_y\vec{1_y} + a_z\vec{1_z}$

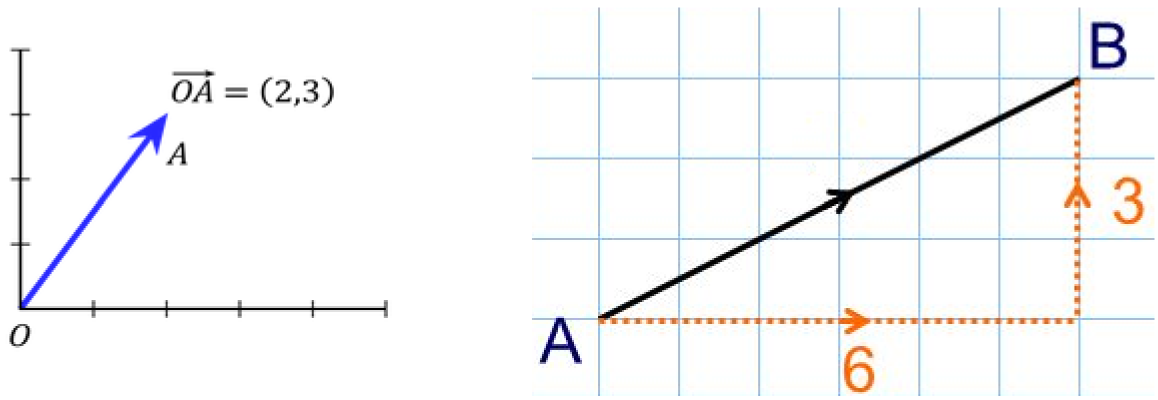


FIGURE 1.7 – Composantes (x, y) de vecteurs liés. A gauche, le vecteur $\vec{OA}$ « avance » de 2 et « monte » de 3. A droite, le vecteur $\vec{AB}$ « avance » de 6 et « monte » de 3.

1.2.1 Addition de 2 vecteurs

Soit 2 vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$ placés dans un repère cartésien Oxy. Leurs composantes sont définies par les couples (a_x, a_y) et (b_x, b_y). On peut comprendre aisément que si l'on additionne $\vec{a}$ et $\vec{b}$, le vecteur $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$ « avance » de a_x, puis de b_x dans la direction x et « monte » de a_y, puis de b_y dans la direction y.

Le vecteur $\vec{a}+\vec{b}$ se construit de la manière suivante :

On amène l'origine du deuxième vecteur à l'extrémité du premier, la somme est le vecteur qui joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité de second.

Il s'agit du troisième côté d'un triangle formé par les deux premiers vecteurs.

On peut aussi le construire d'une autre manière :

On amène les origines des deux vecteurs en un même point, on trace un parallélogramme dont les vecteurs sont deux côtés, la somme est alors la diagonale du parallélogramme partant de l'origine.

Dans les deux cas, on place les vecteurs bout-à-bout ; mais si l'origine d'un vecteur correspond à l'extrémité de l'autre, on utilise la méthode du triangle, si les origines sont confondues, on utilise la méthode du parallélogramme (voir schéma 1.8).

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a}+\vec{b}\\ &= (a_x\vec{1_x} + a_y\vec{1_y}) + (b_x\vec{1_x} + b_y\vec{1_y})\\ &= (a_x\vec{1_x} + b_x\vec{1_x}) + (a_y\vec{1_y} + b_y\vec{1_y})\\ &= (a_x+b_x)\vec{1_x} + (a_y+b_y)\vec{1_y}\end{aligned}$$

Ou encore, avec la notation $\vec{c} \equiv (c_x, c_y)$

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a}+\vec{b}\\ (c_x, c_y) &= (a_x, a_y) + (b_x, b_y)\\ &= (a_x+b_x, a_y+b_y)\end{aligned}$$

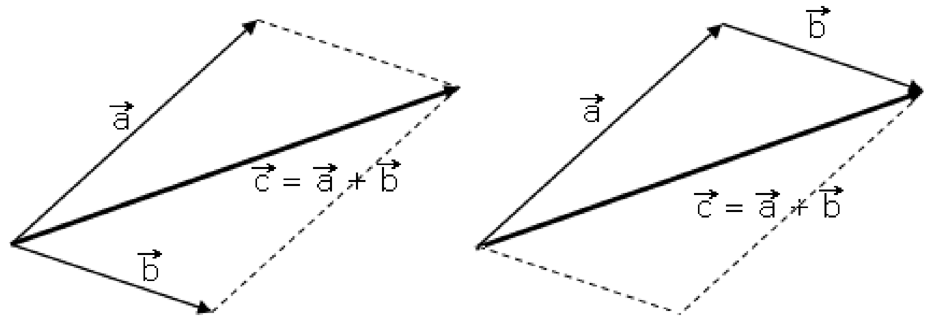


FIGURE 1.8 – Addition de 2 vecteurs : méthode du parallélogramme (à gauche) et du triangle (à droite)

Nous pouvons dès lors tirer plusieurs propriétés relatives à l'addition de vecteurs.

1. **Propriété** : la somme de deux vecteurs est un vecteur.

   En effet, $\vec{a} + \vec{b}$ est un vecteur.

2. **Propriété** : la somme de vecteurs est commutative.

   En effet, $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y) = (b_x + a_x, b_y + a_y) = \vec{b} + \vec{a}$.

3. **Propriété** : la somme de vecteurs est associative.

   En effet,
   $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (a_x, a_y) + (b_x + c_x, b_y + c_y) = (a_x + b_x + c_x, a_y + b_y + c_y) = (a_x + b_x, a_y + b_y) + (c_x, c_y) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

4. **Propriété** : l'ensemble des vecteurs muni de la loi d'addition possède un neutre $\vec{0}$.

   Le vecteur nul est le vecteur dont les représentants sont de type (A, A) (les deux points sont confondus). Il est noté $\vec{0} \equiv (0, 0)$. Il est de longueur nulle et sa direction n'est pas définie.

   On a, $\vec{a} + \vec{0} = (a_x + 0, a_y + 0) = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

5. **Propriété** : tout vecteur $\vec{a}$ de l'ensemble des vecteurs muni de la loi d'addition possède un symétrique $-\vec{a}$ (voir schéma 1.9).

   On a, $\vec{a} + \vec{a'} = \vec{0} \ \Leftrightarrow \ \vec{a'} = -\vec{a}$.

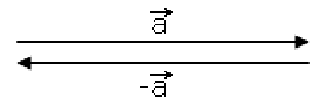


FIGURE 1.9 – Représentation du vecteur $\vec{a}$ et de son opposé $-\vec{a}$.

Les propriétés ci-dessus peuvent se résumer par la compréhension du polygone de Varignon qui exprime que $\vec{v}_R = \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} + ... + \vec{v_n}$ (voir schéma 1.10).

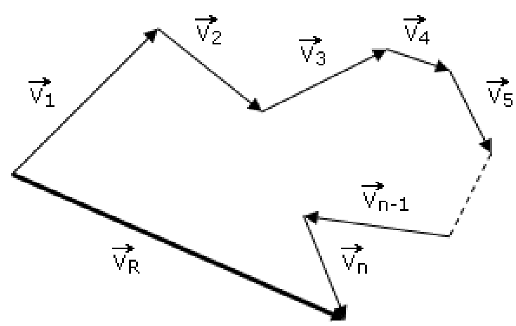


FIGURE 1.10 – Polygone de Varignon : $\vec{v}_R = \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} + ... + \vec{v_n}$

Dans le cas particulier où l'on a trois points A, B et C, alors on a la « **relation de Chasles** » (voir schéma 1.11) :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

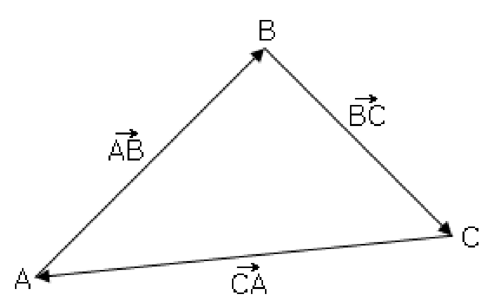


FIGURE 1.11 – Relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

On déduit de cela que

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

L'opposé d'un vecteur est le vecteur de même direction, de même longueur, mais de sens opposé. Ce qui permet de définir la soustraction : en posant la notation

$$-\vec{AB} = \vec{BA}$$

1.2.2 Soustraction de 2 vecteurs

Soit 2 vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$ placés dans un repère cartésien Oxy. Leurs composantes sont définies par les couples (a_x, a_y) et (b_x, b_y). On peut comprendre aisément que si l'on soustrait $\vec{b}$ de $\vec{a}$, le vecteur $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ « avance » de a_x, puis « recule » de b_x dans la direction x et « monte » de a_y, puis « descend » de b_y dans la direction y. Autrement dit, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ « avance » de a_x et $-b_x$ dans la direction x et « monte » de a_y et de $-b_y$ dans la direction y (voir schéma 1.12).

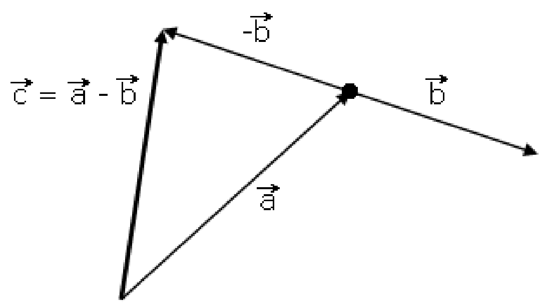


FIGURE 1.12 – Soustraction de 2 vecteurs

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} - \vec{b} \\ &= (a_x \vec{1_x} + a_y \vec{1_y}) - (b_x \vec{1_x} + b_y \vec{1_y}) \\ &= (a_x \vec{1_x} - b_x \vec{1_x}) + (a_y \vec{1_y} - b_y \vec{1_y}) \\ &= (a_x - b_x)\vec{1_x} + (a_y - b_y)\vec{1_y}\end{aligned}$$

Ou encore, avec la notation $\vec{c} \equiv (c_x, c_y)$

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} - \vec{b} \\ (c_x, c_y) &= (a_x, a_y) - (b_x, b_y) \\ &= (a_x - b_x, a_y - b_y)\end{aligned}$$

Nous pouvons dès lors tirer plusieurs propriétés relatives à la soustraction de 2 vecteurs.

1. **Propriété** : la soustraction de 2 vecteurs est un vecteur.

   En effet, $\vec{a} - \vec{b}$ est un vecteur.

2. **Propriété** : la soustraction de 2 vecteurs est anticommutative.

   En effet, $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y) = (-b_x + a_x, -b_y + a_y) = -\vec{b} + \vec{a} = -(\vec{b} - \vec{a})$.

On peut donc conclure que soustraire $\vec{b}$ de $\vec{a}$, c'est additionner $\vec{a}$ avec le symétrique $\vec{b'}$ de $\vec{b}$ (voir schéma 1.12). En écrivant $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b'} = \vec{a} + (-\vec{b})$, on peut donc facilement appliquer les autres propriétes de l'addition à la soustraction de deux vecteurs.

Dans le cas d'un vecteur $\vec{AB}$ défini par un couple de points (A, B), on peut toujours décomposer $\vec{AB}$ en une somme de 2 vecteurs $\vec{AO}$ et $\vec{OB}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= \vec{OB} + \vec{AO} \\ &= \vec{OB} - \vec{OA}\end{aligned}$$

En utilisant la décomposition vectorielle, il vient (voir schéma 1.13)

$$\begin{aligned}\vec{OB} - \vec{OA} &= (B_x\vec{1_x} + B_y\vec{1_y}) - (A_x\vec{1_x} + A_y\vec{1_y}) \\ &= B_x\vec{1_x} - A_x\vec{1_x} + B_y\vec{1_y} - A_y\vec{1_y} \\ &= (B_x - A_x)\vec{1_x} + (B_y - A_y)\vec{1_y}\end{aligned}$$

Avec cette notation, on comprend aisément que le vecteur $\vec{AB}$ « avance » de $(B_x - A_x)$ dans la direction x (il « recule » si $(B_x - A_x)$ est négatif) et « monte » de $(B_y - A_y)$ dans la direction y (il « descend » si $(B_y - A_y)$ est négatif) et ce, s'il s'agit d'un vecteur lié, indépendamment de son origine A.

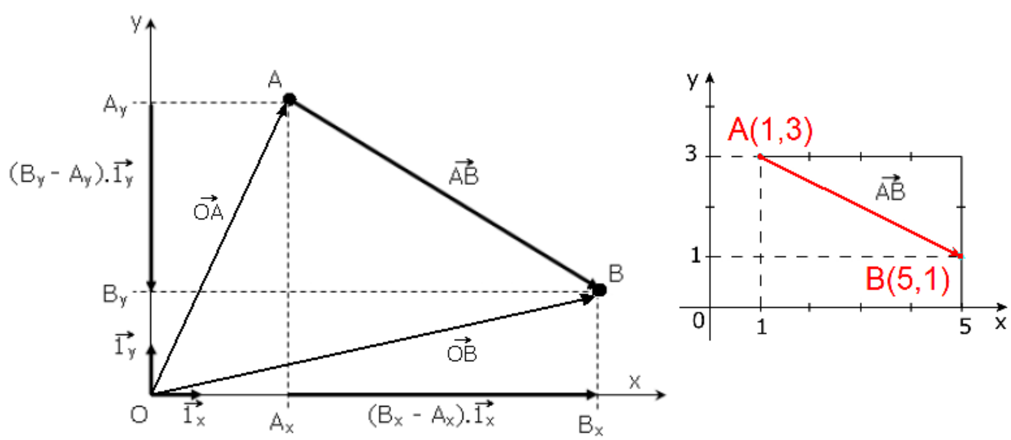


FIGURE 1.13 – Composantes (x, y) d'un vecteur $\vec{AB}$. A droite, le vecteur $\vec{AB}$ est défini par les points $A(1, 3)$ et $B(5, 1)$. Pour passer de A à B, on « avance » de 4 (autrement dit, $5 - 1 = 4$) et on « descend » de 2 (autrement dit, $1 - 3 = -2$), ce qui revient au même que d'effectuer $\vec{OB} - \vec{OA}$.

Exemples :

	$\vec{v}(1,4)$	$+$	$\vec{u}(5,1)$	$=$	$\vec{w}(6,5)$
selon x :	1	$+$	5	$=$	6
selon y :	4	$+$	1	$=$	5

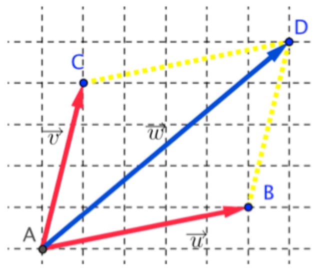


FIGURE 1.14 – Composantes (x, y) d'un vecteur $\vec{w}(6,5) = \vec{v}(1,4) + \vec{u}(5,1)$. Les composantes sont additionnées indépendamment : $\vec{w}$ « avance » de 1 avec $\vec{v}$ et puis de 5 avec $\vec{u}$ (donc « avance » de $1+5=6$) ; $\vec{w}$ « monte » de 4 avec $\vec{v}$ et puis de 1 avec $\vec{u}$ (donc « monte » de $4+1=5$).

	$\vec{v}(2,3)$	$-$	$\vec{u}(1,-1)$	$=$	$\vec{w}(1,4)$
selon x :	2	$-$	1	$=$	1
selon y :	3	$-$	(-1)	$=$	4

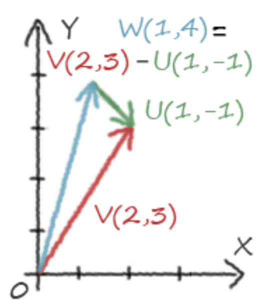


FIGURE 1.15 – Composantes (x, y) d'un vecteur $\vec{w}(1,4) = \vec{v}(2,3) - \vec{u}(1,-1)$. Les composantes sont soustraites indépendamment : $\vec{w}$ « avance » de 2 avec $\vec{v}$ et puis « recule » de 1 avec $-\vec{u}$ (donc « avance » de $2-1=1$) ; $\vec{w}$ « monte » de 3 avec $\vec{v}$ et puis « monte » de $-(-1)=1$ avec $-\vec{u}$ (donc « monte » de $3-(-1)=3+1=4$).

1.2.3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Rappelons que le terme « scalaire » désigne un nombre réel. Le produit d'un vecteur $\vec{a}$ par un scalaire k (voir schéma 1.16) est un vecteur noté

$$k\vec{a}$$

- de même direction et sens que $\vec{a}$, si $k > 0$
- de même direction mais de sens contraire que $\vec{a}$, si $k < 0$.
- Il s'agit d'un vecteur nul si $k = 0$.

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= k\vec{a} \\ &= k(a_x\vec{1_x} + a_y\vec{1_y}) \\ &= k\ a_x\vec{1_x} + k\ a_y\vec{1_y} \end{aligned}$$

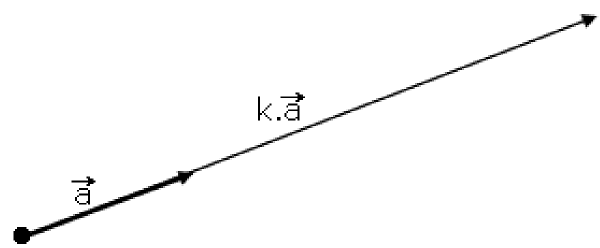


FIGURE 1.16 – Multiplication d'un vecteur $\vec{a}$ par un scalaire k (avec $k > 1$).

Ou encore, avec la notation $\vec{a}' \equiv (a'_x, a'_y)$

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= k\vec{a} \\ (a'_x, a'_y) &= k(a_x, a_y) \\ &= (k\ a_x, k\ a_y) \end{aligned}$$

Nous pouvons dès lors tirer plusieurs propriétés relatives à la multiplication d'un scalaire et d'un vecteur.

1. **Propriété** : la multiplication d'un vecteur par un scalaire est un vecteur.

   En effet, $k\vec{a}$ est un vecteur.

2. **Propriété** : la multiplication d'un vecteur par un scalaire distribue l'addition de scalaires.

   En effet, $(k_1+k_2)\vec{a} = (k_1+k_2)(a_x, a_y) = ((k_1+k_2)a_x, (k_1+k_2)a_y) = (k_1\ a_x, k_1\ a_y)+(k_1\ a_x, k_2\ a_y) = k_1(a_x, a_y) + k_2(a_x, a_y) = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$.

3. **Propriété** : la multiplication d'un vecteur par un scalaire distribue l'addition de vecteurs (voir schéma 1.17).

   En effet, $k(\vec{a}+\vec{b}) = k((a_x, a_y) + (b_x, b_y)) = k(a_x, a_y) + k(b_x, b_y) = k\ \vec{a} + k\ \vec{b}$.

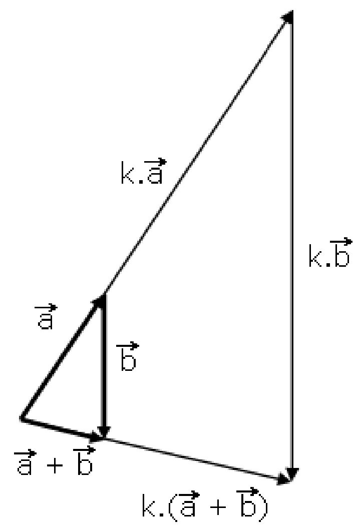


FIGURE 1.17 – Multiplication de l'addition de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ par un scalaire k

4. **Propriété** : la multiplication d'un vecteur par un scalaire distribue la multiplication de scalaires.

   En effet, $(k_1\ k_2)\ \vec{a} = (k_1\ k_2)(a_x, a_y) = (k_1\ k_2\ a_x, k_1\ k_2\ a_y) = k_1(k_2\ \vec{a}) = k_2(k_1\ \vec{a}) = k_2\ k_1\ \vec{a}$.

5. **Propriété** : l'ensemble des vecteurs muni de la loi de multiplication par un scalaire possède un neutre 1.

   En effet, $1\ \vec{a} = \vec{a}$

6. **Propriété** : l'ensemble des vecteurs muni de la loi de multiplication par un scalaire possède un élément absorbant 0.

   En effet, $0\ \vec{a} = \vec{0}$

Nous pouvons donc conclure que la multiplication d'un vecteur $\vec{a}$ par un scalaire k agit, sur $\vec{a}$, comme une dilatation (si $|k| > 1$) ou une contraction (si $|k| < 1$), bref d'une homothétie de rapport k. La direction est conservée, mais le sens dépend du signe de k (voir schéma 1.18).

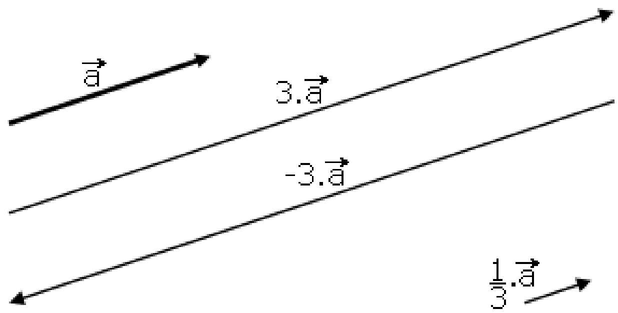


FIGURE 1.18 – Multiplication d'un vecteur $\vec{a}$ par un scalaire $k = 3$, -3 et $\frac{1}{3}$

1.2.4 Combinaison linéaire de vecteurs

Sans entrer dans le détail, considérons les vecteurs $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ... $\vec{v_n}$ et a_1, a_2, ... a_n des réels. Tout vecteur de la forme $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + ... + a_n\vec{v_n}$ s'appelle une combinaison linéaire de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ... $\vec{v_n}$.

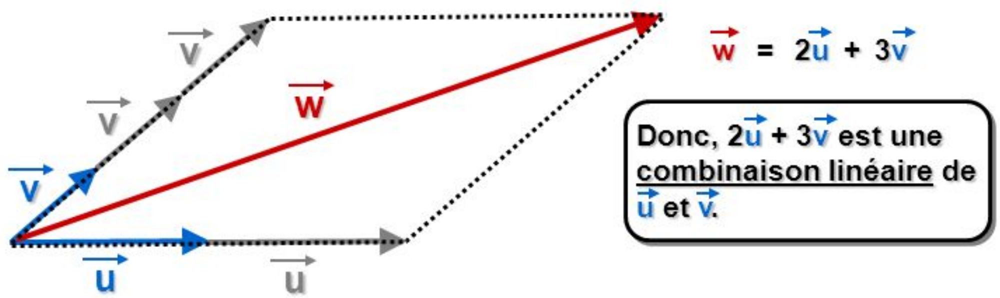


FIGURE 1.19 – Combinaison linéaire de 2 vecteurs.

Bon nombre de profs passent leur temps à répéter que l'on n'additionne pas des pommes et des poires. Eh bien si, on peut le faire dans un certain contexte : ça s'appelle une combinaison linéaire. L'évaluation d'un chiffre d'affaires ou d'un stock de produits variés sont des additions de diverses quantités de natures différentes qui, mathématiquement, peuvent s'étudier dans le cadre des espaces vectoriels.

Les combinaisons linéaires peuvent également être utilisées lors de la résolution de systèmes d'équation où la méthode consiste à manipuler les différentes lignes du système, en les ajoutant, les multipliant, les soustrayant, pour éliminer des termes et résoudre le système.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 3x & + & 4y & = & 4 & (\times 2) \\ 2x & + & y & = & 1 & (\times -3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 6x & + & 8y & = & 8 \\ -6x & + & -3y & = & -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0x + 5y = 5 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 3x & + & 4y & = & 4 & (\times 1) \\ 2x & + & y & = & 1 & (\times -4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 3x & + & 4y & = & 4 \\ -4x & + & -4y & = & -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow -x + 0y = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

1.2.5 Norme d'un vecteur

Lorsqu'on parle de « magnitude » d'un vecteur, il convient d'être un peu plus clair et un peu plus rigoureux. Nous allons pour ça définir une notion mathématique supplémentaire : la norme.

La norme d'un vecteur, notée $||\vec{a}||$ (ou plus simplement a), correspond à sa « longueur ». La norme d'un vecteur représentant une force sera donc donnée par l'intensité de cette force, 250 Newtons par exemple.

Pour calculer la norme d'un vecteur dans des coordonnées cartésiennes, nous allons appliquer le théorème de Pythagore.

En effet, si nous avons $\vec{AB} = (B_x - A_x)\vec{1_x} + (B_y - A_y)\vec{1_y}$, alors, étant donné que les axes x et y sont perpendiculaires, on peut former le triangle rectangle ABB', où B' est la projection orthogonale du point B sur la droite $d \equiv y = A_y$.

Comme $A_y = B'_y$ et $B_x = B'_x$, on a

$$\begin{aligned} ||\vec{AB}||^2 &= |AB|^2 \\ &= |AB'|^2 + |B'B|^2 \\ &= (B'_x - A_x)^2 + (B_y - B'_y)^2 \\ &= (B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 \end{aligned}$$

Donc, - **définition** - la norme d'un vecteur vaut

$$||\vec{AB}|| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$$

Exemple

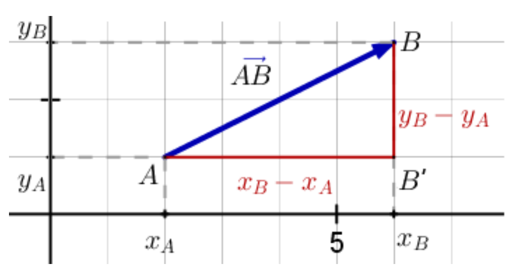


FIGURE 1.20 – Norme d'un vecteur $\vec{AB}$, mise en évidence du triangle rectangle dans les coordonnées (x, y). On a $||\vec{AB}|| = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$

et, par conséquent (voir schéma 1.21), si $\vec{a} \equiv (a_x, a_y)$,

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Un **vecteur unitaire** est un vecteur dont la norme vaut 1.

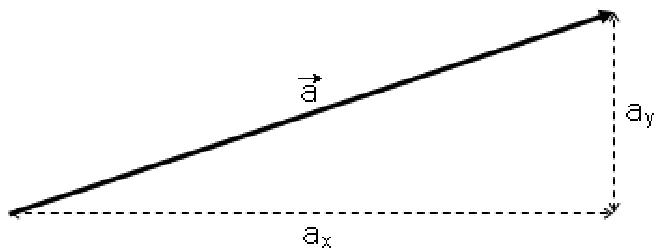


FIGURE 1.21 – Norme d'un vecteur $\vec{a}$, mise en évidence du triangle rectangle dans les coordonnées (x, y) (les axes Ox et Oy ne sont pas représentés sur le schéma)

Par exemple, le vecteur $\vec{1_r} \equiv (\cos\theta, \sin\theta)$ est un vecteur unitaire car

$$||\vec{1_r}||^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad ||\vec{1_r}|| = 1$$

On peut toujours transformer un vecteur quelconque $\vec{a}$ en un vecteur unitaire $\vec{1_a}$ de même direction que $\vec{a}$. On applique simplement

$$\vec{1_a} = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}$$

En effet,

$$||\vec{1_a}|| = \frac{||\vec{a}||}{||\vec{a}||} = 1$$

Remarquons que **la norme d'un vecteur est toujours positive**. En effet, $||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \geq 0$.

En 3 dimensions, la norme se généralise en considérant simplement

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

1.2.6 Produit scalaire de 2 vecteurs

Dans le calcul vectoriel, le produit scalaire est une opération algébrique effectuée entre deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (voir schéma 1.22). À ces deux vecteurs elle associe leur produit scalaire

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

qui est un nombre (ou scalaire). Elle permet de retrouver les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité en dimension deux et trois, mais aussi de les étendre à des espaces vectoriels réels de toute dimension, et parfois aux espaces vectoriels complexes.

C'est ainsi, par exemple, qu'une fois qu'on aura muni un espace de polynômes d'un produit scalaire, on pourra parler de distance ou d'angle entre deux polynômes. Par exemple, le produit scalaire de deux polynômes $p(x)$ et $q(x)$ peut être donné par l'opération $< p|q >= \int_a^b p(x)q(x)dx$.

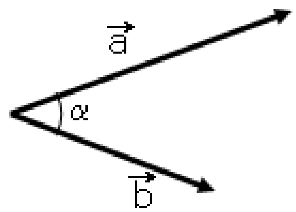


FIGURE 1.22 – Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant un angle α

Pour les curieux, d'une façon parfaitement rigoureuse, en empruntant une notation de la mécanique quantique $< \cdot | \cdot >$, on définit le produit scalaire comme suit :
On dit qu'une application ϕ telle que

$$\phi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R} : (x, y) \to < x|y >$$

est un produit scalaire si elle est :
- symétrique : $\forall x, y \in \mathbf{E} :< y|x >=< x|y >$
- positive : $\forall x \in \mathbf{E} :< x|x >\geq 0$
- définie : $< x|x >= 0 \Rightarrow x = 0$
- (bi)linéaire : $< k_x x + k_{x'} x'|y >= k_x < x|y > +k_{x'} < x'|y >$.

Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions. La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les année 1880.

Le produit scalaire se révèle très utile, aussi bien en physique pour le calcul du travail d'une force qu'en géométrie élémentaire pour démontrer des propriétés sur les angles et les distances ou en algèbre linéaire pour munir un espace vectoriel d'une distance.

Trois définitions lui correspondent :

Définition 1 : Soit $\vec{a} \equiv (a_x, a_y)$ et $\vec{b} \equiv (b_x, b_y)$. On a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x\ b_x + a_y\ b_y$$

Définition 2 : Soit α l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||. \cos \alpha$$

Définition 3a : Soit $\vec{a}'$, le projeté orthogonal de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ (voir schéma 1.23). On a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}'||.||\vec{b}||$$

Définition 3b : Soit $\vec{b}'$, le projeté orthogonal de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$ (voir schéma 1.23). On a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||.||\vec{b}'||$$

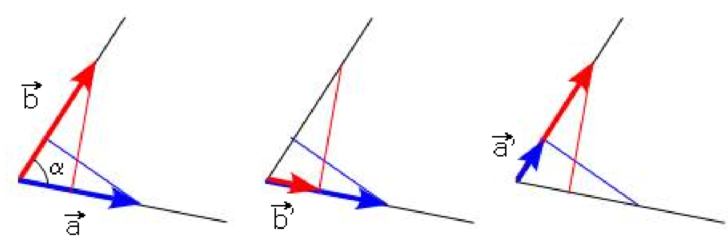


FIGURE 1.23 – Les 3 cas de figure sont identiques. A gauche, les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{a}$ forment un angle α. Au centre, projection $\vec{b}'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$. A droite, projection $\vec{a}'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.

Nous pouvons dès lors fournir certaines propriétés inhérentes au produit scalaire.

1. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

   En effet, $\vec{a} \cdot \vec{b} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ par définition.

2. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs identiques est positif.

   En effet, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x a_x + a_y a_y = a_x^2 + a_y^2 \geq 0$.

3. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs nuls $\vec{0}$ est nul.

   En effet, $\vec{0} \cdot \vec{0} = 0.0 + 0.0 = 0$.

4. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs est commutatif.

   En effet, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = b_x a_x + b_y a_y = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

5. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs distribue l'addition de vecteurs.

   En effet, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_x(b_x + c_x) + a_y(b_y + c_y) = a_x b_x + a_y b_y + a_x c_x + a_y c_y = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

6. **Propriété** : l'espace des vecteurs muni du produit scalaire possède un élément absorbant $\vec{0}$.

   En effet, $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = a_x 0 + a_y 0 = 0$.

7. **Propriété** : le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas associatif.

En effet, $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) = k\vec{a} \parallel \vec{a}$ et $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} = k'\vec{c} \parallel \vec{c}$. Donc, $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) \neq (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

Exemple :

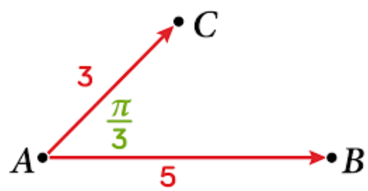


FIGURE 1.24 – Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ forment un angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$. On a $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = ||\vec{AB}||.||\vec{AC}||.\cos\frac{\pi}{3} = 5.3.\frac{1}{2} = 7,5$

Produit scalaire de vecteurs perpendiculaires :

Si l'on considère la définition 2, on a, pour $\vec{a}$ et $\vec{b}$ perpendiculaires,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.\cos\frac{\pi}{2} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.0 = 0$$

si les vecteurs sont perpendiculaires, $\vec{a} \perp \vec{b}$, alors l'angle entre eux est un angle droit et le produit scalaire donne zéro (voir schéma 1.25).

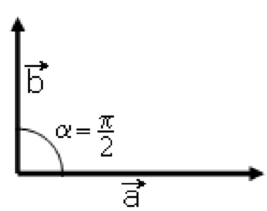


FIGURE 1.25 – Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant un angle droit $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Produit scalaire de vecteurs parallèles :

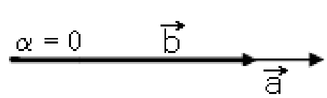


FIGURE 1.26 – Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant un angle α nul

Si l'on considère la définition 2, on a, pour $\vec{a}$ et $\vec{b}$ parallèles et de même sens (voir schéma 1.26),

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.\cos 0 = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.1 = ||\vec{a}||.||\vec{b}||$$

et pour $\vec{a}$ et $\vec{b}$ parallèles et de sens opposés,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.\cos\pi = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.(-1) = -||\vec{a}||.||\vec{b}||$$

Remarques concernant les définitions du produit scalaire :

1. Les définitions 1 et 2 peuvent nous permettre de calculer l'angle α entre n'importe quel couple de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont connus. En effet, les définitions étant équivalentes, on a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}}$$

Exemple :

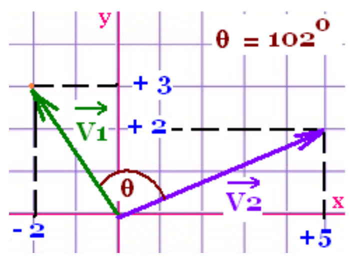


FIGURE 1.27 – Deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ forment un angle θ inconnu. On a $\cos\theta = \frac{v_{1x}v_{2x}+v_{1y}v_{2y}}{\sqrt{(v_{1x}^2+v_{1y}^2)(v_{2x}^2+v_{2y}^2)}} = \frac{-2.5+3.2}{\sqrt{((-2)^2+3^2)(5^2+2^2)}} = \frac{-4}{\sqrt{377}} \to \theta = \arccos\frac{-4}{\sqrt{377}} \approx 102^o$

2. Les définitions 3a et 3b nous amènent à reconsidérer la notion de projection orthogonale. En effet, soit le vecteur directeur $\vec{1_d}$ d'une droite d. Supposons que ce vecteur est unitaire. La norme de la projection orthogonale $\vec{a}'$ d'un vecteur $\vec{a}$ sur la droite d sera donnée par le produit scalaire

$$||\vec{a}'|| = \vec{a} \cdot \vec{1_d} = ||\vec{a}||.\cos\alpha$$

où α est l'angle formé par le vecteur $\vec{a}$ et la droite d (voir schéma 1.28).

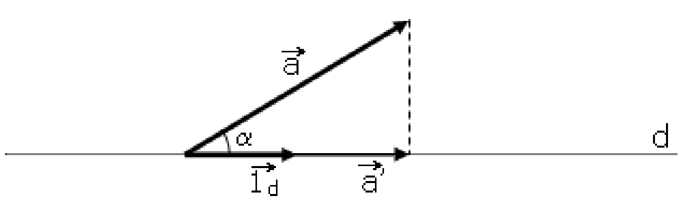


FIGURE 1.28 – Projection d'un vecteur $\vec{a}$ sur une droite d. Le vecteur $\vec{a}$ et la droite d forment un angle α

3. Les définitions 3 et 3 bis nous amènent à reconsidérer la notion d'abscisse et d'ordonnée. En effet, soit un vecteur $\vec{a}$ placé dans un plan muni d'un repère cartésien Oxy. On peut écrire que $\vec{a} = a_x \vec{1_x} + a_y \vec{1_y}$ (voir schéma 1.29). Donc, les normes des projections orthogonales de $\vec{a}$ sur les axes x et y, c'est-à-dire $a_x \vec{1_x}$ et $a_y \vec{1_y}$, sont données respectivement par

$$\begin{aligned} ||a_x \vec{1_x}|| &= (a_x \vec{1_x} + a_y \vec{1_y}) \cdot \vec{1_x} \\ &= a_x(\vec{1_x} \cdot \vec{1_x}) + a_y(\vec{1_y} \cdot \vec{1_x}) \\ &= a_x \vec{1_x}^2 + a_y\ \vec{1_x} \cdot \vec{1_y} \\ &= a_x ||\vec{1_x}||^2 \\ &= a_x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ||a_y \vec{1_y}|| &= (a_x \vec{1_x} + a_y \vec{1_y}) \cdot \vec{1_y} \\ &= a_x(\vec{1_x} \cdot \vec{1_x}) + a_y(\vec{1_y} \cdot \vec{1_x}) \\ &= a_x\ \vec{1_x} \cdot \vec{1_y} + a_y \vec{1_y}^2 \\ &= a_y ||\vec{1_y}||^2 \\ &= a_y \end{aligned}$$

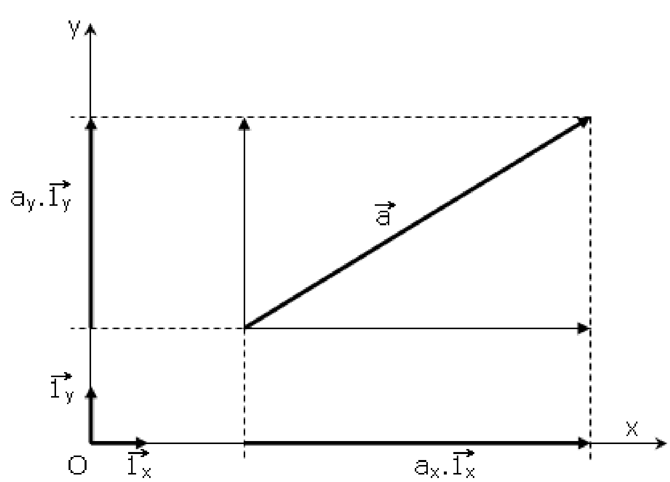


FIGURE 1.29 – Projection d'un vecteur $\vec{a}$ sur l'axe Ox et Oy. Le vecteur $\vec{a}$ peut donc s'écrire comme l'addition de deux vecteurs $a_x \vec{1_x} + a_y \vec{1_y}$ où $a_x = \vec{a} \cdot \vec{1_x}$ et $a_y = \vec{a} \cdot \vec{1_y}$.

4. La définition 1 et la définition 2 nous conduisent à réanalyser la notion mathématique de « norme » pour la faire découler de la notion de produit scalaire [2]. En effet,

$$||\vec{a}||^2 = a_x^2 + a_y^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

2. Remarquons que de manière générale, le produit scalaire étant défini par $< x|y >$, la norme d'un élément x d'un espace vectoriel sera noté $\sqrt{< x|y >}$. Par exemple, l'espace des polynomes muni du produit scalaire $< p|q >= \int_a^b p(x)\ q(x)\ dx$ nous donnera une norme $||p|| = \sqrt{< p|p >} = \sqrt{\int_a^b p^2(x)\ dx}$

et

$$||\vec{a}||^2 = ||\vec{a}||.||\vec{a}||. \cos 0 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

Donc,

$$||\vec{a}|| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

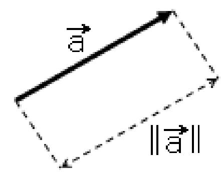


FIGURE 1.30 – norme d'un vecteur $\vec{a}$. La norme est déduite de $\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 = ||\vec{a}||^2$.

5. Nous pouvons finalement étendre toutes les propriétés du produit scalaire à un espace à 3 dimensions, en réajustant la définition 1 selon

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Nous pouvons dès lors constater que le produit scalaire constitue un excellent outil en géométrie analytique pour déterminer l'amplitude d'un angle. En particulier s'il s'agit d'un angle droit car,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Produit scalaire : règle du parallélogramme

L'addition de deux vecteurs peut se faire, nous l'avons vu précédemment, grâce à la « règle du parallélogramme ». Nous disposons maintenant de puissants outils pour calculer la norme et la direction du vecteur $\vec{a} + \vec{b}$, connaissant $\vec{a} \equiv (a_x, a_y)$ et $\vec{b} \equiv (b_x, b_y)$ (voir schéma 1.31).

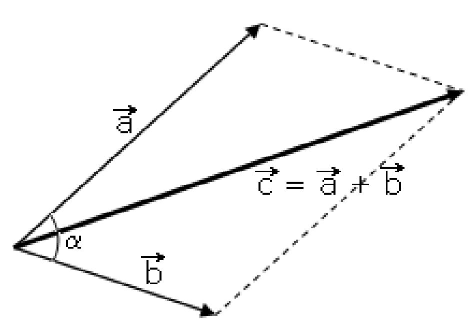


FIGURE 1.31 – norme d'un vecteur $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. La norme est déduite de $||\vec{c}||^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + 2\, ||\vec{a}||\, ||\vec{b}||\, \cos \alpha$.

On a $\vec{a}+\vec{b} \equiv (a_x+b_x, a_y+b_y)$. Donc,

$$\begin{aligned}
||\vec{a}+\vec{b}||^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= \vec{a}^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2 \\
&= ||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2+2\,||\vec{a}||\,||\vec{b}||\;\cos\alpha
\end{aligned}$$

Exemple : voir schéma 1.32

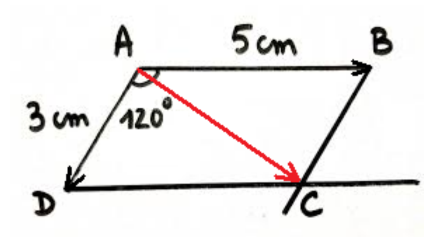


FIGURE 1.32 – Que vaut la norme du vecteur $\vec{AC}$? La norme est déduite de $||\vec{AC}||^2 = ||\vec{AB}||^2+||\vec{AD}||^2+2\,||\vec{AB}||\,||\vec{AD}||\;\cos 120^o = 5^2+3^2+5.3.(-\frac{1}{2}) = 26,5 \rightarrow ||\vec{AC}|| = \sqrt{26,5} \approx 5,15\;cm$.

1.2.7 Produit vectoriel de 2 vecteurs

Le produit vectoriel est le résultat d'une multiplication vectorielle dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Cette notion a été théorisée dans les années 1880 par Josiah Willard Gibbs à partir des travaux de Hermann Günther Grassmann.

Définition 1 : Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ se définit comme l'unique vecteur $\vec{a}\times\vec{b}$ tel que (voir schéma 1.33 et 1.34) :

- le vecteur $\vec{a}\times\vec{b}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$,
- le repère $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b})$ est de sens direct (règle de la main droite : $\vec{a}$ se rabattant sur $\vec{b}$ nous fournit l'orientation du vecteur $\vec{a}\times\vec{b}$),
- la norme $||\vec{a}\times\vec{b}|| = ||\vec{a}||\;||\vec{b}||\;\sin\alpha$.

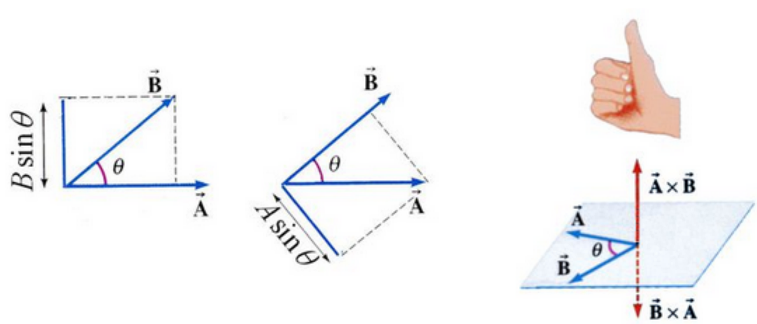


FIGURE 1.33 – A droite, produit vectoriel $\vec{A}\times\vec{B}$ et $\vec{B}\times\vec{A}$ des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

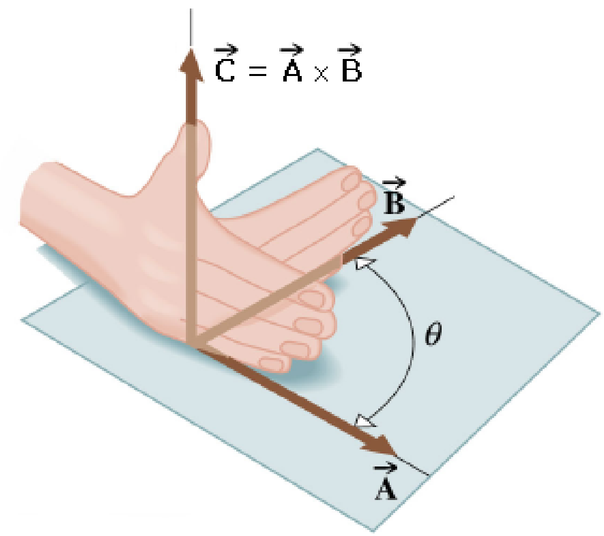


FIGURE 1.34 – Produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Plusieurs notations sont en concurrence pour le produit vectoriel. On utilise spécialement en France le V renversé ($\wedge$) initié par Cesare Burali-Forti, mais qui a le gros défaut d'être en conflit avec la notation du produit extérieur et du « et » logique. La notation par une croix ($\times$), due à Josiah Willard Gibbs, a le défaut d'être en conflit avec le produit des réels ou le produit cartésien.

Voici quelques exemples de notation :
- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ en France et dans les pays francophones en général.
- $\vec{a} \times \vec{b}$ dans les pays anglophones et hispanophones, Charleroi, Allemagne, Chine, Japon, Canada (y compris francophone), Corée, Vietnam, etc.
- $[\vec{a}, \vec{b}]$ dans les pays de l'Est.

Définition 2 Dans une base orthonormée directe $(\vec{1_x}, \vec{1_y}, \vec{1_z})$, le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ se définit comme :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{1_x} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{1_y} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{1_z}$$

Nous pouvons dès lors fournir certaines propriétés inhérentes au produit vectoriel.

1. **Propriété** : le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur.

   En effet, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ avec $\vec{c}$ qui est un vecteur par définition.

2. **Propriété** : le produit vectoriel de deux vecteurs est anticommutatif (voir schéma 1.35).

   En effet,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

.

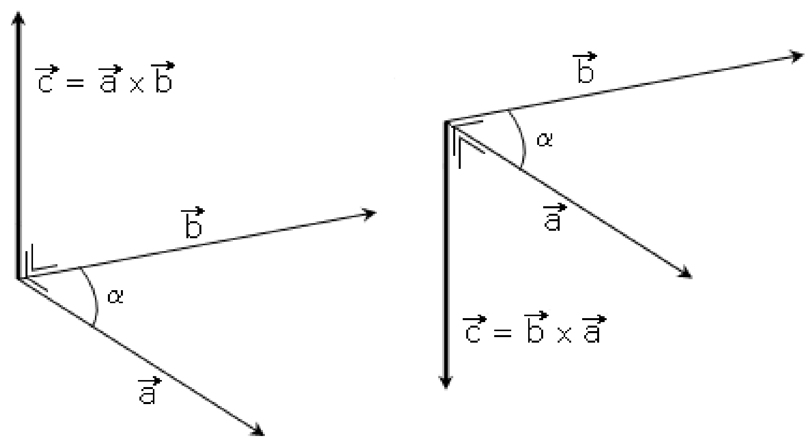


Figure 1.35 – Produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ et $\vec{b} \times \vec{a}$ des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

3. **Propriété** : le produit vectoriel de deux vecteurs distribue l'addition de vecteurs.

   En effet,

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \quad = \quad \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x + c_x & b_y + c_y & b_z + c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

   Donc,

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \quad = \quad \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

4. **Propriété** : le produit vectoriel est compatible avec la multiplication par un scalaire.

   En effet,

$$k(\vec{a} \times \vec{b}) = k \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ ka_x & ka_y & ka_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ kb_x & kb_y & kb_z \end{vmatrix}$$

   Donc,

$$k(\vec{a} \times \vec{b}) = k\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{b}$$

5. **Propriété** : l'espace des vecteurs muni du produit vectoriel possède un élément absorbant $\vec{0}$.

   En effet, $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$.

6. **Propriété** : le produit vectoriel n'est pas associatif.

   En effet, on a

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix} \\
&= (a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z))\vec{1_x} + ... \\
&= (a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z))\vec{1_x} + ...
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\
&= ((a_z b_x - a_x b_z)c_z - (a_x b_y - a_y b_x)c_y)\vec{1_x} + ... \\
&= (a_z b_x c_z - a_x b_z c_z - a_x b_y c_y + a_y b_x c_y)\vec{1_x} + ... \\
&= (a_y b_x c_y - a_x b_y c_y - a_x b_z c_z + a_z b_x c_z)\vec{1_x} + ...
\end{aligned}$$

   Donc, les composantes selon x diffèrent pour $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ et $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, ce qui nous suffit pour dire que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

Produit vectoriel de vecteurs perpendiculaires :

Si l'on considère la définition 1, on a, pour $\vec{a}$ et $\vec{b}$ perpendiculaires (voir schéma 1.36),

$$\vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||. \sin\frac{\pi}{2} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.1 = ||\vec{a}||.||\vec{b}||$$

et

$$\vec{b} \times \vec{a} = ||\vec{b}||.||\vec{a}||. \sin\frac{3\pi}{2} = ||\vec{b}||.||\vec{a}||.(-1) = -||\vec{a}||.||\vec{b}||$$

Produit vectoriel de vecteurs parallèles :

Si l'on considère la définition 1, on a, pour $\vec{a}$ et $\vec{b}$ parallèles et de même sens,

$$\vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||. \sin 0 = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.0 = 0$$

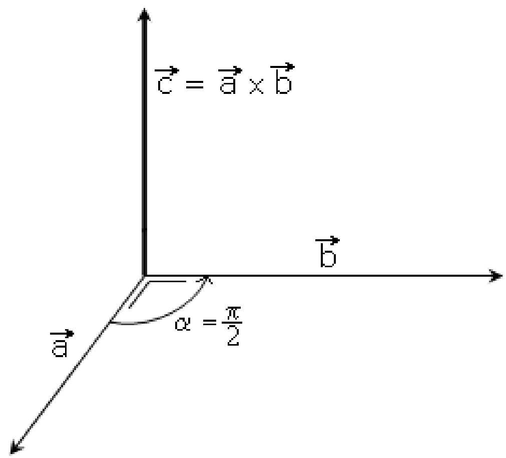


FIGURE 1.36 – Produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ perpendiculaires.

et pour $\vec{a}$ et $\vec{b}$ parallèles et de sens opposés,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||. \sin \pi = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.0 = 0$$

si les vecteurs sont parallèles, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, alors l'angle entre eux est nul et le produit vectoriel donne le vecteur nul (voir schéma 1.37).

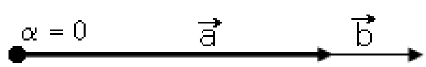


FIGURE 1.37 – Produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ parallèles.

Remarque concernant les définitions du produit vectoriel :

D'après la définition 1 et 2 du produit vectoriel, le sinus de l'angle α formé par deux vecteurs vaut :

$$\sin \alpha = \frac{||\vec{a} \times \vec{b}||}{||\vec{a}||\ ||\vec{b}||} = \sqrt{\frac{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

Nous pouvons dès lors constater que le produit vectoriel constitue un outil relativemnt puissant en géométrie analytique dans l'espace pour déterminer l'amplitude d'un angle. En particulier s'il s'agit d'un angle plat ou nul car,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Produit vectoriel : produit mixte, calcul du volume d'un paralélépidpède

Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont même origine, la norme $||\vec{a} \times \vec{b}||$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$, car l'aire du parallélogramme est le produit de sa hauteur par un des côtés, et sa hauteur est égale au produit de l'autre côté par le sinus de l'angle.

Soit un parallélépipède quelconque, de hauteur c et dont la longueur des côtés de la base vaut respectivement a et b. Le produit mixte

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

s'interprète comme le volume de ce parallélépipède (voir schéma 1.38).

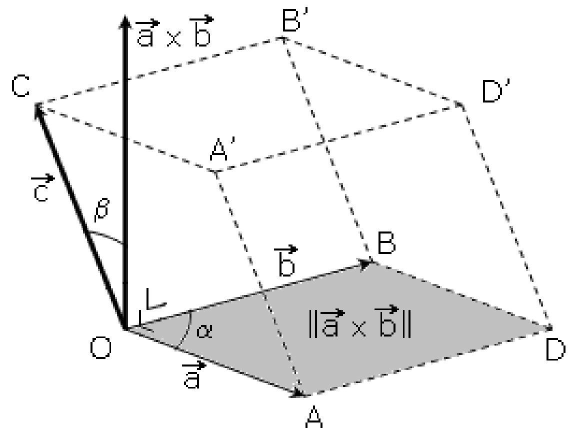


FIGURE 1.38 – Produit mixte $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ des vecteurs $\vec{a}$ $\vec{b}$ et $\vec{c}$. L'aire coloriée est donnée par la norme $||\vec{a} \times \vec{b}||$ du produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

1.2.8 Identités de Lagrange

On peut démontrer que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

et

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

ainsi que

$$||\vec{a} \times \vec{b}||^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = ||\vec{a}||^2 \; ||\vec{b}||^2$$

Nous pouvons mettre la dernière identité sous la forme

$$\left(\frac{||\vec{a} \times \vec{b}||}{||\vec{a}|| \; ||\vec{a}||} \right)^2 + \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \; ||\vec{b}||} \right)^2 = 1$$

ce qui équivaut à l'identité trigonométrique :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

et qui, si α représente l'angle compris entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, n'est rien d'autre qu'une des façons d'écrire le théorème de Pythagore.

La dernière identité de Lagrange peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$||\vec{a} \times \vec{b}||^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)$$

Ce qui signifie que le produit de somme de trois carrés est encore une somme de deux carrés.

Historiquement, cette dernière identité fut définie pour 4 réels a,b,c et d. On a

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Cette égalité est encore utilisée dans les problèmes d'arithmétique qui font intervenir des décompositions en sommes de carrés. Elle signifie que le produit de somme de deux carrés est encore une somme de deux carrés.

Joseph-Louis Lagrange (25 janvier 1736, Turin - 10 avril 1813, Paris)

Giuseppe Lodovico Lagrangia est né le 25 janvier 1736 à Turin, alors capitale du royaume de Sardaigne. Il est pourtant considéré comme un mathématicien français et non italien, ceci de sa propre volonté (la branche paternelle de sa famille étant française). Son père dispose d'une position sociale favorable auprès du roi de Sardaigne, mais il a perdu beaucoup d'argent dans une spéculation hasardeuse. Lagrange étudia brillamment à l'université de sa ville natale. Son intérêt pour les mathématiques ne se manifeste que vers 17 ans, à la lecture d'un mémoire de Halley sur l'utilisation de l'algèbre en optique. Il se plonge alors aussitôt, seul et sans aide, dans l'étude des mathématiques.

A la fin de l'année 1755, Lagrange devient professeur à l'école d'artillerie de Turin., ville où il fonde en 1757 une académie des sciences. Son talent est très vite reconnu, et il écrit durant ses premières années de brillants mémoires où il applique les méthodes du calcul des variations à la mécanique (propagation du son, cordes vibrantes). En 1764 notamment, Lagrange gagne le Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris, pour son travail sur les petites perturbations de son orbite, et sur le fait que la lune présente toujours la même face à la terre. Lagrange deviendra un véritable habitué de ce prix, le gagnant à nouveau en 1772, 1774 et 1780.

En 1766, grâce à l'appui de D'Alembert, Lagrange succède à Euler au poste prestigieux de directeur des mathématiques à l'Académie des Sciences de Berlin. Il passera 20 ans là-bas, d'une extraordinaire fertilité. Hormi quelques arrêts dus à une santé fragile, il publie avec une régularité impressionnante des mémoires qui touchent tous les domaines des mathématiques et de la mécanique : astronomie, probabilités, théorie des équations algébriques (son travail sur les racines ouvre la voie à Abel et Galois), équations différentielles, théorie des fonctions. Dans une perspective plus historique, Lagrange est à la transition entre l'époque d'Euler, où l'on publie à tout va sans trop se soucier de la rigueur, et le XIXè s., où sous l'impulsion de Gauss, Cauchy et Weierstrass, la rigueur devient au centre des mathématiques.

Lagrange souffre parfois de dépression, et s'il se marie en 1767 avec une de ses cousines (il est veuf en 1783), il n'a pas d'enfants, et on dit que ce mariage est peu heureux. Les dernières années à Berlin sont consacrées à l'étude du monumental *Traité de Mécanique Analytique*, où il reprend, complète et unifie les connaissances accumulées depuis Newton. Ce livre, qui devient pour tous ses contemporains une référence, se veut notamment une apologie de l'utilisation des équations différentielles en mécanique.

En 1787, après la mort de l'Empereur Frédéric II, Lagrange part pour la France où il devient membre de l'Académie des Sciences de Paris. Il est un des rares à traverser la Révolution sans être inquiété. Il est même Président de la Commission des poids et des mesures, et est à ce titre un des pères du système métrique et de l'adoption de la division décimale des mesures. Les événements le marquent cependant beaucoup, en particulier le guillotinage du chimiste Lavoisier, au sujet duquel il déclare : « Il a fallu un instant pour couper sa tête, et un siècle ne suffira pas pour en produire une si bien faite ».

Lagrange participe encore à la création de l'Ecole Polytechnique, provisoirement nommée Ecole Centrale des Travaux Publics, dont il est le premier professeur d'analyse, d'ailleurs peu apprécié. Il écrit encore 2 traités mathématiques (*Théorie des fonctions analytiques - Résolution des équations numériques*), moins bien accueillis que celui de mécanique analytique. Il se remarie en 1792 avec une jeune fille qui lui est toute dévouée. Il décède le 10 avril 1813, après avoir reçu de Napoléon Ier tous les honneurs de la nation française (comte de l'empire, Grand Officier de la Légion d'Honneur).

Chapitre 2

Cinématique du point

En physique, la cinématique est la discipline de la mécanique qui étudie le mouvement des corps, en faisant abstraction des causes du mouvement (celles-ci sont généralement modélisées par des forces et des moments). Elle utilise la géométrie analytique.

La cinématique nous permettra d'identifier une trajectoire, une vitesse, une accélération, bref tout ce qui pourrait concerner un déplacement dans le temps, sans notion de masse.

On peut dater la naissance de la cinématique moderne à l'allocution de Pierre Varignon le 20 janvier 1700 devant l'académie royale des sciences de Paris. À cette occasion il définit la notion d'accélération et montre comment il est possible de la déduire de la vitesse instantanée à l'aide d'une simple procédure de calcul différentiel.

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

2.1 Dérivées, trajectoire, vitesse et accélération

2.1.1 Trajectoire

Il faut d'abord définir un référentiel, c'est-à-dire un repère de l'espace et une référence pour le temps, une horloge. On utilise en général le référentiel lié au laboratoire, par exemple dont les axes suivent les arêtes des murs de la pièce, ou bien celle de la table, ou encore les direction géographiques Nord-Sud, Est-Ouest et haut-bas (si le laboratoire est immobile par rapport au sol). L'objet de base est le point matériel, défini par ses coordonnées (x, y, z).

Concrètement, cet objet physique défini par trois paramètres représente soit un objet de petite taille (particule, petite bille), soit un objet de grande taille dont on néglige les effets de rotation sur lui-même. Nous appellerons cet objet le mobile. On ne s'intéresse alors qu'au mouvement dans l'espace du centre de gravité de ce mobile.

La trajectoire est donc la ligne décrite par n'importe quel point d'un objet en mouvement, et notamment par son centre de gravité.

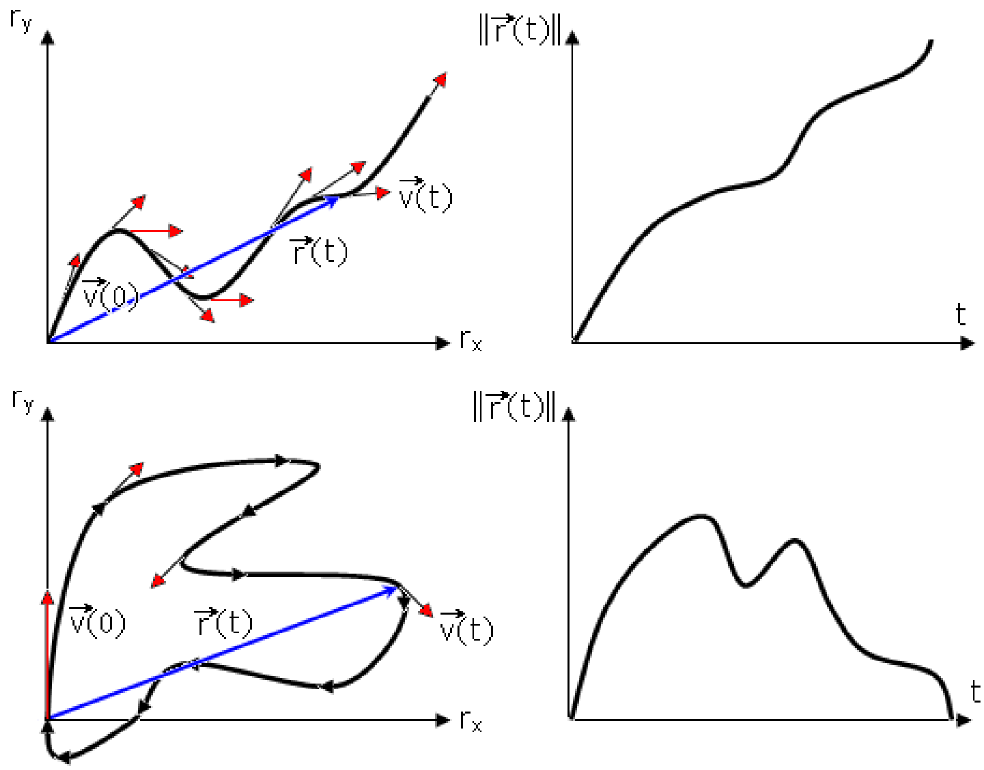


FIGURE 2.1 – À gauche, deux trajectoires différentes : l'un des mobiles retourne à son point de départ (graphique du bas). Graphiques de la trajectoire indépendante du temps dans le plan Oxy (à gauche) et de la distance parcourue en fonction du temps $||\vec{r}(t)||$ (à droite) des deux mobiles.

Si les points R_0 et R sont successivement occupés par le mobile aux instants t_0 (instant initial) et t, la trajectoire du mobile entre ces deux points sera donnée par

$$\vec{r}(t) = R_0\vec{R}(t) = O\vec{R}(t) - O\vec{R}(t_0) = O\vec{R}(t) - O\vec{R}_0$$

Les coordonnées de $\vec{r}(t)$ définissent le vecteur-position du mobile à l'instant t.

De manière plus générale, - **définition** - la trajectoire est l'ensemble des points occupé successivement par le mobile.

L'*équation de la trajectoire* d'un point dans un repère donné est une relation indépendante du temps entre les coordonnées de ce point. Soit le vecteur-position $\vec{r} \equiv (r_x, r_y)$, l'équation de la trajectoire de ce point sera donnée par $r_y = f(r_x)$.

2.1.2 Vitesse moyenne et vitesse instantannée

Une définition formelle a longtemps manqué à la notion de vitesse, car les mathématiciens s'interdisaient de faire le quotient de deux grandeurs non homogènes. Diviser une distance par un temps leur paraissaient donc aussi faux que pourrait nous sembler aujourd'hui la somme de ces deux valeurs. C'est ainsi que pour savoir si un corps allait plus vite qu'un autre, Galilée (1564-1642) comparait le rapport des distances parcourues par ces corps avec le rapport des temps correspondant. Il appliquait pour cela l'équivalence suivante :

$$\frac{s_1}{s_2} \leq \frac{t_1}{t_2} \Leftrightarrow \frac{s_1}{t_1} \leq \frac{s_2}{t_2}$$

La notion de vitesse instantanée est définie formellement pour la première fois par Pierre Varignon (1654-1722) le 5 juillet 1698, comme le rapport d'une longueur infiniment petite dx sur le temps infiniment petit dt mis pour parcourir cette longueur. Il utilise pour cela le formalisme du calcul différentiel mis au point quatorze ans plus tôt par Leibniz (1646-1716).

Il faut distinguer deux types de vitesse :
- La vitesse moyenne, qui répond très précisément à la définition élémentaire. Elle se calcule en divisant la distance parcourue par le temps de parcours.
- La vitesse instantanée, qui est obtenue par passage à la limite de la définition de la vitesse. Elle est définie à un instant précis, via la notion de dérivation $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Lorsqu'un mobile se déplace d'un point $R_1 = R(t_1)$ à un point $R_2 = R(t_2)$, nous pouvons définir la vitesse moyenne du mobile entre ces deux points par le rapport entre la distance parcourue et le temps mis pour la parcourir. Il s'agit donc d'exprimer une variation de la position d'un objet par rapport à un intervalle de temps.

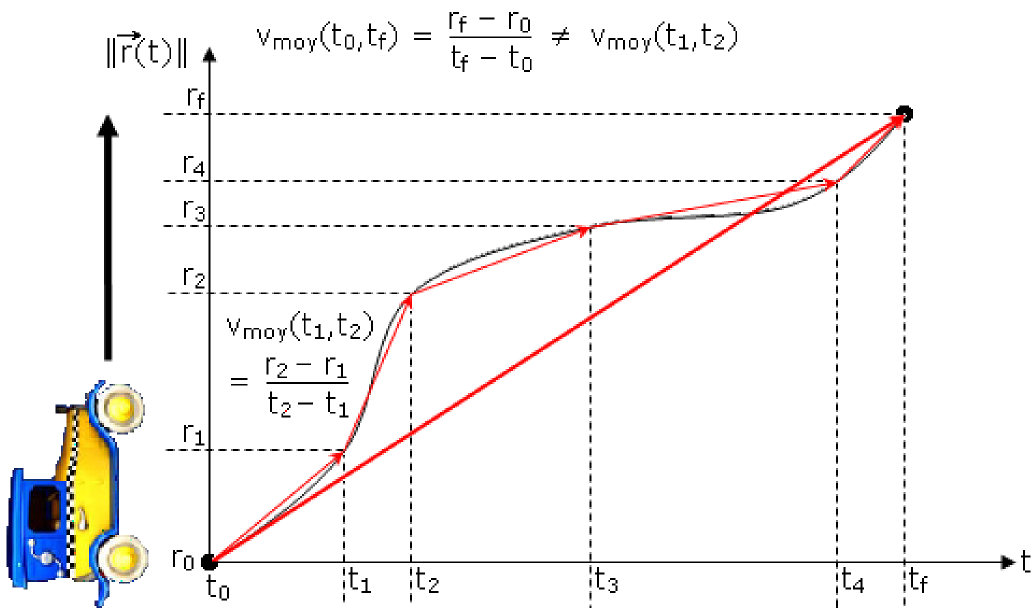


FIGURE 2.2 – Illustration de la vitesse moyenne d'un mobile. La vitesse moyenne entre t_1 et t_2 est différente de la vitesse moyenne entre t_0 et t_f.

Par exemple, quand une voiture se déplace de 50 km en 2 heures, la vitesse moyenne est de 25 km/h car $v_{moy} = \frac{50}{2}\frac{km}{h} = 25\frac{km}{h}$.

On a

$$\vec{v}_{moy} = \frac{O\vec{R}_2 - O\vec{R}_1}{t_2 - t_1} = \frac{R_1\vec{R}_2}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}$$

où $O\vec{R}_1$ et t_1 sont la position et le moment initiaux, tandis que $O\vec{R}_2$ et t_2 sont la position et le moment finaux de la vitesse.

Lors de cette opération, nous pouvons constater que, $\frac{1}{(t_2-t_1)}$ étant un scalaire, le vecteur vitesse moyenne du mobile sera dans le sens de la trajectoire : de R_1 à R_2. Donc, la vitesse moyenne du mobile dans un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ donné s'exprimera par

$$\vec{v}_{moy}(t_1, t_2) = \frac{O\vec{R}(t_2) - O\vec{R}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

En considérant que $t_1 = t$ et $t_2 = t'$, Lorsqu'on passe à la limite pour $t' \to t$, on obtient la vitesse instantannée du mobile :

$$\vec{v}(t) = \lim_{t' \to t} \vec{v}_{moy}(t, t') = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t')}{t - t'} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

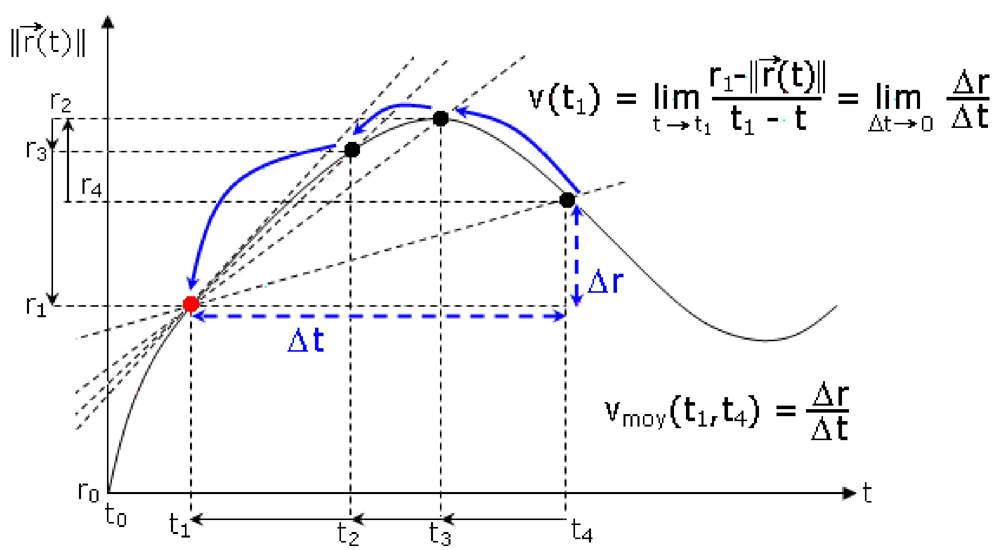


FIGURE 2.3 – Vitesse instantannée d'un mobile en fonction du temps. La vitesse instantannée au temps t est donnée par le coefficient angulaire de la tangente au graphique du déplacement $||\vec{r}(t)||$ à cet instant t.

Lorsqu'un mobile se déplace d'un point de coordonnées $\vec{r}$ à un point $\vec{r}'$ très proche, nous pouvons définir la vitesse moyenne du mobile entre ces deux points par le rapport entre la distance parcourue et le temps mis pour la parcourir. Il s'agit donc d'exprimer une variation de la position d'un objet par rapport à un intervalle de temps.

À la limite, pendant l'intervalle de temps $[t, t'] = [t, t + dt]$ infiniment petit, le mobile effectue un déplacement infiniment petit effectué de $\vec{r}$ à $\vec{r'} = \vec{r} + d\vec{r}$. Sa vitesse instantannée $\vec{v}(t)$ sera donc donnée par le rapport $\frac{\vec{r}+d\vec{r}-\vec{r}}{t+dt-t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

La vitesse instantannée donne la vitesse d'un objet en un point. Par exemple, lorsque, dans une voiture, le compteur indique 90 km/h, alors la norme de la vitesse instantannée de la voiture est de 90 km/h.

Avec la trajectoire $\vec{r}(t)$ et la notation $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, nous avons que la vitesse instantannée est la dérivée de la position par rapport au temps et nous pouvons écrire.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

De plus, de par la signification physique de la dérivée, nous pouvons déduire de ce qui précède que le vecteur vitesse instantannée est toujours tangent à la trajectoire du mobile.

Dans le cas d'un mobile évoluant de manière rectiligne et à vitesse constante, le vecteur vitesse instantannée sera dans le sens de la trajectoire, tout comme le vecteur vitesse moyenne. Le cas se compliquera dans l'étude du mouvement circulaire, où la vitesse moyenne du mobile sera nulle étant donné qu'il tourne en rond.

Hodographe des vitesses

L'extrémité des vecteurs vitesse de la trajectoire, ramenés à une origine fixe, décrit l'hodographe des vitesses.

2.1.3 Accélération moyenne et accélération instantannée

L'accélération d'un mobile est le taux de variation de sa vitesse. En d'autres mots, son accélération est le rapport entre une variation de sa vitesse ($\Delta\vec{v}$) et la durée durant laquelle cette variation de la vitesse se produit (Δt).

Considérons l'acception populaire signifiant « aller plus vite » (accélération) : si la vitesse d'un objet augmente de 1 mètre par seconde (m/s) en une seconde (par exemple sa vitesse passe de 3 m/s à 4 m/s en une s), son accélération est de 1 « mètre par seconde » par seconde, soit 1 $\frac{m/s}{s}$, que l'on note aussi $1\frac{m}{s^2}$ ou 1 $m.s^{-2}$.

L'accélération est représentée par un vecteur et donc mesurée en mètres par seconde carrée.

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Cette définition formelle de l'accélération a été présentée pour la première fois par Pierre Varignon le 20 janvier 1700 dans une communication devant l'académie royale des sciences de Paris. De la même façon qu'il avait bâti la notion de vitesse, il a défini l'accélération par une simple opération de calcul

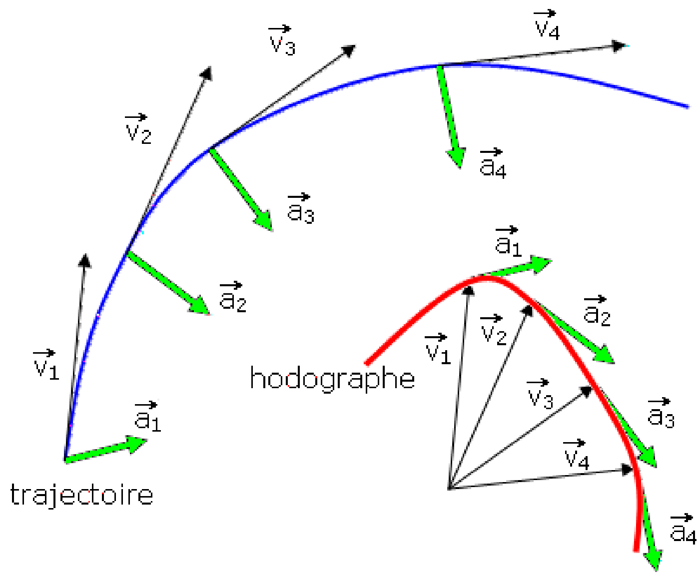


FIGURE 2.4 – Trajectoire (à gauche) et hodographe des vitesses (à droite). L'accélération instantannée est tangente à l'hodographe des vitesses.

différentiel (accélération instantanée).

Il faut distinguer deux types d'accélération :

- L'accélération moyenne, qui répond très précisément à la définition élémentaire. Elle se calcule en divisant la variation de vitesse qu'effectue le mobile sur son parcours par le temps de parcours.
- L'accélération instantanée, qui est obtenue par passage à la limite de la définition de l'accélération. Elle est définie à un instant précis, via la notion de dérivation $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Lorsqu'un mobile passe d'une vitesse $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$ à une vitesse $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$, nous pouvons définir l'accélération moyenne du mobile entre ces deux vitesses par le rapport entre la variation de vitesse et le temps mis pour l'effectuer. Il s'agit donc d'exprimer une variation de la vitesse d'un objet par rapport à un intervalle de temps.

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

où $\vec{v_1}$ et t_1 sont la vitesse et le moment initiaux, tandis que $\vec{v_2}$ et t_2 sont la vitesse et le moment finaux de l'accélération.

Lors de cette opération, nous pouvons constater que, $\frac{1}{(t_2-t_1)}$ étant un scalaire, le vecteur accélération moyenne du mobile sera dans le sens de la variation du vecteur vitesse : de $\vec{v}_1$ à $\vec{v}_2$. Donc, l'accélération moyenne du mobile dans un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ donné s'exprimera par

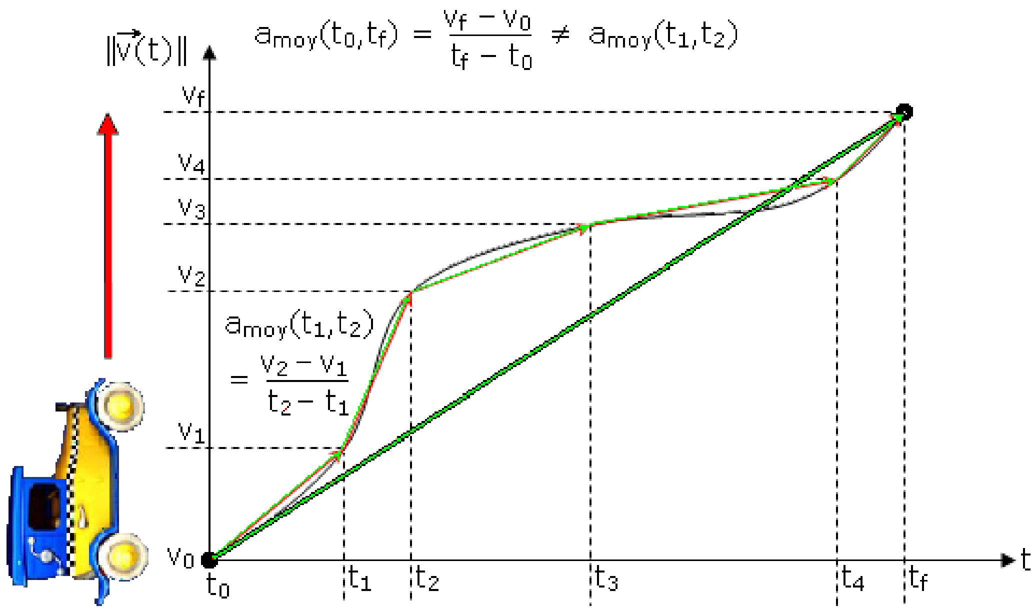


FIGURE 2.5 – Illustration de l'accélération moyenne d'un mobile. L'accélération moyenne entre t_1 et t_2 est différente de l'accélération moyenne entre t_0 et t_f.

$$\vec{a}_{moy}(t_1, t_2) = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

En considérant que $t_1 = t$ et $t_2 = t'$, Lorsqu'on passe à la limite pour $t' \to t$, on obtient l'accélération instantannée du mobile :

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \to t} \vec{a}_{moy}(t, t') = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t')}{t - t'} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t)$$

Lorsqu'un mobile passe d'une vitesse $\vec{v}$ à une vitesse $\vec{v}'$ très proche, nous pouvons définir l'accélération moyenne du mobile entre ces deux vitesses par le rapport entre la variation de vitesse et le temps mis pour effectuer cette variation. Il s'agit donc d'exprimer une variation de la vitesse d'un objet par rapport à un intervalle de temps.

À la limite, pendant l'intervalle de temps $[t, t'] = [t, t + dt]$ infiniment petit, le mobile effectue une variation de vitesse infiniment petite effectué de $\vec{v}$ à $\vec{v}' = \vec{v} + d\vec{v}$. Son accélération instantannée sera donc donnée par le rapport $\frac{\vec{v}+d\vec{v}-\vec{v}}{t+dt-t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Avec la vitesse $\vec{v}(t)$ et la notation $\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, nous avons que l'accélération instantannée est la dérivée de la vitesse instantannée en fonction du temps et nous pouvons écrire.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{v}\dot{(t)}$$

De plus, de par la signification physique de la dérivée, nous pouvons déduire de ce qui précède que le vecteur accélération instantannée est toujours dans le sens du changement de direction.

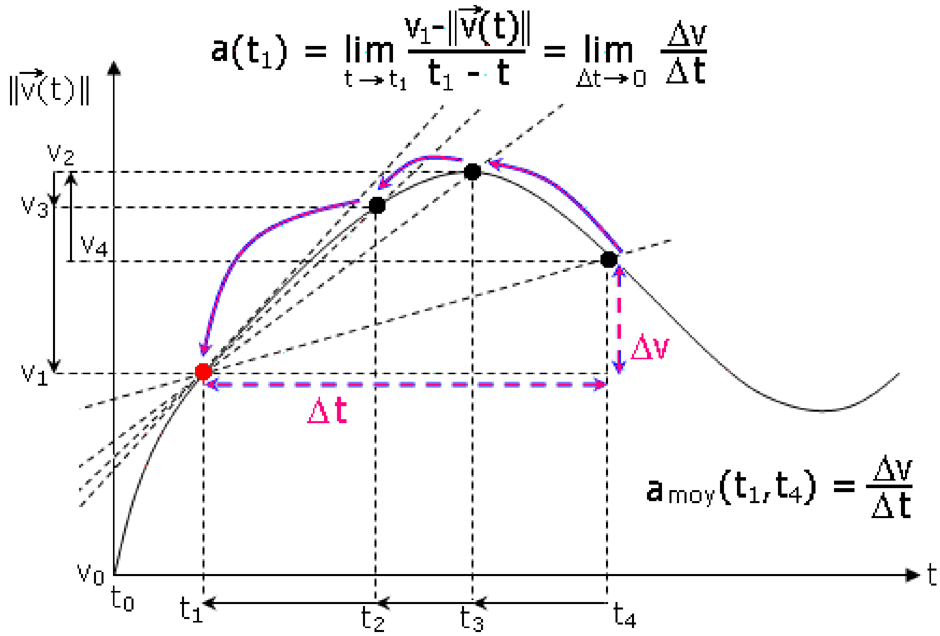


FIGURE 2.6 – Accélération instantannée d'un mobile en fonction du temps. L'accélération instantannée au temps t est donnée par le coefficient angulaire de la tangente au graphique de la vitesse $||\vec{v}(t)||$ à cet instant t.

Dans le cas d'un mobile évoluant de manière rectiligne et à vitesse constante, le vecteur accélération instantannée sera dans le sens de la trajectoire, tout comme le vecteur accélération moyenne. Le cas se compliquera dans l'étude du mouvement circulaire, où l'accélération moyenne du mobile sera nulle étant donné qu'il tourne en rond, mais son accélération instantannée incurve sa trajectoire puisque nous avons dit plus haut que le vecteur accélération instantannée était toujours dans le sens du changement de direction.

Dans la vie courante, on distingue en effet trois événements que la physique regroupe sous le seul concept d'accélération :

- Aller plus vite : accélérer (au sens commun plus restrictif). L'accélération est positive, c'est-à-dire que le vecteur accélération possède une composante dans le sens de la vitesse.
- Aller moins vite : décélérer (ou freiner, ralentir dans le langage commun). L'accélération est négative, ou le vecteur accélération possède une composante opposée au sens de la vitesse.
- Changer de direction (tourner ou virer dans le langage commun). L'accélération est perpendiculaire à la vitesse, si celle-ci change de direction sans changer de norme).

« Accélérer » peut finalement se résumer dans le sens de « modifier une vitesse ».

Dans ce cours, l'intérêt d'introduire l'hodographe des vitesses était que, de la même manière que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du mobile, le vecteur accélération est tangent à l'hodographe des vitesses de ce mobile.

De plus, si on décompose le vecteur accélération $\vec{a}$ en une accélération tangentielle au mouvement $\vec{a}_t$ et en une accélération normale $\vec{a}_n$. On peut prouver (nous le ferons dans le chapitre sur la dynamique) que

$$\vec{a}_t = \frac{d||\vec{v}||}{dt}\vec{1_t}$$

et

$$\vec{a}_n = -\frac{||\vec{v}||^2}{\rho}\vec{1_n}$$

où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire. Il se définit par $\rho = \frac{d||\vec{r}||}{d\theta}$ où l'angle θ représente l'angle formé entre la droite passant par le centre de la rotation et de vecteur directeur $\vec{1_n}(t)|_{t=t_0}$ et le vecteur $\vec{1_n}(t)$.

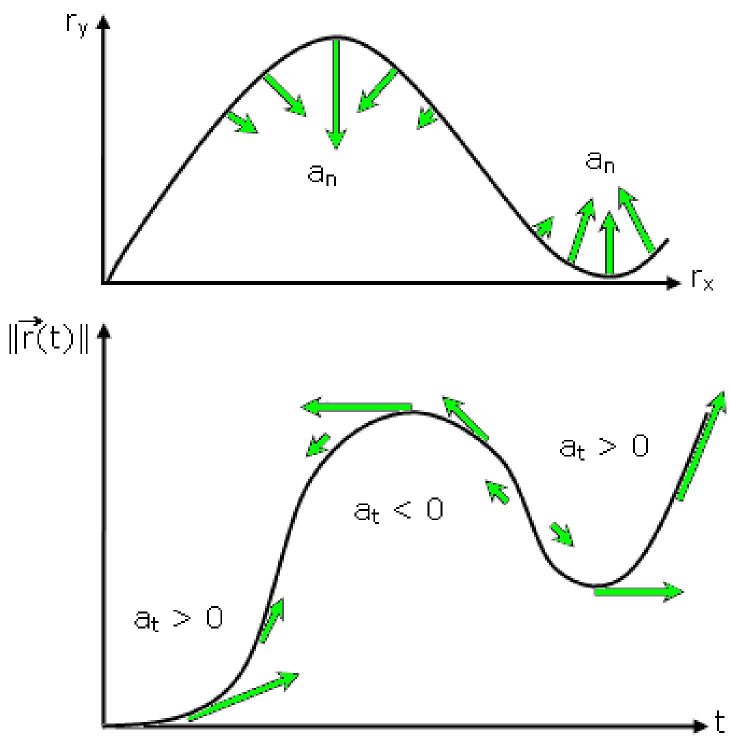


FIGURE 2.7 – Représentations de l'accélération normale (en haut) et tangentielle (en bas) d'un mouvement : illustration des phénomènes d'accélération, décélération et de changement de direction.

L'accélération tangentielle $\vec{a}_t$ décrit la variation du module de la vitesse par unité de temps. Par contre, l'accélération normale $\vec{a}_n$ est due à une variation de la direction du mouvement, avec $||\vec{v}||$ constant ou non. Tant que la direction de $\vec{v}$ change, il y a accélération centripète, et pour un parcours circulaire ceci est toujours le cas. Si la direction et le module de $\vec{v}$ varient tous les deux, les deux accélérations $\vec{a}_t$ et $\vec{a}_n$ existent et sont perpendiculaires.

2.1.4 Equation différentielle du mouvement

Nous avons vu que la vitesse

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

et l'accélération

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$$

pevent s'exprimer comme

$$\begin{cases} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \end{cases}$$

En combiant les deux équations différentielles, nous avons :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Nous avons donc établi le lien entre trajectoire, vitesse instantannée et accélération instantannée d'un mobile.

$$\begin{cases} \vec{v}(t) &= \dot{\vec{r}}(t) \\ \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) &= \ddot{\vec{r}}(t) \end{cases}$$

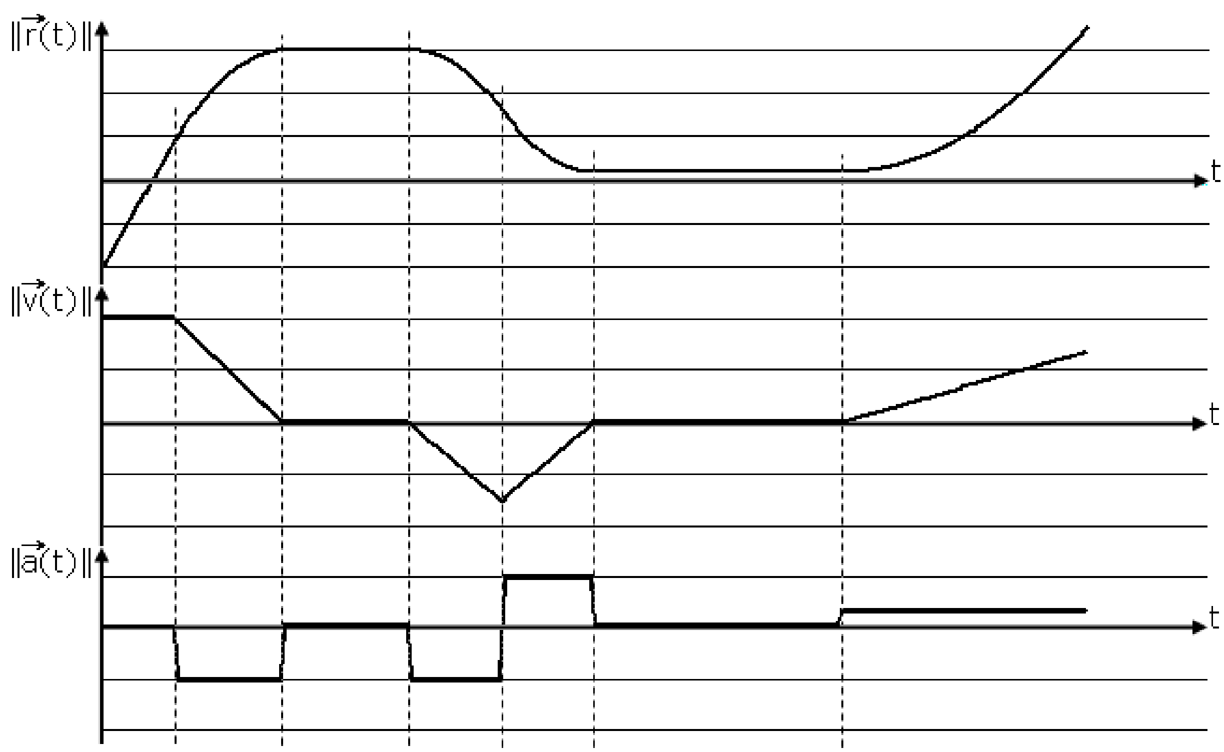


Figure 2.8 – Graphiques du déplacement, de la vitesse instantannée et de l'accélération instantannée en fonction du temps. Les trois graphiques sont correllés via l'opération de dérivation $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t)$.

La question de déduire l'accélération ou la vitesse de la trajectoire est triviale à partir du moment ou l'on maîtrise un minimum l'outil des dérivées. De même que déduire l'accélération de la vitesse le sera aussi. Déduire la vitesse connaissant l'accélération ou déduire la trajectoire connaissant la vitesse nécessitera d'employer le calcul intégral. Déduire la trajectoire à partir de l'accélération nécessitera donc d'intégrer deux fois l'accélération par rapport au temps.

Par exemple, lorsqu'un corps, lâché sans vitesse, chute verticalement d'une hauteur h, son accélération g valant environ 10 m/s^2, sa trajectoire sera donnée par

$$r(t) = \iint \ddot{r}(t)\, dt^2 = \iint a\, dt^2 = \iint g\, dt^2 = \int \left(\int 10dt \right) dt = \int (10t + C_1)\, dt = 10t^2/2 + C_1 t + C_2$$

Il faudra déduire les constantes C_1 et C_2 des conditions initiales $r_{(t=0)} = h$ et $\dot{r}_{(t=0)} = v_{(t=0)} = 0$.

2.2 Mouvements particuliers

On distingue différents mouvements particuliers en cinématique :

- La trajectoire d'un mouvement rectiligne est une droite.
- La trajectoire d'un mouvement circulaire est un cercle.
- Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement uniforme, la norme de son vecteur vitesse est constante.
- Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, son vecteur vitesse est constant (en direction, en sens et en norme).
- Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement uniformément accéléré, la norme de son vecteur accélération est constant.
- Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne et uniformément accéléré, son vecteur accélération est constant (en direction, en sens et en norme).
- Au cours d'un mouvement de translation d'un solide, à chaque instant, tous les points du solide ont le même vecteur vitesse.
- Au cours d'un mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe, tous les points du solide ont des trajectoires circulaires dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation et centrées sur cet axe.

2.2.1 Mouvement rectiligne uniforme

Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, son vecteur vitesse est constant (en direction, en sens et en norme). Donc, $\vec{v}(t) = \vec{v}$ et $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_x & = & 0 \\ a_y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dv_x}{dt} & = & 0 \\ \frac{dv_y}{dt} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v'_x & = & 0 \\ v'_y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v_x & = & v_{0x} \text{ constante} \\ v_y & = & v_{0y} \text{ constante} \end{array} \right.$$

Donc, on a, avec la connaissance de la vitesse du mobile $\vec{v} \equiv (v_{0x}, v_{0y})$,

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v_x & = & v_{0x} \\ v_y & = & v_{0y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dr_x}{dt} & = & v_{0x} \\ \frac{dr_y}{dt} & = & v_{0y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} dr_x & = & v_{0x} dt \\ dr_y & = & v_{0x} dt \end{array} \right.$$

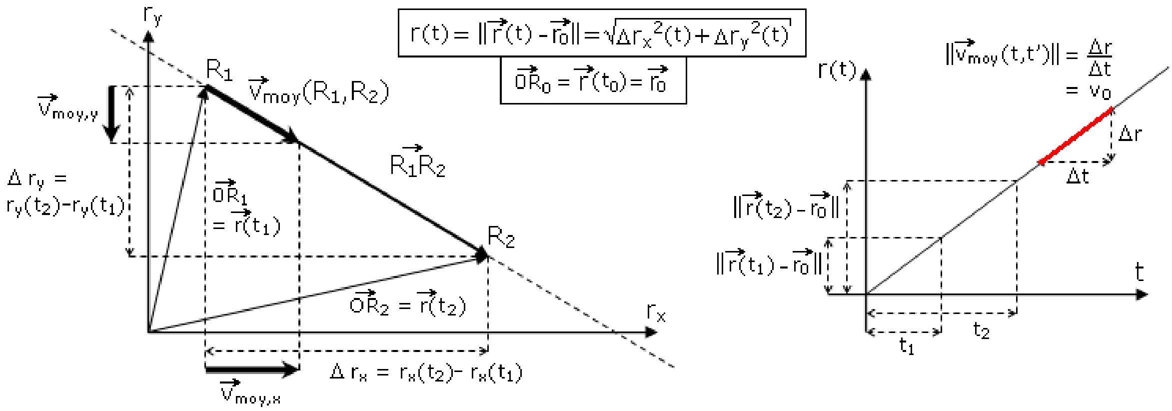


FIGURE 2.9 – Mouvement rectiligne uniforme : trajectoire du mobile dans le plan Oxy (à gauche) et déplacement effectué en fonction du temps $||\vec{r}(t)||$ (à droite)

Avec la condition initiale $\vec{r}(t)|_{t=t_0} = \vec{r_0}$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $r_x(t_0) = r_{0x}$ et $r_y(t_0) = r_{0y}$ et que nous allons injecter dans le système que nous étudions, nous obtenons.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \int_{r_{0x}}^{r_x} dr_x & = & \int_{t_0}^{t} v_{0x} dt \\ \int_{r_{0y}}^{r_y} dr_y & = & \int_{t_0}^{t} v_{0y} dt \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} [r_x]_{r_{0x}}^{r_x} & = & v_{0x}\,[t]_{t_0}^{t} \\ [r_y]_{r_{0y}}^{r_y} & = & v_{0y}\,[t]_{t_0}^{t} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r_x - r_{0x} & = & v_{0x}(t-t_0) \\ r_y - r_{0y} & = & v_{0y}(t-t_0) \end{array} \right.$$

En conclusion, nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r_0} = \vec{v_0}(t-t_0)}$$

se présente comme deux équations dépendant d'un paramètre commun : le temps. On pourra donc faire abstraction du temps pour dessiner la trajectoire du projectile sur un plan Oxy.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r_x(t) & = & v_{0x}(t-t_0) + r_{0x} \\ r_y(t) & = & v_{0y}(t-t_0) + r_{0y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{r_x - r_{0x}}{v_{0x}} + t_0 & = & t \\ \frac{r_y - r_{0y}}{v_{0y}} + t_0 & = & t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_x - r_{0x}}{v_{0x}} + t_0 = \frac{r_y - r_{0y}}{v_{0y}} + t_0$$

$$\Leftrightarrow r_y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} r_x + (r_{0y} - r_{0x}\frac{v_{0y}}{v_{0x}})$$

En posant $m = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ et $p = r_{0y} - r_{0x}\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$, on constate que la trajectoire du projectile considéré sera rectiligne, étant donné que nous avons l'équation d'une droite.

$$\Leftrightarrow r_y = m\, r_x + p$$

2.2.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Lorsqu'un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, son vecteur accélération est constant (en direction, en sens et en norme). Donc, $\vec{a}(t) = \vec{a}$.

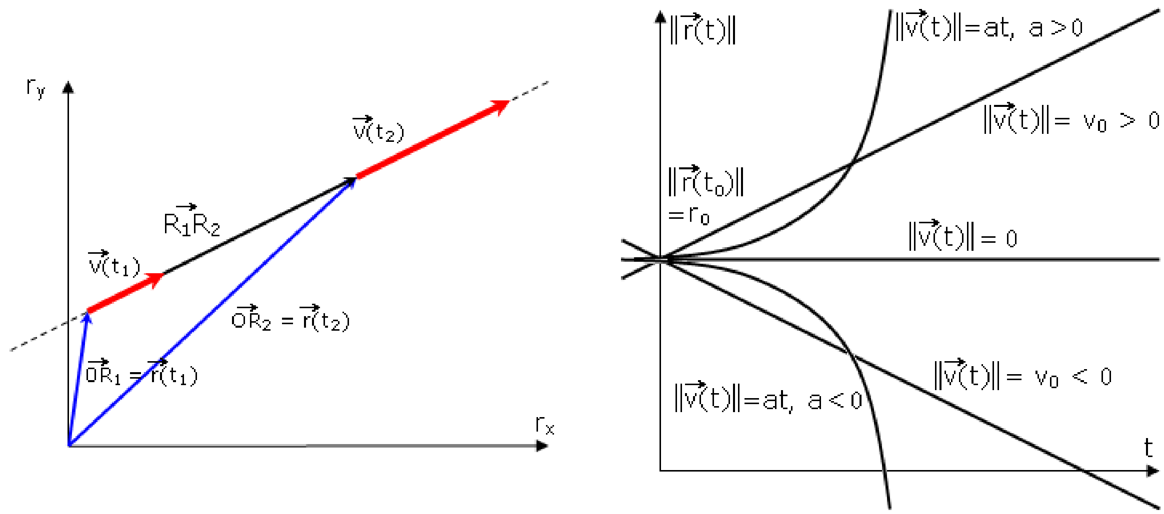


FIGURE 2.10 – Mouvement rectiligne uniformément : trajectoire du mobile dans le plan Oxy (à gauche) et déplacement effectué en fonction du temps $||\vec{r}(t)||$ (à droite). La trajectoire de gauche correspond à une accélération $a > 0$, puisque la vitesse $||\vec{v}(t)||$ augmente avec le déplacement.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_x(t) & = & a_x \text{ constante} \\ a_y(t) & = & a_y \text{ constante} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dv_x}{dt} & = & a_x \\ \frac{dv_y}{dt} & = & a_y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} dv_x & = & a_x\, dt \\ dv_y & = & a_y\, dt \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \int dv_x & = & \int a_x\, dt \\ \int dv_y & = & \int a_y\, dt \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v_x - v_{0x} & = & a_x(t-t_0) \\ v_y - v_{0y} & = & a_y(t-t_0) \end{array} \right.$$

Nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}(t-t_0)}$$

Donc, on a, avec la connaissance de la vitesse initiale du mobile $\vec{v}_0 \equiv (v_{0x}, v_{0y})$,

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v_x & = & a_x(t-t_0) + v_{0x} \\ v_y & = & a_y(t-t_0) + v_{0y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dr_x}{dt} & = & a_x(t-t_0) + v_{0x} \\ \frac{dr_y}{dt} & = & a_y(t-t_0) + v_{0y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} dr_x & = & (a_x(t-t_0) + v_{0x})dt \\ dr_y & = & (a_y(t-t_0) + v_{0y})dt \end{array} \right.$$

Avec la condition initiale $\vec{r}(t)|_{t=t_0} = \vec{r_0}$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $r_x(t_0) = r_{0x}$ et $r_y(t_0) = r_{0y}$ et que nous allons injecter dans le système que nous étudions, nous obtenons.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \int_{r_{0x}}^{r_x} dr_x & = & \int_{t_0}^{t} (a_x(t-t_0) + v_{0x})dt \\ \int_{r_{0y}}^{r_y} dr_y & = & \int_{t_0}^{t} (a_y(t-t_0) + v_{0y})dt \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} [r_x]_{r_{0x}}^{r_x} & = & a_x \left[\frac{t^2}{2} - t_0 t\right]_{t_0}^{t} + v_{0x}\,[t]_{t_0}^{t} \\ [r_y]_{r_{0y}}^{r_y} & = & a_y \left[\frac{t^2}{2} - t_0 t\right]_{t_0}^{t} + v_{0y}\,[t]_{t_0}^{t} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} r_x - r_{0x} & = & a_x \frac{(t-t_0)^2}{2} + v_{0x}(t-t_0) \\ r_y - r_{0y} & = & a_y \frac{(t-t_0)^2}{2} v_{0y}(t-t_0) \end{array} \right.$$

En conclusion, nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{a}\frac{(t-t_0)^2}{2} + \vec{v}_0(t-t_0)}$$

« contient » l'équation de la vitesse instantannée $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ donnée par

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) = \frac{d}{dt}\left(\vec{a}\frac{(t-t_0)^2}{2} + \vec{v}_0(t-t_0)\right) \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \vec{a}(t-t_0) + \vec{v}_0$$

et, si $\vec{a} = \vec{0}$, on retrouve le MRU

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t-t_0)}$$

chute libre d'un corps

On se trouve dans un cas à une dimension où le corps en mouvement ne peut que « monter » ou « descendre ». Cependant, il convient de ne pas négliger la notation vectorielle $\vec{r}$ car celle-ci nous permettra d'être systématique dans nos calculs et d'éviter de fréquentes erreurs de signes.

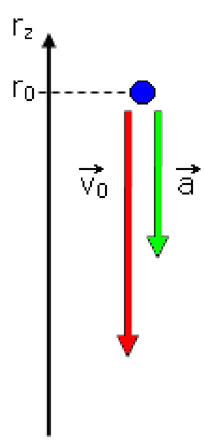


FIGURE 2.11 – chute libre d'un corps. Le sens de l'axe r_z est choisi arbitrairement vers le haut. Dans ces conditions, l'accélération gravitationnelle sera dirigée vers le bas.

Considérons un pot de fleur, lâché à l'instant $t_0 = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ nulle, tombant d'une hauteur $h = ||\vec{r}_0||$ sur la tête d'un passant. Pendant sa chute, le pot est soumis à une accélération $\vec{a}(t) = \vec{g}$ dirigée vers le bas. La vitesse instantannée du pot au moment t_{final} de l'impact avec la tête du passant située à une hauteur $||\vec{r}_{final}|| = 0$ sera donnée par

$$\vec{v}(t_{final}) = \vec{a}(t_{final} - t_0) + \vec{v}_0 = \vec{a}(t_{final} - 0) + \vec{0} = \vec{a}\; t_{final}$$

Le temps de chute t_{final} sera donné en résolvant l'équation

$$\vec{r}(t_{final}) - \vec{r}_0 = \vec{a}\frac{(t_{final} - 0)^2}{2} + \vec{0}(t_{final} - 0)$$

$$\Leftrightarrow -\vec{r}_0 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a}\frac{t_{final}^2}{2} + \vec{0} \cdot \vec{a} t_{final}$$

$$\Leftrightarrow t_{final}^2 = -2\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{a}}{||\vec{a}||^2}$$

Or, comme $\vec{r}_0$ et $\vec{a}$ sont de sens opposés, ils forment un angle $\alpha = \pi$ et leur produit scalaire vaut donc l'opposé du produit de leur norme $-||\vec{r}_0||.||\vec{a}||$. Donc, si $||\vec{a}|| = g$, le temps de chute t_{final} sera donné par

$$t_{final} = \sqrt{2\frac{h}{g}}$$

Dans des problèmes plus généraux, on utilisera l'équation

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{a}\frac{(t-t_0)^2}{2} + \vec{v}_0(t - t_0)}$$

pour déduire le temps de la position ou vice-versa, et on utilisera l'équation

$$\boxed{\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0)}$$

pour déduire le temps de la vitesse ou vice-versa.

Exemple : un corps se trouve à l'instant $t_0 = 0\ s$ à une hauteur $||\vec{r}_0||$ de 200 m. 10 secondes plus tard (t_{final}), il se trouve à la hauteur $||\vec{r}(t_{final})||$ de 150 m. Déterminer sa vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(t)|_{t=0}$ si l'on considère que $g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$.

$$150.\vec{1_z} - 200.\vec{1_z} = -10.\vec{1_z}\frac{(10-0)^2}{2} + v_0.\vec{1_z}(10-0) \Leftrightarrow v_0.\vec{1_z} = 45.\vec{1_z}\ \ \frac{m}{s}$$

Ce qui signifie que le corps est, au temps $t_0 = 0$, lancé vers le haut et après avoir atteint une hauteur maximum, il retombe.

La hauteur maximum atteinte par ce corps lancé vers le haut nous sera donné indirectement par l'équation de la vitesse. En effet, pendant que le corps monte, sa vitesse est « positive ». Il ralentit, freiné par la gravité. Lorsque le corps commence à tomber, sa vitesse devient « négative ». Donc, au moment où le corps atteint sa hauteur maximum, sa vitesse s'annule car elle passe, à cet endroit, du « positif » au « négatif » (et donc forcément par zéro).

On a l'équation

$$\vec{0} - 45.\vec{1_z} = -10.\vec{1_z}(t_{montee} - 0) \Leftrightarrow t_{montee} = \frac{-45}{-10}\frac{m/s}{m/s^2} = 4,5\ \ s$$

Donc, en utilisant l'équation de la trajectoire, on a finalement

$$h_{max}\vec{1_z} - 200.\vec{1_z} = -10.\vec{1_z}\frac{(4,5-0)^2}{2} + 45\vec{1_z}(4,5-0) \Leftrightarrow h_{max} = 200 - 10.4,5^2/2 + 45.4,5 = 301,25\ \ m$$

Maintenant, si, au lieu de considérer que le corps tombe de 200 m à 150 m en 10 secondes, considérons que le corps tombe, dans les mêmes conditions, de 200 m à 150 m en 1 seule seconde.

On a l'équation

$$150.\vec{1_z} - 200.\vec{1_z} = -10.\vec{1_z}\frac{(1-0)^2}{2} + v_0.\vec{1_z}(1-0) \Leftrightarrow v_0.\vec{1_z} = -45.\vec{1_z}\ \ \frac{m}{s}$$

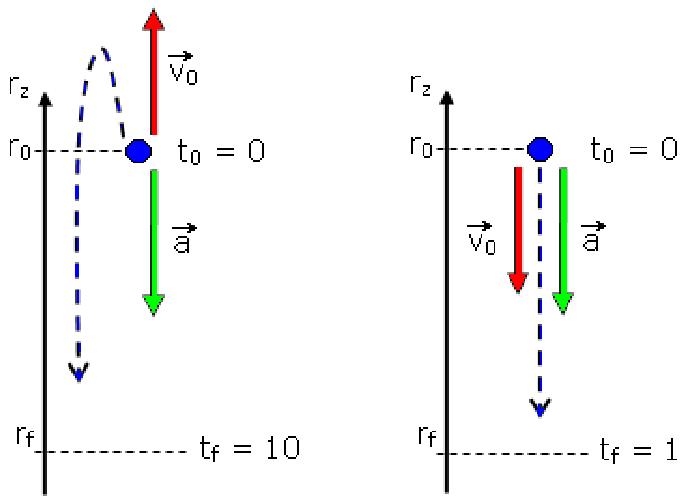


FIGURE 2.12 – Dans le premier cas, le pot de fleur met 10 secondes pour « chuter » de 50 mètres, alors que dans le deuxième cas, le corps ne met qu'une seule seconde pour « chuter » de ces mêmes 50 mètres. Nous pouvons en déduire que, dans le premier cas, le corps a initialement été lancé vers le haut avant de retomber, ce qui explique le signe obtenu pour v_0 dans les deux cas.

Ce qui signifie que le corps est, au temps $t_0 = 0$, lancé vers le bas.

Après 1 seconde de chute, le corps aura une vitesse $\vec{v}(t_{final})$ donnée par l'équation

$$\vec{v}(t_{final}) - (-45).\vec{1_z} = -10.\vec{1_z}(1-0) \Leftrightarrow \vec{v}(t_{final}) = -55.\vec{1_z} \quad \frac{m}{s}$$

2.2.3 Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement est dit circulaire si sa trajectoire est un cercle. On le qualifie d'uniforme lorsque la norme $||\vec{v}(t)||$ du vecteur vitesse est constante.

La trajectoire d'un tel point sera représentée par un vecteur $\vec{r}(t)$ de norme $||\vec{r}(t)||$ constante tournant autour d'un point O, centre de la rotation. On a

$$\vec{r}(t) = ||\vec{r}(t)||.\vec{1_n}(t) = R.\vec{1_n}(t)$$

Etant donné que la norme de la vitesse est constante, nous avons que l'accélération tangentielle $\vec{a}_t(t) = \frac{d||\vec{v}||}{dt}\vec{1_t}(t)$ est nulle.

L'accélération normale $\vec{a}_n = -\frac{||\vec{v}||^2}{R}\vec{1_n}(t)$ sera constante et dirigée vers l'intérieur du cercle étant donné que le rayon de courbure R d'un cercle est constant.

Rappelons que le rayon de courbure ρ se définit par $\rho = \frac{d||\vec{r}||}{d\theta}$ où l'angle θ représente l'angle formé entre la droite passant par le centre de la rotation et de vecteur directeur $\vec{1_n}(\theta_0)$ et le vecteur $\vec{1_n}(\theta)$.

Nous pouvons donc déduire de ce qui précède et de la définition du radian ($\theta = \frac{s}{R}\ rad$) que la distance s parcourue par le mobile en fonction de l'angle θ sera donée par

$$s = R(\theta - \theta_0)$$

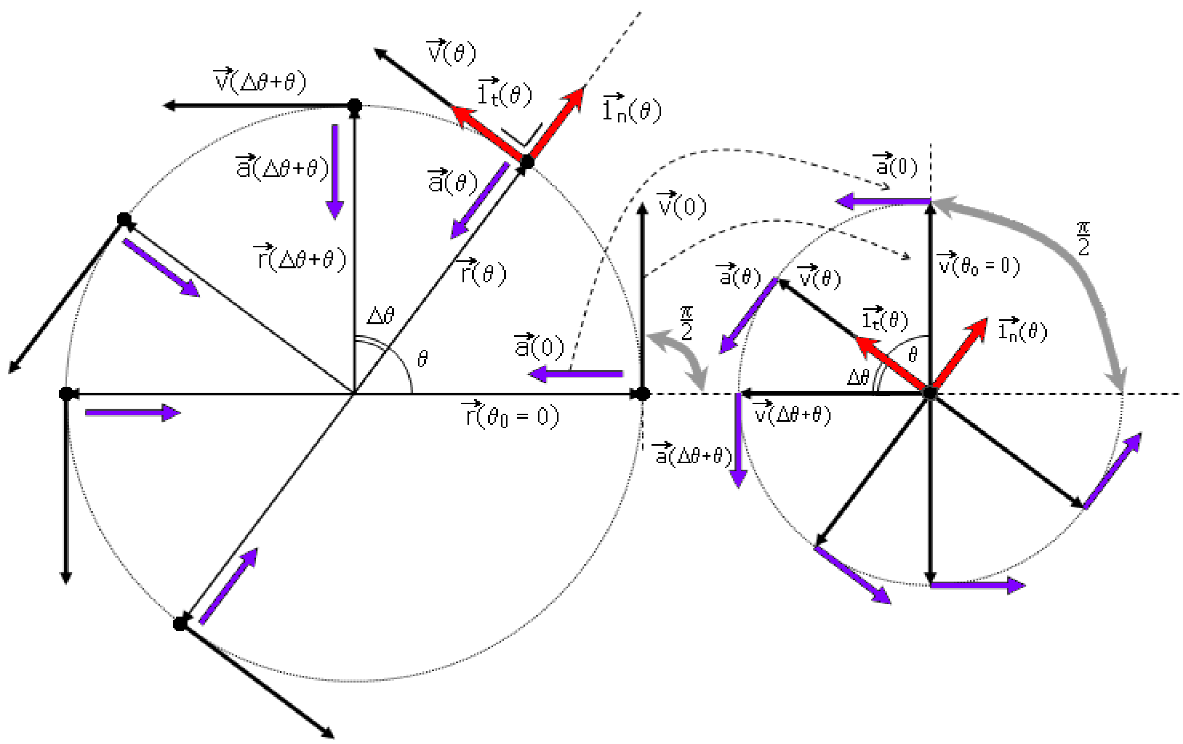


FIGURE 2.13 – Mouvement circulaire uniforme : trajectoire (à gauche) et hodographe (à droite) d'un mobile tournant autrour d'un point à vitesse angulaire constante.

Or, la vitesse instantannée du mobile correspond à la défivée par rapport au temps de son déplacement s et est tangente à sa trajectoire. Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, la vitesse sera donc toujours dans le même sens que le vecteur unitaire $\vec{1_t}(t)$ et de norme constante.

Puisque $||\vec{v}(t)||$ est constante et que $\Delta s = R\ \Delta\theta$,

$$||\vec{v}(t)|| = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{R\ d\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}$$

Donc, pour que la norme de la vitesse soit constante, la dérivée de l'angle θ par rapport au temps t doit donc être, elle aussi, constante. Ce qui implique que l'angle θ dépend d'une fonction du 1^{er} degré du temps

$$\theta(t) = \omega\ (t - t_0)$$

avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\ (\frac{rad}{s})$ constante et le déphasage $\theta_0 = \omega\ t_0\ (rad)$.

Finalement, la vitesse du mobile nous sera donnée par

$$||\vec{v}|| = R\dot{\theta} = R\ \omega$$

Et l'accélération normale par

$$||\vec{a}_n|| = \frac{||\vec{v}||^2}{R} = R\,\omega^2$$

Mouvement périodique

Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement périodique, c'est-à-dire qu'il se reproduit identique à lui-même au bout d'intervalles de temps égaux. La période T est le temps mis par le mobile pour parcourir un tour complet. On a donc $\omega\,T = 2\pi$ qu'on peut aussi écrire

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\,\nu \quad \text{et} \quad ||\vec{v}|| = R\frac{2\pi}{T} = 2R\,\pi\,\nu$$

où ν est la fréquence, c'est-à-dire le nombre de tours parcourus par le mobile par seconde :

$$\nu = \frac{1}{T} \quad Hz$$

où le Hertz Hz est défini par $1Hz = 1s^{-1}$.

Résolution à l'aide des dérivées

Remarquons que nous pouvons aussi arriver à ces résultats en considérant l'équation différentielle du mouvement $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$, l'équation de la vitesse $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ et que $\vec{r}(t) = R.\vec{1_n}(t)$. On a

$$\begin{array}{rrcl} & \vec{1_n}(\theta) & = & \cos\theta\vec{1_x} + \sin\theta\vec{1_y} \\ \Leftrightarrow & \vec{1_n}(t) & = & \cos\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \sin\omega(t-t_0)\vec{1_y} \end{array}$$

Donc, si nous voulons obtenir la vitesse instantannée, nous allons devoir dériver le vecteur position $\vec{r}(t)$ par rapport au temps. On a

$$\begin{array}{rrcl} & \vec{v}(t) & = & R\frac{d\vec{1_n}(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow & \vec{v}(t) & = & R\frac{d}{dt}\left(\cos\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \sin\omega(t-t_0)\vec{1_y}\right) \\ \Leftrightarrow & \vec{v}(t) & = & R\omega\left(-\sin\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \cos\omega(t-t_0)\vec{1_y}\right) \\ \Leftrightarrow & \vec{v}(t) & = & R\omega\vec{1_t} \end{array}$$

Pour obtenir l'accélération instantannée, nous allons devoir dériver deux fois le vecteur position $\vec{r}(t)$ par rapport au temps. On a

$$\begin{array}{rrcl} & \vec{a}(t) & = & R\frac{d^2\vec{1_n}(t)}{dt^2} \\ \Leftrightarrow & \vec{a}(t) & = & R\omega\frac{d}{dt}\left(-\sin\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \cos\omega(t-t_0)\vec{1_y}\right) \\ \Leftrightarrow & \vec{a}(t) & = & R\omega^2\left(-\cos\omega(t-t_0)\vec{1_x} - \sin\omega(t-t_0)\vec{1_y}\right) \\ \Leftrightarrow & \vec{a}(t) & = & -R\omega^2\vec{1_n} \end{array}$$

Ces résultats sont en accord avec les résultats établis précédemment. On a donc, pour le mouvement circulaire uniforme, les équations du mouvement suivantes :

$$\boxed{\vec{r}(t) = R.\vec{1_n}}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = R\omega.\vec{1_t}}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = -R\omega^2.\vec{1_n} == -\frac{||\vec{v}(t)||}{R}.\vec{1_n}}$$

Avec les vecteurs $\vec{1_n}$ et $\vec{1_t}$ exprimés dans un plan muni de coordonnées cartésiennes (x, y) tels que

$$\boxed{\begin{array}{rcc} \vec{1_n}(t) & = & \cos\theta\vec{1_x} + \sin\theta\vec{1_y} \\ & = & \cos\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \sin\omega(t-t_0)\vec{1_y} \end{array}}$$

et, avec $\vec{1_t}(t) = \frac{d\vec{1_n}/dt}{||d\vec{1_n}/dt||}$,

$$\boxed{\begin{array}{rcc} \vec{1_t}(t) & = & -\sin\theta\vec{1_x} + \cos\theta\vec{1_y} \\ & = & -\sin\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \cos\omega(t-t_0)\vec{1_y} \end{array}}$$

Dans les équations ci-dessus, nous devrions en toute rigueur écrire « $\theta - \theta_0$ » au lieu de simplifier les notations et de tout simplement écrire « θ », car on peut poser

$$\theta - \theta_0 = \theta(t) - \theta(t_0) = \omega t - \omega t_0 = \omega(t - t_0)$$

En outre, dans la plupart des problèmes, on considère généralement $t_0 = 0$ comme l'instant initial. L'angle initial θ_0 est, quant à lui, considéré comme le déphasage correspondant à l'instant initial.

2.2.4 La parabole de tir

Lorsque l'on projette un caillou en essayant de le jeter le plus loin possible, le projectile décrit, dans l'espace, une courbe qui ressemble à une cloche. Si le corps est lancé du point P de coordonnées $(r_{0x}, r0z)$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ décrivant un angle α avec l'horizontale, son mouvement $\vec{r}(t)$ sera décomposé en un mouvement horizontal $r_x(t)$ (selon l'axe Ox) et un mouvement vertical $r_z(t)$ (selon l'axe Oz). Nous allons étudier ces deux mouvements perpendiculaires, $r_x(t)$ et $r_z(t)$, indépendamments.

Soit

$$\vec{v}_0 = ||\vec{v}_0|| \cos\alpha.\vec{1_x} + ||\vec{v}_0|| \sin\alpha.\vec{1_z} = v_{0x}.\vec{1_x} + v_{0z}.\vec{1_z}$$

et

$$\tan\alpha = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}(t) & = & r_x(t).\vec{1_x} + r_z(t).\vec{1_z} \\ \vec{v}(t) & = & v_x(t).\vec{1_x} + v_z(t).\vec{1_z} \\ \vec{a}(t) & = & a_x(t).\vec{1_x} + a_z(t).\vec{1_z} \end{array}$$

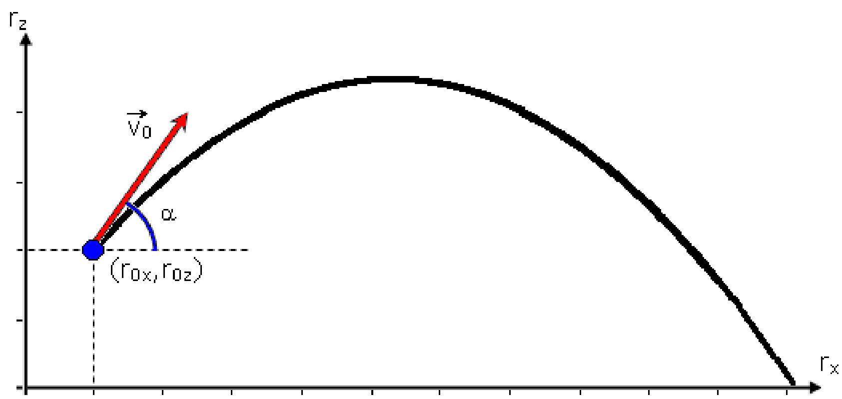


FIGURE 2.14 – Trajectoire dans le plan Oxz d'un projectile tiré d'un point de coordonnées (r_{0x}, r_{0z}) avec une vitesse initiale de norme $||\vec{v}_0||$ formant un angle α avec l'horizontale.

Nous savons que le corps, dans la direction x, n'est soumis à aucune accélération : $a_x = 0$. Le mouvement du corps selon x sera donc un mouvement rectiligne uniforme (MRU) vu qu'aucune accélération selon x ne perturbera la vitesse $v_x(t) = v_{0x}$ selon x.

Dans la direction Oz, le corps est soumis à l'accélération de la gravité : $a_z = -g$. Le mouvement du corps selon z sera donc un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) vu qu'aucune autre accélération ne vient perturber la chute. Par contre, la vitesse $v_z(t) = -gt + v_{0z}$ du mobile sera proportionnelle au temps t.

On a

$$\begin{array}{rcl} \vec{a}(t) & = & -g.\vec{1_z} \\ \vec{v}(t) & = & v_{0x}.\vec{1_x} + v_z(t).\vec{1_z} \end{array}$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_x(t) & = & 0 \\ a_z(t) & = & -g \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v_x(t) & = & v_{0x} \\ v_z(t) & = & -g(t - t_0) + v_{0z} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r_x(t) & = & v_{0x}(t - t_0) + r_{0x} \\ r_z(t) & = & -g\frac{(t-t_0)^2}{2} + v_{0z}(t - t_0) + r_{0z} \end{array} \right.$$

Pour $t_0 = 0$ et $\vec{r_0} \equiv (r_{0x}, r_{0y}) = (0, 0)$, nous avons les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r_x(t) & = & v_{0x}t \\ r_z(t) & = & -g\frac{t^2}{2} + v_{0z}t \end{array} \right.$$

Donc, si l'on remplace $t = \frac{r_x(t)}{v_{0x}}$ dans la deuxième équation, on trouve

$$\begin{aligned} r_z(t) &= -g\frac{r_x^2(t)}{2v_{0x}^2} + \frac{r_x(t)}{v_{0x}}v_{0z} \\ \Leftrightarrow r_z(t) &= -\frac{g}{2v_{0x}^2}r_x^2(t) + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}r_x(t) \end{aligned}$$

et, comme nous exprimons r_z en fonction de r_x, on peut faire abstraction de la dépendance temporelle de ces deux variables (on élimite t entre les deux équations).

$$\Leftrightarrow r_z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}r_x^2 + r_x\tan\alpha$$

Cette équation est celle d'une parabole passant par l'origine et dont la concavité est tournée vers le bas et présentant un axe de symétrie verticale. Il est intéressant de remarquer que la norme v_0 de la vitesse initiale $\vec{v}_0$ et l'angle de lancement α sont suffisants pour déterminer entièrement le mouvement décrit par le mobile.

Il existe 3 cas particuliers à cette trajectoire, avec la condition initiale $t_0 = 0$ et $(r_{0x}, r_{0z}) = (0, 0)$.

Nous avons donc les équations suivantes

$$\begin{array}{rclrcl} v_{0x} &=& ||\vec{v}_0||\cos\alpha & v_{0z} &=& ||\vec{v}_0||\sin\alpha \\ v_x(t) &=& v_{0x} & v_z(t) &=& -gt + v_{0z} \\ r_x(t) &=& v_{0x}t & r_z(t) &=& -g\frac{t^2}{2} + v_{0z}t \end{array}$$

Pour lesquelles nous allons faire varier le paramètre α selon les 3 cas particuliers :

1. $\alpha = 0$

   On a les valeurs

$$\begin{array}{rclrcl} \cos\alpha &=& 1 & \sin\alpha &=& 0 \\ v_{0x} &=& v_0 & v_{0z} &=& 0 \\ v_x(t) &=& v_0 & v_z(t) &=& -gt \\ r_x(t) &=& v_0t & r_z(t) &=& -g\frac{t^2}{2} \end{array}$$

2. $\alpha = \frac{\pi}{2}$

   On a les valeurs

$$\begin{array}{rclrcl} \cos\alpha &=& 0 & \sin\alpha &=& 1 \\ v_{0x} &=& 0 & v_{0z} &=& v_0 \\ v_x(t) &=& 0 & v_z(t) &=& -gt + v_0 \\ r_x(t) &=& 0 & r_z(t) &=& -g\frac{t^2}{2} + v_0t \end{array}$$

   Ici, le mobile monte jusqu'à une hauteur r_z^{max} où la vitesse v_z s'annule. Ensuite, le mobile redescend. Le temps de montée t_m est le temps tel que la vitesse verticale $v_z(t)$ passe de $v_z(0) = v_{0z}$ à

$v_z(t_m) = 0$.

Le temps de montée t_m sera donc donné par

$$v_z(t_m) = -gt_m + v_0 \Leftrightarrow t_m = \frac{v_0}{g}$$

La hauteur $r_z^{max} = r_z(t_m)$ est obtenue en remplaçant t_m dans l'équation

$$\begin{array}{rcl} r_z(t_m) & = & -g\frac{v_0^2}{2g^2} + v_0\frac{v_0}{g} \\ & = & \frac{v_0^2}{2g} \end{array}$$

3. $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

On a les valeurs

$$\begin{array}{rclrcl} \cos\alpha & = & 0 & \sin\alpha & = & -1 \\ v_{0x} & = & 0 & v_{0z} & = & -v_0 \\ v_x(t) & = & 0 & v_z(t) & = & -gt - v_0 \\ r_x(t) & = & 0 & r_z(t) & = & -g\frac{t^2}{2} - v_0 t \end{array}$$

Pour $t_0 \neq 0$ et $\vec{r_0} \equiv (r_{0x}, r_{0z}) \neq (0,0)$, nous aurions l'équation suivante, plus générale, qui s'obtient de la même manière :

$$\boxed{r_z - r_{0z} = -\frac{g}{2v_{0x}^2}(r_x - r_{0x})^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}(r_x - r_{0x})}$$

Qui est aussi l'équation d'une parabole, mais celle-ci passe par $\vec{r_0} \equiv (r_{0x}, r_{0z})$ au lieu de l'origine $(0,0)$ des axes. Par exemple, dans le problème du joueur de tennis frappant la balle avec sa raquette à une hauteur r_{0z} pour la renvoyer par dessus le filet, quel va être la trajectoire de la balle, si celle-ci à acquis une vitesse $\vec{v_0}$ suite au coup de raquette et que le tennisman se trouve à une distance r_{0x} du filet ?

Distance atteinte par le projectile : portée de tir

La distance atteinte par le projectile sera donnée par l'intersection de la parabole avec l'axe Ox. Autrement dit, la distance atteinte par le projectile sera donnée par les solutions r_x^{max} de l'équation $r_z - r_{0z} = -\frac{g}{2v_{0x}^2}(r_x - r_{0x})^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}(r_x - r_{0x})$ où on aura simplement une équation du 2^{eme} degré et où r_x^{max} est l'inconnue.

Avec la condition initiale $t_0 = 0$ et $(r_{0x}, r_{0z}) = (0,0)$, il vient

$$0 = -\frac{g}{2v_{0x}^2}(r_x^{max})^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} r_x^{max}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g}{2v_{0x}^2}(r_x^{max})^2 - \frac{v_{0z}}{v_{0x}} r_x^{max} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_x^{max}\left(\frac{g}{2v_{0x}^2}r_x^{max}-\frac{v_{0z}}{v_{0x}}\right)=0$$

Etant donné que nous avons défini l'angle α de lancement (ou de tir) comme

$$\tan\alpha=\frac{v_{0z}}{v_{0x}}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\Leftrightarrow r_x^{max}\left(\frac{g}{2||\vec{v}_0||^2\cos^2\alpha}r_x^{max}-\tan\alpha\right)=0$$

$$\Leftrightarrow r_x^{max}=0 \text{ ou bien } \frac{g}{2||\vec{v}_0||^2\cos^2\alpha}r_x^{max}=\tan\alpha$$

La solution $r_x^{max}=0$ correspond au « départ » du projectile, lorsque celui-ci quitte son origine. La solution $t_x^{max}>0$ correspond à « l'arrivée » du projectile, lorsque celui-ci percute sa cible (qui est le sol, en général). Nous avons donc, pour cette deuxième solution :

$$\Leftrightarrow r_x^{max}=\frac{\tan\alpha\, 2||\vec{v}_0||^2\cos^2\alpha}{g}=\frac{2||\vec{v}_0||^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow r_x^{max}=\frac{||\vec{v}_0||^2\sin 2\alpha}{g}}$$

Angle de tir correspondant à la portée maximale, dans le cas $(x_0,z_0)=(0,0)$

Nous pouvons écrire $\tan\alpha=\frac{v_{0z}}{v_{0x}}$. Dès lors, la distance atteinte par le projectile peut être vue comme une fonction dépendant du paramètre α. L'étude des extrema, via les dérivées, peut nous permettre de déduire l'angle α^{max} correspondant à la portée de tir maximum.

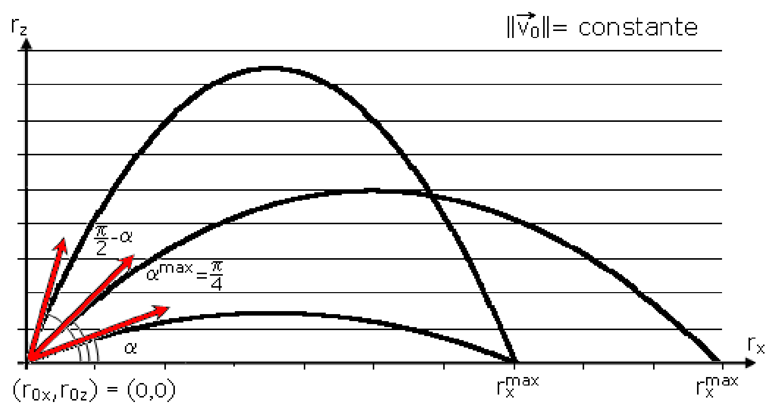


FIGURE 2.15 – Parabole de tir : portée de tir r_x^{max}.

Cependant, il nous suffit de considérer que $r_x^{max}=\frac{||\vec{v}_0||^2\sin 2\alpha}{g}$ et que les valeurs extrêmes d'un sinus oscillent entre -1 et 1 pour se dire que la valeur de r_x^{max} sera maximum si $\sin 2\alpha=1$. Autrement dit, la portée de tir sera maximum (et égale à p) si $2\alpha=\frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, elle vaudra $p=\frac{||\vec{v}_0||^2}{g}$.

Donc,

$$\boxed{\alpha^{max}=\frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad r_x^{max}(\tfrac{\pi}{4})=\frac{||\vec{v}_0||^2}{g}}$$

Hauteur maximum atteinte par le projectile

Pour déterminer la hauteur maximale atteinte par le projectile, il faudra tout d'abord définir après combien de temps sa vitesse verticale s'annule-t-elle ? Autrement dit, il faudra déterminer à partir de quel instant le corps commence-t-il à descendre ?

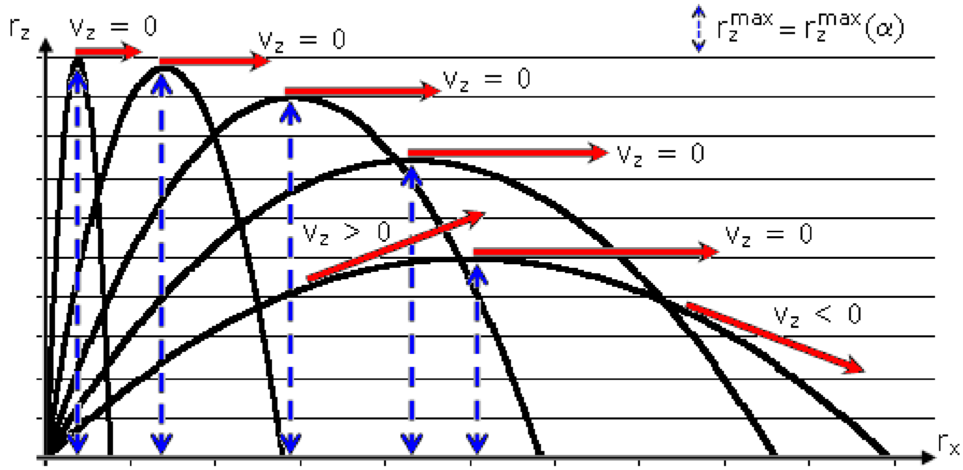


Figure 2.16 – Parabole de tir : hauteur maximum atteinte par le projectile r_z^{max}.

On a l'équation de la vitesse $v_z(t) = -gt + v_{0z} = -gt + ||\vec{v}_0|| \sin\alpha$. Donc, nous pouvons écrire, t_m étant le temps mis par le mobile pour atteindre sa hauteur maximale,

$$v_z(t_m) = -gt_m + ||\vec{v}_0|| \sin\alpha \Leftrightarrow 0 = -gt_m + ||\vec{v}_0|| \sin\alpha$$

Donc, on a, comme temps de montée t_m,

$$\boxed{t_m = \frac{||\vec{v}_0|| \sin\alpha}{g}}$$

Nous pouvons dès lors remplacer t par sa valeur t_m dans l'équation de la trajectoire $r_z(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_{0z}t$ pour obtenir la hauteur maximale. Nous avons

$$r_z^{max} = r_z(t_m) = -g\frac{t_m^2}{2} + v_{0z}t_m$$

Remplaçons par ce que nous avons trouvé pour t_m :

$$\Leftrightarrow r_z(t_m) = -g\frac{||\vec{v}_0||^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + ||\vec{v}_0|| \sin\alpha \frac{||\vec{v}_0|| \sin\alpha}{g}$$

Donc, la hauteur maximale r_z^{max} vaut

$$\boxed{r_z^{max} = \frac{||\vec{v}_0||^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

La hauteur maximale r_z^{max} que peut atteindre le projectile est fonction de l'angle de lancement α. Il nous suffit de considérer que $r_z^{max} = \frac{||\vec{v}_0||^2 \sin^2\alpha}{2g}$ et que les valeurs extrêmes d'un sinus au carré oscillent entre 0 et 1 pour se dire que la valeur de r_z^{max} sera maximum si $\sin^2\alpha = 1$. Autrement dit, la hauteur atteinte par le projectile sera maximum si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (voir cas particulier n^o 2). Dans ce cas, la hauteur atteinte par le projectile vaudra $h = \frac{||\vec{v}_0||^2}{2g} = \frac{p}{2}$, où p est la portée maximale atteinte par le projectile (qui correspond à un angle de lancement $\alpha = \frac{\pi}{4}$).

Temps total mis pour parcourir la trajectoire

Le temps t_p mis par le projectile pour parcourir la trajectoire est égal au temps mis pour aller de l'abscisse de l'origine du tir r_0x à la portée de tir r_x^{max}.

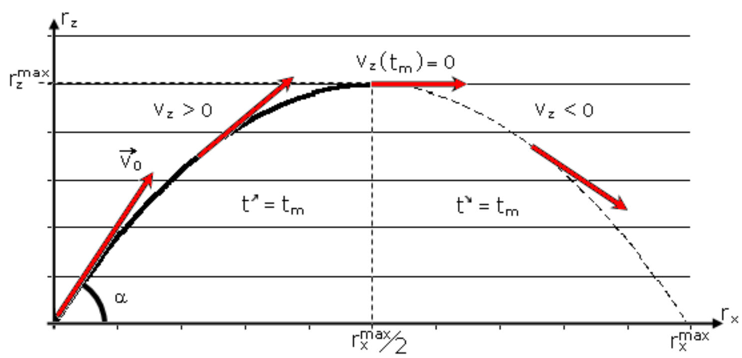


FIGURE 2.17 – Parabole de tir : temps de parcours du projectile t_p.

Avec la condition initiale $t_0 = 0$ et $(r_{0x}, r_{0z}) = (0, 0)$, il vient

$$r_x(t) = v_{0x}t$$

et, comme

$$r_x^{max} = \frac{||\vec{v}_0||^2 \sin 2\alpha}{g}$$

on a le temps de parcours t_p

$$t_p = \frac{r_x^{max}}{v_{0x}} = \frac{||\vec{v}_0||^2 2\sin\alpha\cos\alpha}{g\,||\vec{v}_0||\cos\alpha}$$

donc,

$$\boxed{t_p = 2\frac{||\vec{v}_0||\sin\alpha}{g} = 2t_m}$$

le temps de parcours t_p vaut donc le double du temps de montée. Autrement dit, le temps de montée t_m est égal au « temps de descente ».

Remarquons que le temps de parcours t_p pourrait être obtenu en considérant l'équation $r_z(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_{0y}t$ pour laquelle on recherche le temps t_p tel que $r_z(t_p) = 0$.

Détermination de la vitesse instantannée du projectile

On s'intéresse cette fois à la vitesse instantannée du projectile en fonction de sa position (r_x, r_z), non plus en fonction du temps t. Nous avions les équations paramétriques de la vitesse

$$\begin{cases} v_x(t) &= v_{0x} \\ v_z(t) &= -g(t-t_0)+v_{0z} \end{cases}$$

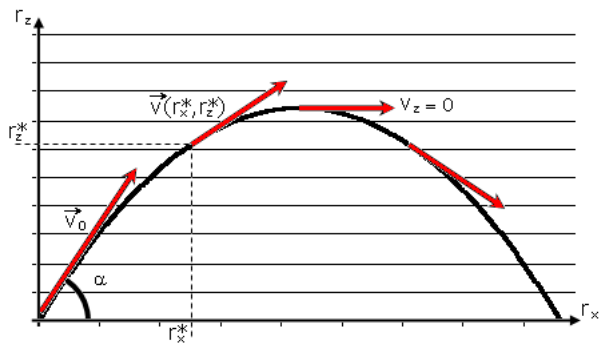


FIGURE 2.18 – Parabole de tir : vitesse instantannée du projectile $||\vec{v}(r_x, r_z)||$.

Etant donné que

$$\begin{aligned} v^2(r_x, r_z) &= ||\vec{v}(r_x(t), r_z(t))||^2 \\ &= v_x^2(t) + v_z^2(t) \\ &= v_{0x}^2 + (-g(t-t_0)+v_{0z})^2 \\ &= v_{0x}^2 + g^2(t-t_0)^2 + v_{0z}^2 - 2g(t-t_0)v_{0z} \\ &= v_{0x}^2 + v_{0z}^2 + g(g\tfrac{2(t-t_0)^2}{2} - 2v_{0z}(t-t_0) \\ &= ||\vec{v}_0||^2 - 2g(-g\tfrac{(t-t_0)^2}{2} + v_{0z}(t-t_0) \\ &= ||\vec{v}_0||^2 - 2g(r_z(t)) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\boxed{v(r_x, r_z) = \sqrt{||\vec{v}_0||^2 - 2g\ r_z}}$$

Ce qui signifie, comme nous l'avons déjà constaté précédemment, que la norme de la vitesse ne dépend que de la hauteur r_z du projectile.

Parabole de sûreté

Si la norme de la vitesse initiale $\vec{v}_0$ est fixée, sous quel angle α doit-on lancer le projectile pour qu'il atteigne un point P de coordonnées (x, z) fixées ?

Nous allons donc résoudre l'équation de la position

$$r_z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} r_x^2 + r_x \tan\alpha$$

par rapport à l'angle α.

On a

$$\begin{array}{rcl} r_z & = & -\frac{g}{2v_0^2} r_x^2 (1+\tan^2\alpha) + r_x \tan\alpha \\ \Leftrightarrow\ r_z & = & -\frac{g}{2v_0^2} r_x^2 \tan^2\alpha + r_x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2} r_x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Leftrightarrow\ \frac{g}{2v_0^2} r_x^2 \tan^2\alpha - r_x\tan\alpha + (\frac{g}{2v_0^2} r_x^2 + r_z) & = & 0 \\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{4}\frac{2g}{v_0^2} r_x^2 \tan^2\alpha - r_x\tan\alpha + (\frac{1}{4}\frac{2g}{v_0^2} r_x^2 + r_z) & = & 0 \end{array}$$

Avec la hauteur maximale $h = \frac{v_0^2}{g}$ atteinte par le projectile avec un angle de lancement $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on peut écrire, pour alléger les notations

$$\begin{array}{rcl} \Leftrightarrow\ \frac{r_x^2}{4h}\tan^2\alpha - r_x\tan\alpha + (\frac{r_x^2}{4h} + r_z) = 0 & & \\ \Leftrightarrow\ \tan^2\alpha - \frac{4h}{r_x^2} r_x \tan\alpha + \frac{4h}{r_x^2}(\frac{r_x^2}{4h} + r_z) & = & 0 \\ \Leftrightarrow\ r_x^2 \tan^2\alpha - 4h\ r_x\tan\alpha + (4hr_z + r_x^2) & = & 0 \end{array}$$

Nous allons chercher le discriminant Δ de cette équation du 2^{eme} degré en $\tan\alpha$

$$\Delta = (-4h\ r_x)^2 - 4r_x^2(4hr_z + r_x^2)$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl} (\tan\alpha)_{1,2} & = & \frac{-(-4h\ r_x)\pm\sqrt{\Delta}}{2r_x^2} \\ & = & \frac{4h\ r_x \pm \sqrt{4r_x^2(4h^2-4hr_z-r_x^2}}{2r_x^2} \\ & = & \frac{4h\ r_x \pm 2r_x\sqrt{4h^2-4hr_z-r_x^2}}{2r_x^2} \\ & = & \frac{2h\pm\sqrt{4h^2-4hr_z-r_x^2}}{r_x} \end{array}$$

Cette équation n'admettra de solution que si $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 \geq 0$.

- Si $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 > 0$, l'équation admet 2 solutions, c'est-à-dire qu'il existe 2 paraboles de tir passant par le point P de coordonnées (r_x, r_z).
- Si $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 = 0$, l'équation admet 1 seule solutions, c'est-à-dire qu'il existe 1 seule paraboles de tir passant par le point P de coordonnées (r_x, r_z).
- Si $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 < 0$, l'équation n'admet pas de solution, c'est-à-dire qu'on ne peut pas atteindre le point P de coordonnées (r_x, r_z).

L'équation $4h^2 - 4hr_z - r_x^2 = 0$ peut encore s'écrire

$$\boxed{r_z = -\frac{r_x^2}{4h} + h}$$

Il s'agit donc de l'équation d'une parabole, dont la concavité est tournée vers le bas, d'axe de symétrie Oz et passant par les points $(0, h)$ et $(2h, 0) = (p, 0)$ (où p est la portée de tir maximum).

En conclusion, pour un point P fixé et une vitesse initiale de norme v_0 fixée,
- Si le point P se trouve sur cette parabole, on ne peut l'atteindre que d'une seule manière.
- Si le point P se trouve en dessous de cette parabole, on peut l'atteindre de 2 manières différentes.
- Si le point P se trouve au-dessus de cette parabole, on ne peut pas l'atteindre avec le projectile.

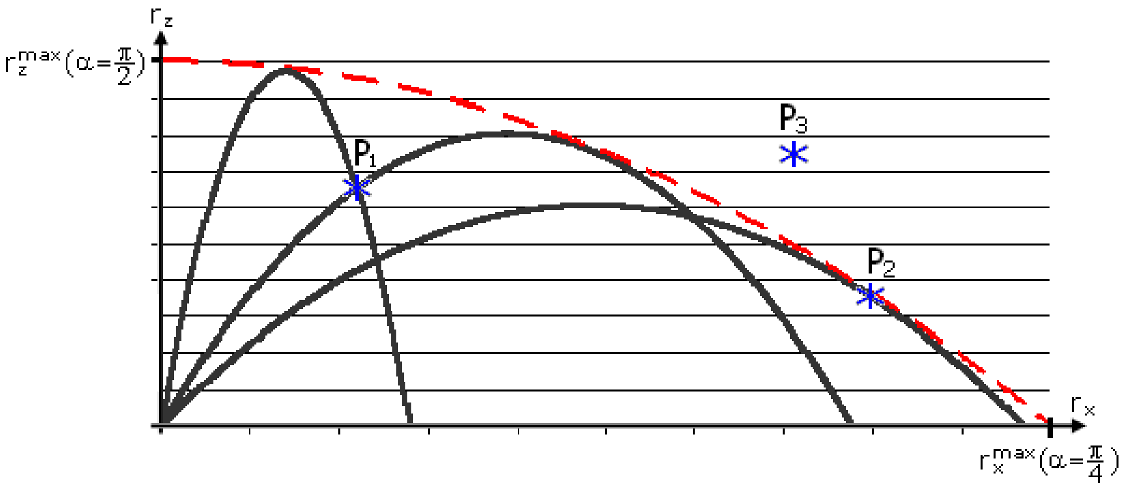


FIGURE 2.19 – Parabole de tir : parabole de sûreté pour la norme de la vitesse de lancement $||\vec{v}_0||$ donnée. Le point P_1 peut être atteint de 2 façons. Le point P_2 peut être atteint d'une seule façon. Le point P_3 ne peut pas être atteint.

De plus, comme $h = \frac{v_0^2}{2g}$, la parabole de sureté est déterminée par la seule norme de la vitesse initale v_0.

Précisions concernant la vitesse de lancement

Considérons le problème suivant :

Sous quelle vitesse v_0 faut-il lancer le projectile pour atteindre un point P de coordonnées (r_x, r_z) fixées, sachant que l'angle de lancement α est fixé lui aussi ?

On a l'équation du mouvement

$$\begin{array}{rrcl} & r_z & = & \frac{-g\ r_x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha\ r_x \\ \Leftrightarrow & r_z - \tan\alpha\ r_x & = & \frac{-g\ r_x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \\ \Leftrightarrow & v_0^2 & = & \frac{-g\ r_x^2}{2(r_z - \tan\alpha\ r_x)\cos^2\alpha} \end{array}$$

Donc,

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{-g\ r_x^2}{2(r_z - \tan\alpha\ r_x)\cos^2\alpha}}}$$

Longueur d'un arc de courbe

Nous pouvons maintenant nous poser la question de la distance réelle parcourue par le projectile dans l'espace, c'est-à-dire la longueur de l'arc de parabole, qui sera certainement supérieure à la portée de tir

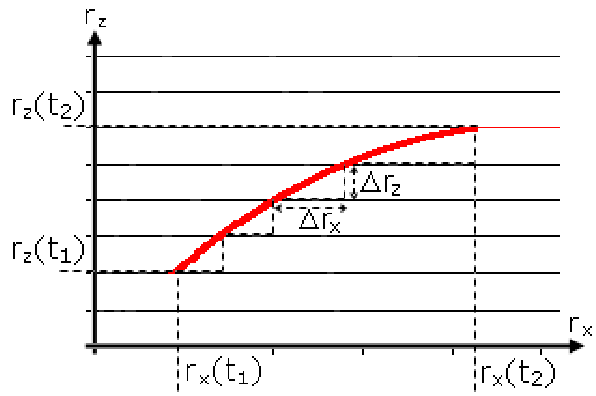


FIGURE 2.20 – Longueur $s(t_1, t_2)$ d'un arc de courbe entre les points $(r_x(t_1), r_z(t_1))$ et $(r_x(t_2), r_z(t_2))$. La longueur de l'arc est approximée en considérant la somme des petites longueurs $\Delta r = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_z^2}$.

r_x^{max}.

Si $\vec{r} = \vec{r}(t)$, donc si le vecteur position dépend du temps, alors la norme du vecteur $d\vec{r} = \lim_{t' \to t} \vec{r}(t) - \vec{r}(t')$ vaut

$$dr = ||d\vec{r}|| = \left\| \frac{dr(t)}{dt} dt \right\|$$

Soit $s(t_1, t_2)$ la distance parcourue par le mobile sur l'arc de courbe entre les instants t_1 et t_2. On a

$$s(t_1, t_2) = \int_{r_1}^{r_2} dr$$

Donc,

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} ||\vec{v}(t)|| dt$$

Or, comme $||\vec{v}(t)|| = \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)}$, on a

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{r_x}^2 + \dot{r_z}^2} dt$$

Finalement, étant donné que $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$,

$$\boxed{s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dr_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_z}{dt}\right)^2} dt}$$

Nous pouvons tenter de résoudre cette intégrale dans le cas de la parabole de tir, car nous avons que, avec $t_0 = 0$, $r_{0x} = 0$ et $r_{0z} = 0$,

$$\begin{cases} v_x(t) &= v_{0x} \\ v_z(t) &= -gt + v_{0z} \end{cases}$$

Donc, pour les curieux (ou les masochistes), l'intégrale se résout comme suit :

$$s(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_{0x}^2 + (-gt+v_{0z})^2}dt$$

Posons $-gt + v_{0z} = u$. Donc, comme $du = -dt$, on a, avec $u_1 = u(t_1)$ et $u_2 = u(t_2)$,

$$\begin{aligned} s(t_1,t_2) &= -\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{v_{0x}^2 + u^2}du \\ &= -v_{0x}\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1+\frac{u^2}{v_{0x}^2}}du \end{aligned}$$

Posons $\frac{u}{v_{0x}} = \tan\phi$. Donc, comme $du = \frac{v_{0x}}{\cos^2\phi}d\phi$, on a, avec $\phi_1 = \arctan\frac{u(t_1)}{v_{0x}}$ et $\phi_2 = \arctan\frac{u(t_2)}{v_{0x}}$,

$$\begin{aligned} s(t_1,t_2) &= -v_{0x}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1+\tan^2\phi}\frac{v_{0x}}{\cos^2\phi}d\phi \\ &= -v_{0x}^2\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2\phi}}\frac{1}{\cos^2\phi}d\phi \end{aligned}$$

Nous allons traiter la valeur absolue du cosinus en utilisant le signe $\pm$ que nous allons placer devant l'intégrale. Nous verrons plus loin qu'à partir du moment où l'on considère la solution physique de cette intégrale, il suffira de choisir la solution correspondant à une distance parcourue positive.

$$\begin{aligned} s(t_1,t_2) &= -v_{0x}^2\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{|\cos\phi|\cos^2\phi}d\phi \\ &= \mp v_{0x}^2\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{\cos^3\phi}d\phi \\ &= \mp v_{0x}^2\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos\phi}{\cos^4\phi}d\phi \\ &= \mp v_{0x}^2\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos\phi}{(1-\sin^2\phi)^2\phi}d\phi \end{aligned}$$

Posons $\sin\phi = \tau$. Donc, comme $d\tau = \cos\phi d\phi$, on a, avec $\tau_1 = \arcsin\phi_1$ et $\tau_2 = \arcsin\phi_2$,

$$\begin{aligned} s(t_1,t_2) &= \mp v_{0x}^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{(1-\tau^2)^2}d\tau \\ &= \mp v_{0x}^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{(1-\tau)^2(1+\tau)^2}d\tau \\ &= \mp v_{0x}^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{1}{2(1-\tau)^2} + \frac{1}{2(1+\tau)^2}\right)d\tau \\ &= \mp v_{0x}^2\left(\left[\frac{1}{2(1-\tau)}\right]_{\tau_1}^{\tau_2} + \left[-\frac{1}{2(1+\tau)}\right]_{\tau_1}^{\tau_2}\right) \\ &= \mp\frac{v_{0x}^2}{2}\left(\frac{1}{1-\tau_2} - \frac{1}{1-\tau_1} + \frac{1}{1+\tau_1} - \frac{1}{1+\tau_2}\right) \end{aligned}$$

La longueur de l'arc de parabole ne peut pas être négatif, puisqu'il s'agit d'une distance parcourue et non plus d'un déplacement dans une direction donnée. Nous retiendrons donc la solution qui nous donne une distance positive. (À vérifier)

2.3 Applications de la cinématique

Les forces de police s'intéressent en général uniquement à la vitesse et disposent de cinémomètres à effet Doppler, improprement appelés « radars ». Ceux-ci permettent de mesurer directement la vitesse instantanée. Lorsque s'est produit un accident, les traces de freinage, et les éventuelles traces d'impact sur le mobilier urbain ou les rails de sécurité, permettent de recomposer la trajectoire des véhicules. Notamment, la longueur des traces de freinage permet d'estimer la vitesse avant le début du freinage.

Le conducteur, quant à lui, dispose d'un tachymètre (indicateur de vitesse) sur son tableau de bord, qui lui permet de connaître également sa vitesse instantanée. Il se base en général sur la fréquence de rotation des roues. Par exemple, une pastille réfléchissante est collée sur l'arbre de transmission, et une cellule photo-détectrice permet de connaître le temps qui s'écoule entre deux passage de la pastille, donc la fréquence de rotation de la roue, donc la vitesse.

Les cyclistes mettent un aimant sur un rayon de la roue avant et un détecteur magnétique sur la fourche, ce qui leur permet, de la même manière, de mesurer la vitesse et le chemin parcouru. D'anciens systèmes étaient basés sur une petite roue tournant, entraînée par la roue du vélo.

Les marcheurs disposent de podomètres qui détectent les vibrations caractéristiques du pas. Le marcheur ayant rentré la longueur moyenne de son pas, l'appareil peut déterminer la distance parcourue ainsi que la vitesse (produit de la longueur du pas par la fréquence de pas).

La vidéo couplée à l'analyse informatisée des images permet également de déterminer la position et la vitesse des véhicules. Ceci est utilisé pour estimer le trafic et détecter les embouteillages, et pourrait faire son apparition dans les véhicules dans un avenir proche, afin de fournir une aide à la conduite (par exemple évaluation des distances de sécurité en fonction de la vitesse, détection de trajectoires anormales et de freinage d'urgence).

La navigation au long cours fut rendue possible grâce au développement des horloges. En effet, elle utilisait la position des astres, or celle-ci varie avec l'heure. Connaissant la date et l'heure, et muni d'un éphéméride (relevé des positions des étoiles selon la date et l'heure), les astres jouaient alors le rôle de repères côtiers.

La boussole permet de déterminer le cap que l'on suit, et pour un navire, la vitesse peut être estimée par la vitesse du vent et les courants. Ceci permet d'anticiper la trajectoire.

Pour se repérer, les aviateurs et marins naviguant aux instruments disposent des signaux émis par des satellites (système GPS) ou des balises radio au sol. Des satellites émettent des signaux synchronisés, et le décalage entre la réception des signaux permet de déterminer la position sur le globe terrestre. Ces systèmes sont également accessibles aux véhicules terrestres et aux piétons. Pour le décollage et l'atterrissage, les avions disposent de balises radio posées au sol leur donnant un repérage précis par rapport à la piste, permettant des manoeuvres sans visibilité (de nuit ou par mauvais temps).

Les systèmes de surveillance aérienne (tour de contrôle, aviation civile, armée) ou nautique, ainsi que certains avions et navires, sont munis de radars. Ces dispositifs émettent une impulsion radio dans toutes les directions (en général avec une antenne tournante). Une impulsion revient si elle rencontre un obstacle ; le temps qu'elle met à revenir permet de déterminer la distance de l'obstacle, et le décalage en fréquence permet de déterminer la vitesse de l'obstacle (effet Doppler).

Chapitre 3

Statique

La statique sera envisagée dans le cadre de la mécanique du solide indéformable. La mécanique du solide est la partie de la mécanique qui s'intéresse aux objets que l'on ne peut réduire en un point matériel. Cela permet notamment de décrire et modéliser les rotations de l'objet sur lui-même.

L'objet est lui-même composé de points matériels, que ce soit des points discrets, par exemple un assemblage de boules reliées par des baguettes de masse négligeable, chaque boule pouvant être modélisée par un point matériel, ou un ensemble continu de points. En général, on suppose le solide indéformable. La déformation du solide relève de la mécanique des milieux continus. On appellera solide indéformable un ensemble de points tels que pris deux à deux, leur distance ne varie pas au cours du temps.

La mécanique du solide est donc une branche de la mécanique traitant du comportement des mécanismes constitués de pièces rigides en général, et parfois déformables. L'objectif principal étant la détermination des performances d'un système en vue d'établir un dimensionnement adapté à l'usage envisagé, ou la validation de ces grandeurs.

FIGURE 3.1 – Illustration d'une des applications de la statique : l'effet du levier

La statique nous permettra d'identifier les conditions d'équilibre d'un corps solide massif, sans introduire de notion d'évolution dans le temps. L'équilibre traduit l'immobilité, c'est à dire l'absence de mouvement.

La statique, ou mécanique statique, est donc la branche de la physique qui étudie les systèmes mécaniques au repos (dans un repère galiléen).

3.1 Degrés de liberté

Les simplifications de la mécanique du point reposent sur le fait que le point est invariant par rotation, et que toutes les forces sont appliquées au point matériel. Alors les forces suffisent à modifier sa position. Pour les solides, constitués d'une infinité de points matériels, les déplacements possibles, appelés aussi degrés de liberté, sont de deux natures : translations (3 directions principales) et rotations (autour de ces trois directions). Alors que les translations ne peuvent être provoquées que par des forces, les rotations sont générées par des moments de ces forces, ou autres couples de force. Quand l'équilibre d'un point ne nécessite l'établissement que de 3 relations algébriques (équation vectorielle des forces à 3 dimensions), celui du solide demande alors la considération de 3 équations supplémentaires (équation vectorielle des moments). Le principe fondamental de la statique se compose alors :

1. du théorème de la résultante nulle (somme des forces nulle).
2. du théorème du moment nul (somme des moments nulle).

L'étude de l'équilibre d'un solide nécessite toujours la considération de ces 2 théorèmes, même si certains cas simples, traités en mécanique du point, semblent être résolus avec une seule des 2 parties. En règle générale, il n'est pas possible de traiter séparément les deux aspects (forces et moments). Il s'agit d'un problème à 6 dimensions (6 équations à 6 inconnues).

Lors de l'étude d'un corps dans un espace en trois dimensions, celui-ci peut effectuer divers déplacements. Si nous dotons cet espace d'un système d'axes orthonormés x, y et z, le corps pourrait se déplacer dans la direction x (avant-arrière), y (gauche-droite), z (haut-bas) ou une combinaison des trois directions. Le corps pourrait aussi tourner autour de lui-même selon des axes parallèles à x, y, z ou une combinaison des trois. Le corps possède donc 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations).

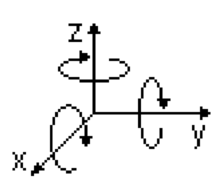


FIGURE 3.2 – Illustration des 6 degrés de liberté dans un espace à 3 dimensions

Dans de nombreux problèmes, les forces impliquées sont coplanaires. C'est à dire qu'il existe un plan Oxy dans lequel on peut observer ces forces. Dans ce cas les solides étudiés sont aussi considérés comme des prisonniers de ce plan. Leurs degrés de liberté sont alors au nombre de 3 :

– translation suivant la direction x.
– translation suivant la direction y.
– rotation autour de la direction z.

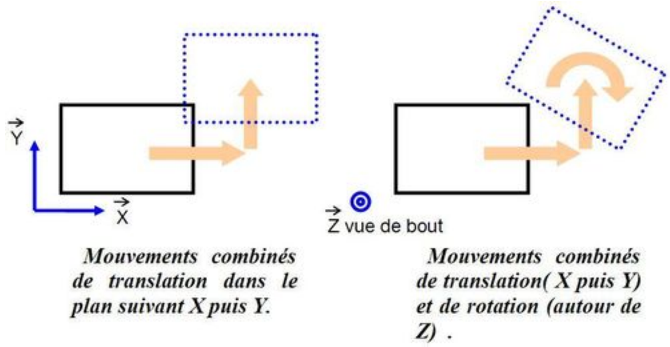


FIGURE 3.3 – Mouvement plan d'un corps rectangulaire : composition de translations et rotations

Lors de certains problèmes statiques, nous utiliserons deux notations spécifiques pour illustrer le type de liaison employé entre le corps ou la structure étudiée et son support : le rouleau et la charnière. (voir schéma 3.4)

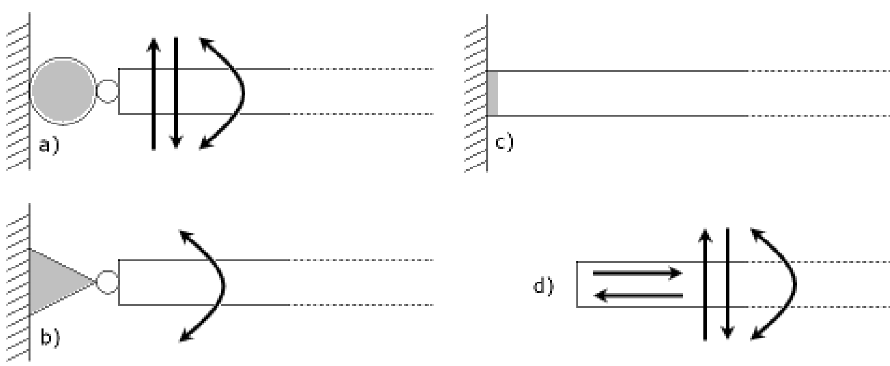


FIGURE 3.4 – a) Rouleau : 1 translation et 1 rotation (2 degrés de liberté). b) Charnière : 1 rotation (1 degré de liberté). c) Liaison fixe : aucun mouvement possible (0 degrés de liberté). d) pas de liaison : 2 translations et 1 rotation (3 degrés de liberté).

En accord avec les deux théorèmes, le corps sera considéré en équilibre statique si, globalement, il ne subit ni translation, ni rotation.

3.2 Moments de forces, bras de leviers

La force est un modèle (sous la forme d'un vecteur) qui sert à représenter les interactions indépendamment de leur cause (poids, traction d'un câble, force électrostatique ou magnétique, ...). La manière la plus simple de la représenter est de considérer la traction par un câble. En effet, le vecteur force est nécessairement dans la direction du câble et dans le sens de la traction, son point d'application est le point d'attache du câble à l'objet.

Si par exemple on considère un objet relié à trois câbles et non soumis à son poids (l'expérience se déroule dans la navette spatiale, en état d'apesanteur), la condition d'équilibre est très simple. Si $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ sont les forces qu'exercent les câbles sur l'objet, alors

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$$

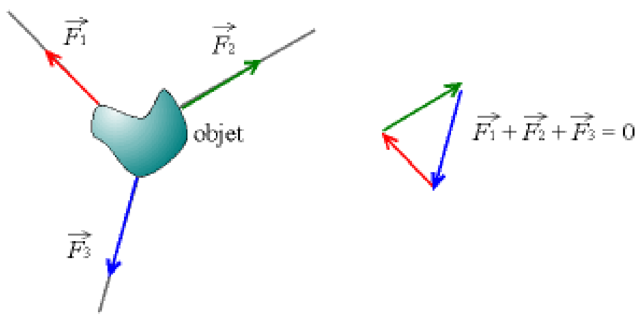


FIGURE 3.5 – Equilibre des forces qu'exercent les câbles sur l'objet.

Le poids est une action mécanique qui s'exerce en tout point de l'objet. On peut la résumer en une force unique notée $\vec{P}$ s'appliquant au centre d'inertie G de l'objet. En fait, on peut représenter l'action du poids par celle d'un câble attaché au « centre » de l'objet et tirant vers le bas.

Dans le modèle de la gravité de Newton, le poids est obtenu en multipliant la masse m de l'objet par l'accélération $\vec{g}$ de la gravité, c'est-à-dire l'accélération qu'ont tous les objets en chute libre si l'on néglige la résistance de l'air (dans le vide, tous les objets tombent avec la même accélération quelles que soient leur forme et leur masse). On a

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

Si l'on a un objet immobile suspendu à un fil, alors la somme vectorielle de la traction $\vec{T}$ du fil et du poids de l'objet est nulle

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \;\; \text{soit} \;\; \vec{T} = -\vec{P}$$

Si un objet est posé immobile sur un support, une table, il est soutenu par ce support. Le support exerce donc sur l'objet une force qui compense exactement le poids. Cette force est appelée réaction du support et est notée $\vec{R}$. Cette force résulte de la somme de toutes les forces exercées en chaque point de contact entre l'objet et le support, mais elle peut se résumer en une force unique dont le point d'application est exactement sous le barycentre (le « milieu » pondéré) de l'objet. Le point d'application de la réaction n'est donc pas nécessairement sur la surface de contact, par exemple dans le cas des tabourets ou des véhicules à roues.

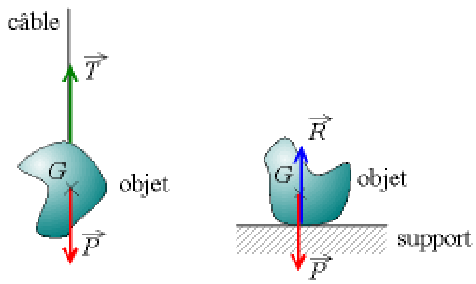


FIGURE 3.6 – Equilibre des forces : exemples de la masse suspendue à un câble (à gauche) et de la masse posée sur un support (à droite)

Dans ce cas simple, on a

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{P} = -\vec{R}$$

Principe de l'action et de la réaction

Lorsqu'un objet A exerce une force (appelée « action ») sur un objet B, l'objet B exerce une force opposée (appelée « réaction ») sur l'objet A. Ce principe est également appelé « troisième loi de Newton ».

Ainsi, dans le cas d'un objet suspendu à un câble, le câble exerce une traction sur l'objet, donc l'objet exerce aussi une traction sur le câble (c'est pour cela qu'il est tendu). Dans le cas d'un objet posé sur un support, le support exerce une force sur l'objet (la réaction du support), donc l'objet exerce lui aussi une force sur le support (la pression de l'objet).

On voit qu'un des éléments fondamentaux est de bien définir le système sur lequel on travaille. On considère les forces qu'exercent les éléments extérieurs au système sur le système lui-même. Ainsi, dans le cas de l'objet suspendu au câble, on peut choisir comme système :
- l'objet, soumis à son poids $\vec{P}$ et à la traction du câble $\vec{T_1}$
- ou bien le câble, soumis à la traction $\vec{T_2}$ de la part de l'objet et à la réaction $\vec{R}$ du support (le plafond auquel il est accroché).
- mais encore l'ensemble (câble et objet) soumis au poids $\vec{P}$ de l'objet et la réaction $\vec{R}$ du support. On considère alors, comme dans les cas précédents, que le poids du câble est nul ou négligeable devant les autres forces.

D'après le principe de l'action et de la réaction, on en déduit que

$$\vec{T_1} = -\vec{T_2}$$

Les conditions d'équilibre s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T_1} &= \vec{0} \qquad \text{pour l'objet} \\ \vec{T_2} + \vec{R} &= \vec{0} \qquad \text{pour le câble} \end{aligned}$$

Soit au final

$$\vec{R} = -\vec{P}$$

On voit donc que le câble transmet intégralement les efforts, pour le plafond, tout est comme si le solide était attaché sans intermédiaire.

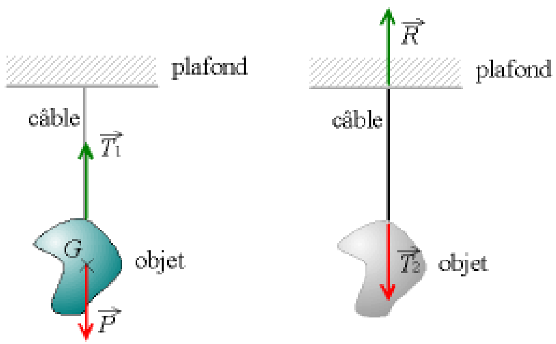


FIGURE 3.7 – Transmission des efforts du câble vers le plafond.

Réaction du support et frottement statique

Dans de nombreux problèmes simples, la réaction du support est perpendiculaire à la surface de celui-ci. Ceci n'est en fait vrai que pour un objet immobile sur une surface sans frottement. Ainsi, par exemple, supposons un objet posé sur un plan incliné parfaitement glissant (ou bien une boule pouvant rouler sans frottement) et retenu par un câble, alors la réaction du support est bien perpendiculaire à celui-ci.

Mais le cas est différent dans le cas d'un objet immobile sur un plan incliné, sans câble, retenu uniquement par frottement. La réaction $\vec{R}$ du support compense alors seul le poids. Dans ce cas-là, on peut décomposer la réaction en une composante $\vec{R}_n$ perpendiculaire au support, et une composante $\vec{R}_f$ parallèle au support. $\vec{R}_f$ est appelée force de frottement statique.

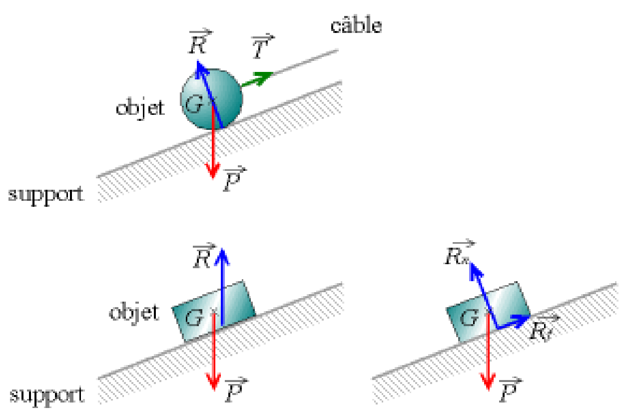


FIGURE 3.8 – Équilibre des forces : réaction du support sans frottement (en haut) et avec frottement statique (en bas).

Nous présentons ci-dessous un autre cas où la réaction n'est pas perpendiculaire au support.

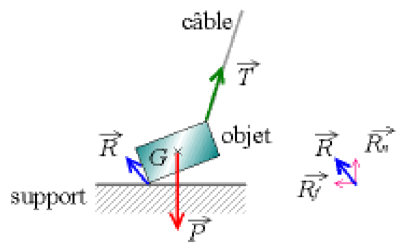


FIGURE 3.9 – Exemple de réaction du support non perpendiculaire à la surface. La réaction R se décompose en une composante normale R_n et une composante frottement statique R_f.

L'intensité de la force de frottement est déterminée par le loi de Coulomb.

3.2.1 Moment de force

Prenez une planche en équilibre au bord d'un muret. Pour la déséquilibrer on peut poser une charge sur la partie en porte-à-faux. La capacité de cette charge à faire basculer la planche n'est pas la même suivant qu'elle est posée près du muret ou au bout de la planche. De même, on peut au même endroit, placer une charge plus grosse et constater la différence de comportement.

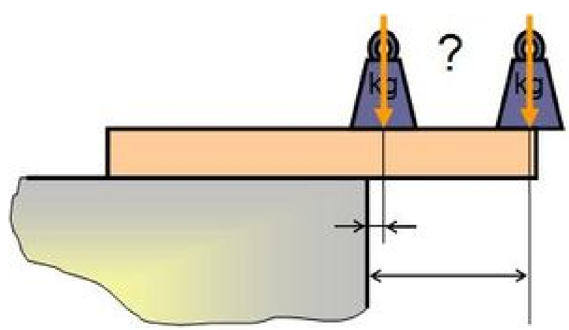


FIGURE 3.10 – Schéma d'introduction à la notion de moment de force.

Le pouvoir de basculement dépend donc de l'intensité de la force, mais aussi de la position relative du point d'application et du point de rotation réel ou virtuel considéré.

Ces distinctions sont représentables par le modèle de moment d'une force qui est l'aptitude d'une force à faire tourner un système mécanique autour d'un point donné, qu'on nommera aussi pivot.

Le moment d'une force $\vec{F}$ s'exerçant au point A par rapport au pivot P, est le vecteur noté

$$\vec{M}_{\vec{F}/P} = \vec{PA} \times \vec{F} = \vec{F} \times \vec{AP}$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel.

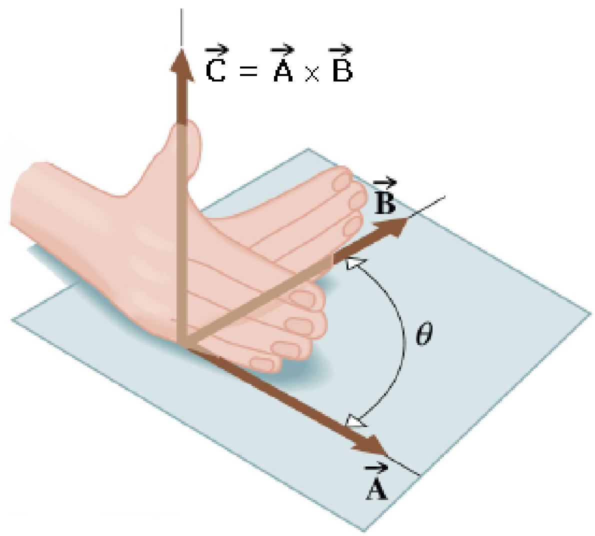


FIGURE 3.11 – Produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$ des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Ce vecteur est perpendiculaire au plan contenant ces deux vecteurs. De plus, sa norme vaut

$$||\vec{M}_{\vec{F}/P}|| = ||\vec{F}||\ ||\vec{AP}||\ \sin\alpha$$

où α est l'angle formé par les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{AP}$.

Si d est la distance orthogonale du pivot P à la droite de glissement de $\vec{F}$, alors sa norme vaut :

$$||\vec{M}_{\vec{F}/P}|| = ||\vec{F}||\ d$$

La longueur d est appelée « bras de levier ».

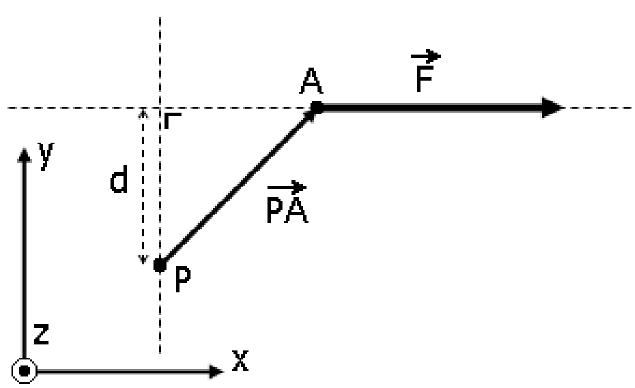


FIGURE 3.12 – Le bras de levier d est la distance qui sépare la droite de glissement de la force appliquée $\vec{F}$ au pivot P.

Les composantes et la norme d'un moment de force sont exprimées en Newton-mètres (Nm), dans le système international d'unités.

Cas du moment nul

Puisqu'il s'agit ensuite d'établir la somme nulle des moments, on peut naturellement s'intéresser aux cas de nullité individuelle des moments de force. De par les propriétés du produit vectoriel, on a un moment nul dans plusieurs cas.

- Si la force $\vec{F}$ est nulle.
- Si le vecteur $\vec{AP}$ est nul ($\vec{0}$). La force est donc appliquée en P.
- Si $\vec{F}$ et $\vec{AP}$ sont colinéaires. Alors la droite de glissement de $\vec{F}$ passe par P, ce qui inclut aussi le cas précédent.

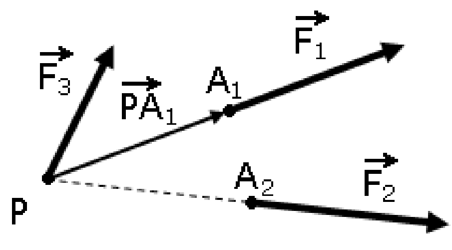


FIGURE 3.13 – 3 cas où le moment est nul. Dans les deux premiers cas ($\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$), les forces sont colinéaires avec respectivement les vecteurs $\vec{P}A_1$ et $\vec{P}A_2$. Dans le troisième cas ($\vec{F_3}$), le vecteur $\vec{AP}$ est nul.

3.2.2 Couple

Si on considère deux forces opposées $\vec{F}$ appliquée en A et $-\vec{F}$ appliquée en B, points distincts d'un même système, il est évident que leur somme est nulle. Qu'en est-il de la somme de leur moment en un point P de l'espace ?

$$\begin{aligned}
\vec{M}_{\vec{F}/P} + \vec{M}_{-\vec{F}/P} &= \vec{PA} \times \vec{F} + \vec{PB} \times (-\vec{F}) \\
&= \vec{PA} \wedge \vec{F} + \vec{BP} \times \vec{F} \\
&= (\vec{BP} + \vec{PA}) \times \vec{F} \\
&= \vec{BA} \times \vec{F}
\end{aligned}$$

On remarque que le résultat est indépendant du point de pivot P considéré. On a

$$\vec{M}_{\vec{F}/P} + \vec{M}_{-\vec{F}/P} = \vec{C}$$

Cette quantité $\vec{C}$ est appelée « couple ». Il n'est pas besoin de préciser le point de rotation. Les deux forces constituent alors un couple de forces.

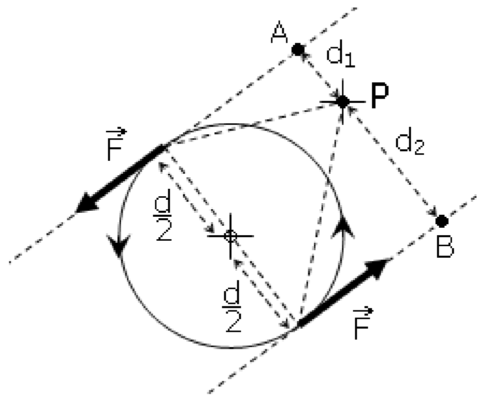


FIGURE 3.14 – Couple de forces : $||\vec{C}|| = ||\vec{F}||\, d_1 + ||\vec{F}||\, d_2 = ||\vec{F}||\, (d_1 + d_2) = ||\vec{F}||\, d$. Le couple de forces est indépendant du pivot P considéré.

Outre les autres cas évidents, le couple est nul lorsque les deux forces ont la même droite d'action. Le couple augmente avec l'intensité commune des forces, mais aussi avec l'éloignement des points. Il est optimal lorsque $\vec{AB}$ et $\vec{F}$ sont orthogonaux.

En réalité le couple n'existe pas intrinsèquement. Il est toujours associé à un ensemble de forces s'annulant vectoriellement mais dont les moments s'ajoutent sans s'annuler. C'est par exemple le résultat de l'action du vent sur une éolienne, ou l'action des forces électromagnétiques sur l'induit d'un moteur électrique.

On ne doit donc pas faire le raccourci « somme des moments = moment de la somme ». Cela n'est vrai que pour un ensemble de forces appliquées au même point. Cela montre enfin qu'une action mécanique n'est pas représentable par un seul vecteur force. La considération du point d'application est primordiale.

3.2.3 Levier et avantage mécanique

Un levier est une barre rigide pivotant autour d'un point fixe. Le pivot peut être situé à une extrémité, au milieu, ou bien à n'importe quel endroit du levier. Le levier permet de démultiplier la force, par exemple pour soulever un objet lourd avec une force réduite.

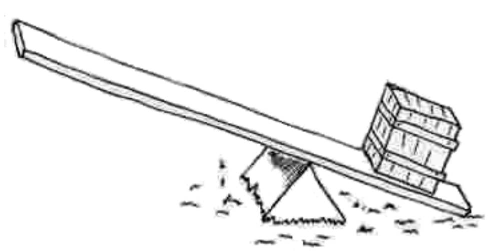


FIGURE 3.15 – Illustration du principe du levier.

Notons qu'il ne s'agit plus vraiment là de mécanique du point puisque l'on étudie la rotation d'un objet, le levier, que l'on ne peut réduire à un point (d'ailleurs, la rotation d'un point n'a pas de sens). C'est l'équilibre de l'objet placé au bout du levier qui nous intéresse, mais ceci nécessite de s'intéresser au levier en lui-même.

Supposons le cas où l'on veut lever un objet. Le levier est soumis à trois forces :
- l'action $\vec{F_1}$ de l'objet (qui est égale à son poids)
- l'action $\vec{F_2}$ de la personne sur le levier
- l'action $\vec{R}$ du pivot sur le levier.

À l'équilibre, la somme des trois forces s'annulent,

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{R} = \vec{0}$$

Mais cela ne suffit pas à étudier le problème. On ne sait pas quelle est la répartition des forces entre l'action du pivot et l'action de la personne. Introduisons pour cela la notion de moment par rapport au pivot.

Le moment d'une force $\vec{F}$ s'exerçant au point A par rapport au pivot P est le vecteur $\vec{M}_{\vec{F}/P}$ dont la norme vaut

$$||\vec{M}_{\vec{F}/P}|| = ||\vec{F}|| \cdot d$$

où d est la distance du pivot à la droite de glissement du vecteur force $\vec{F}$. Le moment est positif si la force tend à créer une rotation dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre). La longueur d est appelée bras de levier.

Plus simplement, on peut considérer le moment d'une force par rapport à un point comme son aptitude à faire tourner autour du point considéré le corps sur lequel elle s'exerce. Cette aptitude augmente avec l'intensité de la force (si on pousse plus fort), et avec la distance observée (si on pousse de plus loin).

On peut à l'aide de cette notion énoncer une loi de l'équilibre en rotation :

Un objet est en équilibre de rotation par rapport à un pivot si la somme des moments des forces par rapport à ce pivot est nulle.

On a donc maintenant une deuxième équation qui va permettre de déterminer $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$:

$$\vec{M}_{\vec{F_1}/P} + \vec{M}_{\vec{F_2}/P} + \vec{M}_{\vec{R}/P} = 0$$

On peut déjà dire que $\vec{M}_{\vec{R}/P} = \vec{0}$ car l'action $\vec{R}$ se fait sur le pivot P. On a donc

$$\vec{M}_{\vec{F_1}/P} + \vec{M}_{\vec{F_2}/P} = \vec{0}$$

Si d_1 est le bras de levier de $\vec{F_1}$ et d_2 le bras de levier de $\vec{F_2}$, alors on a

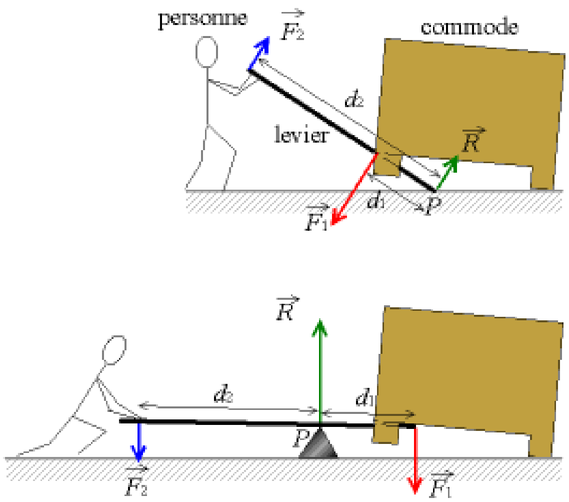


FIGURE 3.16 – Deux méthodes pour soulever une commode avec un levier.

$$||\vec{F}_1||\ d_1 = ||\vec{F}_2||\ d_2$$

donc si $d_2 > d_1$, alors $||\vec{F}_1|| > ||\vec{F}_2||$. On voit donc que si le bras de levier est plus long du côté de la personne que du côté de l'objet, la personne devra faire un effort réduit pour maintenir l'équilibre (c'est-à-dire concrètement pour soulever l'objet). La force exercée par le pivot sur le levier participe à soulever l'objet. Dans le cas contraire, l'objet sera plus difficile à soulever qu'à la main directement. L'image ci-dessous montre deux manières de soulever une commode en s'aidant d'un levier : en prenant appui sur le sol (figure du haut, le pivot est à l'extrémité du levier) ou bien sur un objet intermédiaire (figure du bas, le pivot est situé sur le levier).

Les balances à masse coulissante utilisent ce principe pour peser.

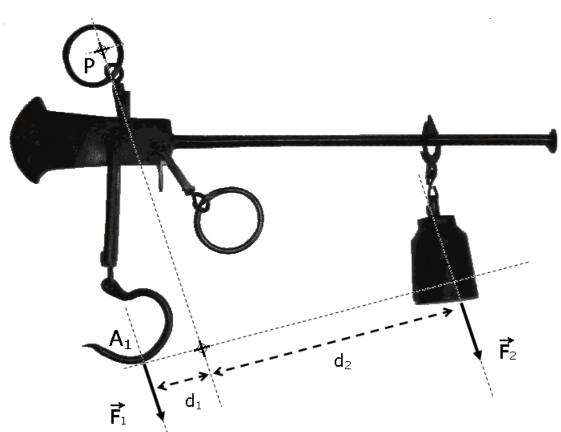


FIGURE 3.17 – balance « romaine » (à masse coulissante)

Dans cette balance, les deux bras du fléau n'ont pas la même longueur. Le bras du côté de la masse inconnue a une longueur constante alors que la longueur du bras qui supporte le contre-poids est variable. Dans cette balance, on n'obtient pas l'équilibre en égalisant les deux masses, mais en agissant sur la longueur du bras qui porte le contre-poids. L'équilibre se fait lorsqu'en déplaçant ce contre-poids le long de sa tige, le fléau atteint la position horizontale. Le bras le plus long porte des divisions avec indication des poids correspondants. Il suffit alors de lire le poids de l'objet.

La balance ordinaire se compose d'une barre métallique rigide appelée « fléau » traversée en son milieu perpendiculairement à sa longueur par un prisme d'acier appelés « couteau central ». Ce prisme repose par une de ses arêtes sur deux petits plans d'acier fixés à l'extrémité d'une colonne qui, par suite, soutient le fléau. Les deux extrémités du fléau servent à supporter : l'un, le corps à peser, l'autre les poids marqués destinés à faire équilibre au corps.

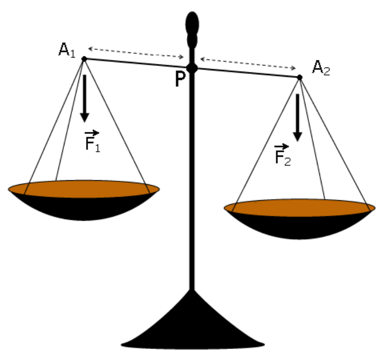


FIGURE 3.18 – balance « classique » (à fléau)

Notez bien qu'il faut que les moments soient tous calculés par rapport au même pivot. Par exemple, si l'on a deux leviers agissant l'un sur l'autre mais pivotant chacun sur un point différent, on ne peut pas écrire l'égalité des moments au point de contact.

Poulie

On peut faire changer cette force de direction à l'aide d'une poulie. La poulie est en soi un objet qui est soumis à des forces ; si elle est à l'équilibre (elle ne bouge pas, ne tourne pas), alors la somme des forces est nécessairement nulle, et la somme de leurs moments est elle aussi nulle.

Dans le cas d'une poulie de renvoi (la poulie est fixée à un objet fixe dans le référentiel, comme un mur ou un plafond), le câble passe dans la gorge de la poulie ; l'équilibre des moments implique que la force qui s'exerce sur chaque brin du câble est la même. La poulie change donc la direction de la force dans le câble (via la réaction du support de la poulie), mais pas son intensité.

Dans le cas d'une poulie renversée, mobile, le câble est fixé à un objet immobile dans le référentiel (par exemple plafond). L'action du support sur le câble s'ajoute à l'action de l'opérateur sur le câble, le poids de la poulie et de sa charge est donc pris en charge en partie par le support. C'est aussi le principe du cabestan. En fait la charge est équitablement répartie sur l'ensemble des fils soutenant la poulie.

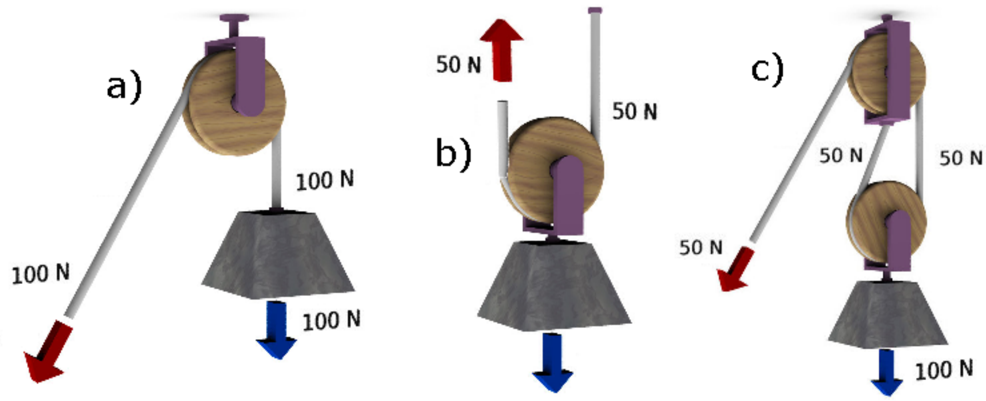


FIGURE 3.19 – a) Poulie simple fixe : la force change de sens. b) Poulie simple mobile : la force transmise est divisée par 2. c) Poulies composées : la force transmise est divisée par deux et change de sens.

Dans le cas d'une poulie à double gorge, on a deux câbles qui passent chacun par une gorge ayant un diamètre différent. On se retrouve dans la même configuration que le levier.

3.3 Equilibre statique

3.3.1 Résultante des forces

On appelle point matériel un objet idéal de dimensions nulles (assimilable à un point) mais doté d'une masse.

Un point matériel est immobile ou en mouvement de translation uniforme (dans un référentiel galiléen) si la somme des forces extérieures qui s'exercent sur lui est nulle (les forces s'opposent et s'annulent, voir l'exemple de la figure 3.5 de l'objet relié à 3 câbles) :

$$\boxed{\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}}$$

Ceci dérive de la première loi de Newton.

En général, nous travaillerons dans un espace à 2 dimensions et cette équation vectorielle se résumera à l'étude de ses composantes suivant le plan Oxy.

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i F_{iy} = 0$$

Par la suite, on représentera des objets volumiques, mais comme on ne s'intéresse ici qu'au mouvement du centre d'inertie G de cet objet, tout se passe comme si les forces s'appliquaient sur G, le point matériel est alors G doté de la masse de l'objet.

3.3.2 Moment résultant

Lorsque l'on considère la rotation d'un corps, on ne peut plus assimiler celui-ci à un point matériel. Cependant, nous pouvons toujours caluler le moment total des forces appliquées au corps par rapport à son centre de gravité par exemple.

Le centre de gravité ne constitue pas forcément le pivot idéal. En général, lors d'un exercice, si le choix nous est donné, nous choisirons toujours le pivot P tel qu'au moins une des forces appliquées est colinéaire au vecteur $\vec{AP}$, ce qui simplifiera les calculs.

Un corps est immobile vis-à-vis d'une rotation non uniforme si la somme des moments des forces extérieures qui s'exercent sur lui est nulle. Attention, il ne faut pas confondre le moment de la résultante $\vec{M}_R$ avec le moment résultant $\vec{M}_{tot}$ (qui est la somme des moments des forces). On a

$$\boxed{\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{PA}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}}$$

En général, nous travaillerons dans un espace à 2 dimensions et cette équation vectorielle se résumera à l'étude de sa composante suivant l'axe Oz.

$$\sum_i M_{iz} = \sum_i |PA_i| \; F_i \; \sin \alpha_i = 0$$

où les α_i sont les angles formés par les deux vecteurs $\vec{F}_i$ et $\vec{PA}_i$.

Moment de la résultante : théorème de Varignon

Le moment **en *P*** de la résultante $\vec{R}$ de plusieurs forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... **concourantes en *A*** est égal à la somme des moments **en *P*** de ces différentes forces :

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{R}/P} = \sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i/P}}$$

avec $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$.

En effet :

$$\vec{M}_{\vec{R}/P} = \vec{PA} \times \vec{R} = \vec{PA} \times \left(\sum_i \vec{F}_i \right) = \sum_i \vec{PA} \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_{\vec{F}_i/P}$$

Formule de transport du moment

Lorsqu'on connaît le moment d'une force en un point, il est possible de le recalculer en n'importe quel point de l'espace. Cela revient à poser une rallonge au levier $\vec{AP}$. On montre alors la relation suivante, avec un point Q quelconque :

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F}/Q} = \vec{M}_{\vec{F}/P} + \vec{QP} \times \vec{F}}$$

En effet,

$$\vec{M}_{\vec{F}/P} = \vec{QA} \times \vec{F} = (\vec{QP} + \vec{PA}) \times \vec{F} = \vec{QP} \times \vec{F} + \vec{M}_{\vec{F}/P}$$

On peut vérifier alors que

$$\vec{M}_{\vec{F}/P} = \vec{M}_{\vec{F}/A} + \vec{PA} \times \vec{F} = \vec{PA} \times \vec{F}$$

car le moment calculé au point d'application de la force est nul.

En réalité une action mécanique est modélisée par un vecteur (représentant la force) et son point d'application. Il est possible de représenter cette action mécanique par l'ensemble « vecteurs force » et « moment » en un point. En pratique, on effectue la somme des forces, et la somme des moments tous exprimés au même point P, d'où l'intérêt de la formule de transport des moments.

3.3.3 Centre de masse, stabilité

Le centre de masse (ou barycentre, de barus (poids) et centre) est initialement le centre des poids. C'est donc une notion physique et mécanique. Le premier à avoir étudié le centre de masse en tant que centre des poids (ce qu'on appelle aussi plus vulgairement de nos jours le centre de gravité) est le mathématicien et physicien Archimède. Il est un des premiers à comprendre et expliciter le principe des moments, le principe des leviers et le principe du centre de masse. Il écrit dans son traité Sur le centre de gravité de surface plane :

« Tout corps pesant a un centre de gravité bien défini en lequel tout le poids du corps peut être considéré comme concentré. »

C'est le premier à avoir cherché des centres de gravité de surface comme des demi-disques, des paraboles. Il procède par approximations successives et a pu prouver que la recherche d'un centre de gravité utilise des méthodes analogues à celle du calcul d'aire. Son travail est prolongé par celui de Paul Guldin (1635/1640) dans son traité Centrobaryca et celui de Leibniz.

La notion de centre d'inertie G pour un système non solide est une notion dégagée par Christiaan Huygens (1654), lors de l'établissement de sa théorie des chocs. C'est alors qu'il énonce le principe de mécanique :

« Le centre de masse d'un système matériel se meut comme si toute la masse du système y était transportée, les forces extérieures du système agissant toutes sur ce centre de masse »

On peut remarquer le glissement subtil entre centre de masse, centre des poids (= centre de gravité) comme le voyait Archimède et centre de masse, centre des masses (= centre d'inertie).

Le centre de masse des points A et B affectés des masses m_A et m_B (non nulles) est l'unique point G tel que

$$m_A\vec{GA} + m_B\vec{GB} = \vec{0}.$$

Les coordonnées de G sont alors

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \quad y_G = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B} \quad z_G = \frac{m_A z_A + m_B z_B}{m_A + m_B}$$

Le nombre de points peut passer à trois points quatre points et même n points
Si $\sum_{i=1}^{n} m_i$ est non nulle, le centre de masse du système $\{(A_i, m_i)\}_{i=1\dots n}$ est le point G tel que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{GA_i} = \vec{0}$$

Les coordonnées sont données par les formules, pour $j = 1, ..., n$, où n est le nombre de dimension de l'espace,

$$x_{j,G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_{j,A_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Le nombre de points peut même devenir infini, permettant de trouver le centre de masse d'une courbe ou d'une surface.

Si l'ensemble constitue un domaine D continu, à chaque point Q du domaine on affecte une densité $g(Q)$ où g est une fonction continue. Le centre de masse est alors le point G tel que

$$\int_D g(Q)\vec{PQ}dv = \vec{0} \text{ dans l'espace, ou } \int_D g(Q)\vec{PQ}dr = \vec{0} \text{ dans le plan.}$$

Si les points Q ont pour coordonnées (x, y, z), la fonction de densité s'écrit $g(x, y, z)$ et les coordonnées de G s'écrivent

$$x_G = \frac{\int\int\int g(x,y,z)\ x\ dxdydz}{\int\int\int g(x,y,z)dxdydz}$$

Si l'on se ramène à une dimension, ou bien si l'on considère chaque coordonnée séparément, on retrouve la formule de la moyenne pondérée :

$$x_G = \frac{\int g(x)\ x\ dx}{\int g(x)\ dx}$$

Exemple

Le cas élémentaire de l'équilibre de 2 forces permet de montrer comment un problème de statique ne dissocie pas forces et moments. Non seulement l'étude permet la détermination de l'ensemble des forces, mais aussi les conditions géométriques de l'équilibre. Pour cette étude de cas, comme pour les suivantes, le principe fondamental de la statique nous donne les relations suivantes :

- aucun mouvement de translation possible : somme des forces extérieures nulle.
- aucun mouvement de rotation possible : somme des moments des forces extérieures nulle (les moments sont calculés en un même point qui peut être choisi arbitrairement).

Soit l'étude d'un pendule : la figure 1 ci-dessous donne une position quelconque. L'objectif est la détermination des conditions d'équilibre. le bilan des actions extérieures nous donne :

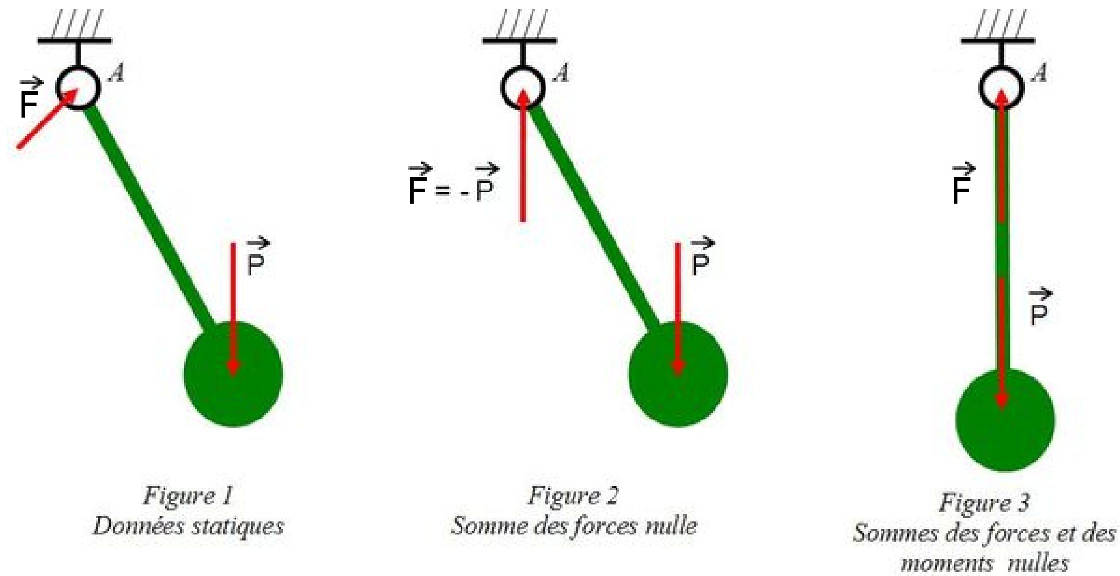


FIGURE 3.20 – Cas du pendule : recherche de la position d'équilibre.

- le poids appliqué au centre de gravité de valeur connue.
- le pivot (ou articulation) parfait en A. la droite d'action passe par l'axe, mais est de direction inconnue.

L'équation d'équilibre relative aux forces donne donc : $\vec{A} + \vec{P} = \vec{0}$ Ce qui définit l'action dans le pivot de façon univoque, les deux forces formant alors un couple. La position proposée sur la figure 2 n'est donc pas une position d'équilibre.

L'équation des moments, par exemple calculée au point A, nous donne $M_{\vec{F}/A} + M_{\vec{P}/A} = 0$ soit $M_{\vec{P}/A} = 0$

Ce qui revient à dire que A appartient à la droite de glissement du poids. Nous aurions abouti à la même conclusion, peut être plus difficilement, en calculant les moments en n'importe quel point. En règle générale, le point de calcul des moments doit être choisi sur un critère de simplicité de calcul. Ici A ou G (centre de gravité) assurent l'annulation d'un des moments de force.

De ce fait les seules positions d'équilibre sont celles ou le pendule est vertical, en dessous (position stable) ou au dessus de l'axe (position instable).

En résumé, pour qu'un solide soumis à deux forces soit en équilibre,
- les deux forces sont opposées (Résultante nulle)
- une même droite d'action pour les deux forces (Moment total nul)

3.4 Applications de la statique

En dehors des engrenages, leviers et des poulies dont l'humanité fait une utilisation quotidienne, il existe d'autres applications relativement modernes de la statique.

Par exemple, une dynamo actionnée par une éolienne. Les bobinages induisent un couple dont l'intensité est en rapport avec le courant électrique généré.

Le frottement a une influence sur le comportement statique des liaisons mécaniques. Certains modèles comme les lois de Coulomb décrivent ce comportement. La considération du frottement est parfois obligatoire pour la résolution d'un problème, comme par exemple l'équilibre d'une échelle, ou le dimensionnement d'un embrayage.

Finalement, l'étude de la résistance des structures et des matériaux découle bien évidement de la statique. Par exemple lors de la conception d'un toit d'un Châlet de montagne, capable de résister au vent et au poids de la neige, qui peuvent être représentées par des forces constantes (la force maximum tolérable par la structure).

Chapitre 4

Dynamique du point

La dynamique est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces qui leurs sont soumises. Elle combine la statique qui étudie l'équilibre des corps au repos, et à la cinématique qui étudie le mouvement.

La dynamique nous permettra donc d'identifier le déplacement dans le temps d'un corps massif, connaissant les forces auxquelles il est soumis, ainsi que sa vitesse initiale.

C'est Guillaume d'Ockham (1280-1349) qui a introduit en 1323 la différence entre ce qu'on appelle le mouvement dynamique (que nous engendrons) et le mouvement cinétique (engendré par des interactions, dont des collisions).

Remarquons que la dynamique est aussi une grandeur utilisée en électronique et en traitement du signal, qui traduit le rapport entre le niveau maximum et le niveau minimum d'un signal, mais celà ne nous concerne pas.

4.1 Lois de Newton

Sir Isaac Newton est né le 4 janvier 1643, au manoir de Woolsthorpe près de Grantham, en Grande-Bretagne. Il est mort le 31 mars 1727, à Kensington. C'était un philosophe, mathématicien, physicien et astronome anglais. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour sa théorie de la gravitation.

Son ouvrage majeur, Principes mathématiques de la philosophie naturelle, fut publié en 1687 (traduit en français par la marquise du Châtelet en 1756). Les méthodes de calcul qu'il y utilise en font un précurseur du calcul vectoriel.

Bien que cet aspect de sa vie soit moins connu, Newton se passionna également pour l'alchimie et la théologie. Pour Newton, le but, inavoué de nos jours, de la mécanique rationnelle était, par ailleurs, de prévoir une partie de l'avenir : le mouvement des astres. Etude que Newton pouvait sans doute appliquer à l'astrologie dont de nombreux principes sont utilisés en alchimie.

« *L'espace est de durée éternelle et de nature immuable, et ce parce qu'il est l'effet émanant d'un être éternel et immuable. Si jamais l'espace n'avait pas existé, Dieu, à ce moment-là, n'aurait été présent nulle part... Si nous disons avec Descartes que l'étendue est le corps, ne frayons-nous pas manifestement la voie à l'athéisme ? Tant parce qu'alors l'étendue n'est pas une créature mais est de toute éternité, que parce que nous en avons une idée absolue sans rapport à Dieu, et qu'ainsi nous pouvons concevoir que l'étendue existe, tout en imaginant que Dieu n'existe pas ?* » (De Gravitatione).

Il est aussi réputé avoir passé une quinzaine d'années à calculer, à partir des écrits bibliques, la date de la fin du monde, laquelle est désormais dépassée.

En mécanique, la plupart de ses principes, déjà mis à mal par le développement de la thermodynamique au XIX^e siècle, ont été balayés par la relativité d'Einstein et la dualité onde-corpuscule. Cependant le génie de sa mécanique relationnelle était de simplifier beaucoup, ce qui contribua au développement des recherches dans le domaine de la mécanique simple, où la masse s'identifie à la matière et où l'on suppose une continuité parfaite.

4.1.1 La masse redéfinie

La masse est une propriété physique d'un objet qui mesure la quantité de matière (et d'énergie) contenus dans cet objet. Contrairement au poids d'un objet, la masse d'un objet reste constante quel que soit l'altitude d'un objet sur terre, et en général quelle que soit sa position dans l'univers.

L'unité de base de la masse est le kilogramme (kg). On utilise également la tonne égale à 1000 kg et l'unité de masse atomique égale à $\frac{1}{12}^{eme}$ de la masse d'un atome de carbone 12.

Dans les modèles physiques, la masse d'un objet intervient dans deux phénomènes distincs et a priori indépendants, régissant le mouvement des objets :
- la masse inertielle qui caractérise la quantité de mouvement d'un objet en déplacement (la quantité de mouvement globale de l'univers est une quantité qui se conserve).
- la masse grave (ou pesante) qui mesure l'influence d'un corps sur le champ gravitationnel.

S'il n'y a aucune raison théorique connue pour que ces deux quantités soit dépendantes l'une de l'autre, tous les résultats expérimentaux indiquent qu'elles sont directement proportionnelles. Cette équivalence implique le principe de la chute des corps exposé par Galilée puis Evangelista Torricelli : la vitesse d'un corps en chute libre ne dépend pas de sa masse. Cette égalité entre masse inertielle et masse grave a guidé Albert Einstein dans son intuition que la gravité est en fait une déformation de l'espace, et qui lui permi de formuler les lois de la relativité générale.

À notre échelle cette équivalence semble évidente et elle est démontrée expérimentalement à 10^{-12} près. Pourtant certaines théories scientifiques comme la théorie des cordes prédisent qu'elle pourrait cesser d'être vérifiée à des échelles beaucoup plus fines.

À l'échelle des atomes, de la matière peut se transformer en onde électromagnétique, et une onde électromagnétique peut se transformer en matière. Plus exactement, des particules ayant une masse non nulle (neutrons, protons), peuvent se transformer à la suite d'une collision en particules élémentaires de masse nulle (photons, neutrinos...). C'est le principe des réactions nucléaires, par exemple utilisées pour produire de l'électricité. Dans les accélérateurs de particules, on observe fréquemment ce genre de transformation. À l'inverse, un photon ?, de masse nulle, peut se décomposer après collision sur un atome en une paire électron-positron, ayant une masse.

Lors de ces transformations, la loi de la conservation de l'énergie est respectée, la masse peut donc s'exprimer sous la forme d'une énergie :

$$E = m\, c^2$$

avec E l'énergie « de masse », m la masse et c la vitesse de la lumière dans le vide.

En dynamique du point, quel que soit le phénomène considérée, à l'instar de Newton, nous définirons la masse m d'un point P comme étant le coefficient de proportionnalité liant la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées en P et son l'accélération $\vec{a}$. On a

$$\vec{F} = m\, \vec{a}$$

4.1.2 Masse volumique, densité, force, poids

Masse volumique

Pour toute substance homogène, le rapport de la masse m correspondant à un volume V de cette substance est indépendante de la quantité choisie : c'est une caractéristique du matériau appelée masse volumique ρ. On a

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Mais le volume d'une masse donnée dépend de la température et, particulièrement pour les gaz, de la pression. La masse volumique dépend donc des conditions de température et de pression.

Pour des conditions de température et de pression données, le coefficient de proportionnalité $\frac{m}{V}$ est une caractéristique du matériau.

L'unité de mesure de la masse volumique est dérivée des unités de mesure de masse et de volume. On peut ainsi exprimer la masse volumique en g/cm^3, kg/dm^3, t/m^3.

Remarques :

1. Dans ces unités, la valeur numérique ne change pas car $1\ g/cm^3 = 1\ kg/dm^3 = 1\ t/m^3$.
2. La tonne n'est pas une unité de masse du système international. Il convient d'utiliser le kilogramme et ses multiples ou sous-multiples.

3. La masse volumique de l'eau est proche de 1 kg/dm^3. Ce n'est pas un hasard, mais cela résulte des premières tentatives de définition du kilogramme comme valant la masse d'un litre d'eau (1 décimètre cube). (Sa valeur actuelle est, à 4 ^oC, de 999,95 kg/m^3).

Lors d'applications, nous utiliserons le plus fréquement les valeurs de 10^3 kg/m^3 pour la masse volumique de l'eau et 1,2 g/l pour la masse volumique de l'air à 20 ^oC et pression atmosphérique normale. (voir tableau 4.1)

Densité

La densité est un nombre sans dimension, égal au rapport d'une masse volumique d'une substance homogène à la masse volumique d'eau pure à la température de 3,98 ^oC. Pour les gaz, la densité est calculée en rapport avec la masse volumique de l'air.

Par définition, la densité de l'eau pure à 3,98 ^oC est égale à 1. La valeur de la densité permet de déterminer la flottabilité d'un matériau dans de l'eau pure. Si cette valeur est inférieure à 1 (celle de l'eau), un bloc de matériau flottera (puisqu'à volume égal, il subira immergé dans l'eau une poussée supérieure à son propre poids).

La définition de la densité [1] permet sa mesure en laboratoire. Elle peut aussi se calculer en divisant la masse volumique de la substance par 1 000 kg/m^3, masse volumique de l'eau pure à 3,98 ^oC.

Les densités les plus importantes connues sont peut-être atteintes dans les étoiles à neutrons. La singularité gravitationnelle au centre d'un trou noir, conformément à la relativité générale, n'a pas de volume et sa densité peut ainsi être vue comme infinie ou inexistante.

Les substances les plus denses sur Terre sont l'osmium et l'iridium, dont la densité dépasse 22,6.

Il est assez facile de mesurer la densité d'un corps solide insoluble et imperméable.

Densité supérieure à celle de l'eau : le plomb
- Prendre une balance électronique à plateau et mettre un récipient contenant de l'eau.
- Appuyer sur le bouton tare et la balance affiche zéro.
- Attacher l'objet à un fil fin (dans l'expérience photographiée : 6 plomb de pêche de 15 g).
- Mettre l'objet sur la balance qui affiche 90 grammes que l'objet soit sur le plateau ou qu'il soit au fond du récipient contenant de l'eau.
- Tenir l'objet par le fil de façon qu'il soit immergé sans toucher les parois du récipient : la balance indique 8 grammes dus à la célèbre poussée d'Archimède.

1. Attention : en anglais le mot mass-density est souvent réduit à density pour signifier masse volumique. La densité comme définie dans le système métrique se traduit, en anglais, dans le système de mesures anglo-saxon, en « Specific Gravity » (trad. : masse spécifique).

Roches, minéraux corps usuels	masse volumique kg/m³
ardoise	2700 - 2800
amiante	2500
argile	1700
béton	2000
calcaire	2600 - 2700
craie	1250
granite	2600 - 2700
Grès	2600
kaolin	2260
marbre	2650 - 2750
quartz	2650
pierre ponce	910
porcelaine	2500
terre végétale	1250
verre à vitres	2530

Bois	masse vol kg/m³
acajou	700
buis	910 - 1320
cèdre	490
chêne	610 - 980
chêne (cœur)	1170
ébène	1150
frêne	840
hêtre	800
liège	240
peuplier	390
pin	740
platane	650
sapin	450
teck	860

Gaz à 0°C	masse vol kg/m³	formule
acétylène	1,170	-
air	1	-
air à 20°C	1,204	-
ammoniac	0,77	-
argon	1,7832	Ar
azote	1,250 51	N_2
butane (iso-)	2,670	-
butane (normal)	2,700	-
dioxyde de carbone	1,976 9	CO_2
eau (vapeur) à 100°C	0,5977	H_2O
hélium	0,178 5	He
dihydrogène	0,0899	H_2
krypton	3,74	-
néon	0,90	-
oxyde de carbone	1,250	CO
ozone	2,14	O_3
propane	2,01	-
radon	9,73	Rn

Métaux et alliages	masse volumique kg/m³
acier	7850
acier rapide HSS	8400 - 9000
Fonte	6800 - 7400
aluminium	2700
argent	10500
bronze	8400 - 9200
carbone (diamant)	3508
carbone (graphite)	2250
constantan	8910
cuivre	8920
Duralumin	2900
fer	7860
iridium	22640
laiton	7300 - 8400
lithium	530
magnésium	1750
mercure	13600
molybdène	10200
nickel	8900
or	19300
osmium	22610
palladium	12000
platine	21450
plomb	11350
potassium	850
tantale	16600
titane	4500
tungstène	19300
uranium	18700
vanadium	6100
zinc	7150

Liquides	masse vol kg/m³
acétone	790
acide acétique	1049
azote à -195°C	810
brome à 0°C	3087
eau	1000
eau de mer	1030
essence	750
éthanol	789
éther	710
gasoil	850
glycérine	1260
hélium à -269°C	150
huile d'olive	920
hydrogène à -252°C	70
lait	1030
mercure	13545,88
oxygène à -184°C	1140

Matières plastiques	masse vol kg/m³
Polypropyléne	850 - 920
Polypropyléne basse densité	890 - 930
Polypropyléne haute densité	940 - 980
ABS	1040 - 1060
Polystyrène	1040 - 1060
Nylon 6,6	1120 - 1160
Polyacrylate de méthyle	1160 - 1200
PVC + plastifiant	1190 - 1350
Polyéthylène/térépht alate	1380 - 1410
PVC	1380 - 1410
Bakélite	1350 - 1400

FIGURE 4.1 – Tables des masses volumiques de diverses substances. Sauf indications contraires, les masses volumiques sont données pour des corps à la température de 20 ^oC, sous la pression atmosphérique normale.

On en déduit que le plomb a une densité de $90/8 = 11{,}25$. La température de l'eau étant de 18 ^oC.

Densité inférieure à celle de l'eau : le liège
- Prendre un bouchon de grand volume, genre bouchon de pot de moutarde et donc une coupelle contenant de l'eau de diamètre plus grand que le diamètre du bouchon.
- Prendre une balance électronique à plateau et mettre la coupelle contenant de l'eau.
- Appuyer sur le bouton tare et la balance affiche zéro.
- Mettre une épingle sur l'axe du bouchon.
- Mettre le bouchon sur la balance qui affiche 12 grammes qu'il soit sur le plateau ou qu'il soit flottant sur l'eau du récipient : l'eau transmet le poids du bouchon à la balance, via la célèbre poussée d'archimède.
- Tenir par l'intermédiaire de l'aiguille le bouchon de façon qu'il soit entièrement immergé sans toucher les parois du récipient : la balance indique 52 grammes dus à la célèbre poussée d'Archimède.

On en déduit que le liège a une densité de $12/52 = 0{,}23$; la température de l'eau étant de 18 ^oC.

Parler de « densité relative » constitue a priori un pléonasme. Cependant, il peut être utile de faire des comparaisons dans des conditions hors normes. On peut par exemple avoir besoin de comparer, à la température ambiante, une pièce réalisée en bronze (densité 8,1) à la même pièce réalisée dans un alliage d'aluminium (densité 2,7). On pourra dire alors que le bronze est (relativement) trois fois plus dense que l'aluminium, ou que la densité (relative) du bronze par rapport à l'aluminium est de 3. Ce n'est pas le caractère relatif qui change, mais la référence.

Pourquoi choisir l'eau à 3,98 ^oC ? Il se trouve que lorsque la température de l'eau baisse, son volume diminue, jusqu'à 3,98 ^oC, et augmente si l'on continue de refroidir jusqu'à la congélation. Dans le domaine des mesures, le fait de prendre comme référence une propriété physique qui passe par un extrémum est très intéressant : au voisinage de 3,98 ^oC, la masse volumique de l'eau reste sensiblement constante, on n'a donc pas besoin de déterminer la température avec une grande précision, ce qui ne serait pas le cas aux autres températures. La masse volumique et la densité de l'eau sont maximales à 3,98 ^oC à la pression atmosphérique normale.

Cette particularité permet à l'eau tiède, à l'eau très froide et à la glace de flotter au-dessus de l'eau à 3,98 ^oC. Si l'eau se comportait comme la plupart des autres corps, la glace tomberait au fond des lacs, des rivières et des océans, où la vie serait alors pratiquement impossible, du moins sous la forme que nous connaissons.

Parmi les métaux moins denses à l'état solide qu'à l'état liquide, il existe l'argent et le bismuth. Cela pose des problèmes importants lors du moulage, à cause du gonflement qui accompagne la solidification.

Force

Dans Star Wars, la Force est une énergie qui baigne l'Univers et relie les êtres entre eux par un lien invisible.

Cependant, en physique, la force est une action mécanique capable de créer une accélération, c'est-à-dire une modification de la vitesse d'un objet ou d'une partie d'un objet, ce qui induit un déplacement ou une déformation de l'objet. Elle est généralement représentée par un vecteur ($\vec{F}$, $\vec{G}$, ...) pour donner son sens et sa direction (au sens mathématique du terme), et elle est donnée en Newton (N). Enfin, une force peut avoir une direction et un sens identique mais une intensité différente.

Le mot force peut donc désigner un pouvoir mécanique sur les choses, et aussi, métaphoriquement, un pouvoir de la volonté ou encore une vertu morale « cardinale » équivalent au courage

Poids

Le poids $\vec{P}$ d'un corps nu ou force de pesanteur est la force exercée sur un corps (de masse m) immobile dans le référentiel terrestre (c'est-à-dire, lié à l'objet solide Terre en rotation), par l'attraction universelle des autres masses et les forces inertielles (dûes au fait que le référentiel terrestre n'est pas un référentiel galiléen). Quel que soit le corps, le rapport du poids $P = ||\vec{P}||$ à sa masse m est identique et noté g tel que $P = mg$.

De ce fait, tous les corps tombent, dans le vide, selon la même accélération $a = g$ (loi de Galilée (1564 - 1642)). (voir chute libre)

La masse m s'exprimant en kilogramme (kg), le poids est une force et possède donc comme unité le newton (symbole N), et l'accélération g sera indifféremment exprimée en N/kg ou en m/s^2.

La non-distinction entre masse et poids dure jusqu'au XIXe siècle, et perdure dans le langage courant. Par exemple, « la masse corporelle d'une personne » est usuellement appelée son « poids ». Il en résulte une difficulté pédagogique, au moment où cette distinction est enseignée. L'adoption du Système International (S.I.) a permis grâce à la suppression de l'unité kilogramme-poids de résoudre partiellement cette difficulté.

L'accélération de pesanteur g est l'objet d'étude de la gravimétrie. Elle varie en tout point de la Terre, essentiellement diminuant du pôle (9.83 m/s^2) à l'équateur (9.78 m/s^2). En Belgique, on prend conventionnellement la valeur de g telle que $g = 9.81$ m/s^2. Comment la retrouver ?

Sachant que le rayon R de la Terre est égal à 6380 km et sa masse M_T est égale à 5,98 10^{24} kg, on peut déterminer la valeur de la constante g qui s'exerce sur un objet quelconque de masse m. On a

$$m\frac{G\ M_T}{R^2} \simeq 9,81\ m$$

On rappelle que G est la *constante universelle de gravitation*.

La notion de pesanteur se généralise à d'autres corps célestes, en particulier la Lune où la gravité est environ six fois moindre que sur Terre.

4.1.3 Les 3 lois de Newton : inertie, force et accélération, action et réaction

Les lois du mouvement de Newton sont en fait des principes à la base de la grande théorie de Newton concernant le mouvement des corps, théorie que l'on nomme aujourd'hui Mécanique newtonienne ou encore Mécanique classique. À ces lois générales du mouvement fondées en particulier sur le principe de relativité des mouvements, Newton a ajouté la loi de la gravitation universelle permettant d'interpréter aussi bien la chute des corps que le mouvement de la Lune autour de la Terre.

Première loi de Newton ou principe d'inertie

L'énoncé original de la première loi du mouvement est le suivant :

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.

Autrement dit, s'il n'y a pas de force qui s'exerce sur un corps (corps isolé), ou si la somme des forces s'exerçant sur lui est égale au vecteur nul (corps pseudo-isolé), la direction et la norme de sa vitesse ne changent pas ou, ce qui revient au même, son accélération est nulle. Cette première loi infirme les lois de la physique d'Aristote, d'après lesquelles on pensait que pour maintenir la vitesse d'un mobile constante, il était nécessaire de lui appliquer une force.

Bien que Newton ne l'ait pas précisé dans son ouvrage, cette loi n'est valable que dans un référentiel galiléen. La première loi de Newton peut donc être reformulée dans un langage plus moderne :

Dans un référentiel galiléen, le vecteur vitesse du centre d'inertie d'un système est constant si et seulement si la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur le système est un vecteur nul.

La définition d'un référentiel galiléen apparaît fondamentale et est souvent formulée ainsi :

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée

Ainsi la première loi de Newton ne s'applique que dans un référentiel galiléen et un référentiel galiléen est un référentiel où la première loi de Newton s'applique, ce qui semble être une définition circulaire. Pour éviter ce problème, on peut réécrire le principe d'inertie comme suit :

Il existe une famille de référentiels, appelés galiléens ou inertiels, tels que, par rapport à l'un de ces référentiels, tout point matériel isolé (qui n'est soumis à aucune action extérieure) est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

La détermination d'un bon référentiel galiléen est en réalité expérimentale et comme souvent en Physique, seule la cohérence entre la théorie (ici la première loi de Newton) et la mesure (mouvement rectiligne uniforme) valide le choix a posteriori.

Deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique (parfois appelé Relation fondamentale de la dynamique) s'énonce ainsi :

Soit un corps de masse m constante, l'accélération subie par un corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m.

Ceci est souvent récapitulé dans l'équation :

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum \vec{F}_i$$

ou

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

où $\vec{F}_i$ désigne les forces exercées sur l'objet, m est sa masse, et $\vec{a}$ correspond à l'accélération de son centre d'inertie G.

Une forme plus générale, valable également si la masse change au cours du temps est

La force est égale aux changements de quantité de mouvement par unité de temps.

Ceci est souvent récapitulé dans l'équation :

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

où $\vec{F}_i$ désigne les forces exercées sur l'objet, $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement, égale au produit de sa masse m et de sa vitesse $\vec{v}$.

Ce théorème est appelé **théorème de la quantité de mouvement**. Pour un solide de masse fixe en mécanique newtonienne, il est équivalent à la seconde loi.

Ainsi, la force nécessaire pour accélérer un objet est le produit de sa masse et de son accélération : plus la masse d'un objet est grande, plus grande est la force requise pour l'accélérer à une vitesse déterminée (en un laps de temps fixé). Quelle que soit la masse d'un objet, toute force nette non-nulle qui lui est appliquée produit une accélération.

Pour un corps soumis à une résultante des forces nulle on retrouve bien la première loi de Newton, c'est à dire un mouvement rectiligne uniforme. En première analyse, on peut se demander quelle est l'utilité de la première loi puisqu'elle semble être une conséquence de la deuxième. En réalité, dans l'énoncé de Newton, il n'en est rien car la première loi n'est pas présentée comme un cas particulier de la deuxième mais comme une condition suffisante à l'application de cette dernière. En effet, énoncer la première loi, c'est affirmer l'existence des référentiels galiléens. Cela constitue un postulat extrêmement fort qui permet, dans les exposés modernes de la mécanique classique, de définir les repères galiléens qui sont les seuls repères dans lesquels la seconde loi est valide. En l'absence de la première loi, la seconde loi est inapplicable puisqu'on ne peut pas définir son domaine de validité. Par conséquent, l'ordre logique dans lequel les lois sont énoncées n'est pas le fruit du hasard mais bien celui d'une construction intellectuelle cohérente.

Notons enfin qu'il est possible de reformuler de manière plus large la deuxième loi de Newton dans un référentiel non galiléen en ajoutant des termes dans l'équation qui sont homogènes à des forces, et qu'on appelle souvent « forces fictives ». Ces termes ne sont pas des forces au sens usuel mais des termes correctifs d'origine géométrique et cinématique. Nous en étudierons un exemple lorsque nous survolerons la force centifuge.

Troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques

Tout corps Aexerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B.

A et B étant deux corps en interaction, la force $\vec{F}_{A\to B}$ (exercée par A sur B) et la force $\vec{F}_{B\to A}$ (exercée par B sur A) qui décrivent l'interaction sont directement opposées :

$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}}$$

Dans le cas de la mécanique du point, la troisième loi précise également :

$$\vec{F}_{A\to B} \times \vec{AB} = \vec{0}$$

Autrement dit, la droite de glissement de la force d'interaction est aussi la droite reliant les positions des particules composant le corps.

Ces forces ont la même droite d'action, des sens opposés et la même norme. Ces deux forces sont toujours directement opposées, que A et B soient immobiles ou en mouvement.

Cette loi est parfois appelée *loi d'action - réaction*, une formulation au mieux imprécise, au pire entraînant de nombreuses confusions. En particulier, cette ancienne formulation véhicule l'idée qu'il y a toujours une force qui est la « cause » (l'action), l'autre n'étant qu'une sorte de conséquence (la réaction).

Une autre difficulté rencontrée par les étudiants est l'oubli que ces 2 forces $\vec{F}_{A\to B}$ et $\vec{F}_{B\to A}$ s'exercent sur 2 corps différents. Elles ne peuvent donc pas « s'annuler mutuellement ». L'effet d'annulation n'intervient que lorsqu'on considère un système constitué de différents corps et que l'on s'intéresse à la résultante des forces : dans ce cas, les forces intérieures s'annulent en effet et seule la somme des forces extérieures est à prendre en compte (ce qui est heureux pour étudier le mouvement d'un solide constitué de plus de 10^{23} éléments).

Il convient de faire remarquer ici que la loi des actions réciproques a l'inconvénient de supposer l'application des forces comme instantanée (ce qui est abandonné en relativité restreinte). Dans le cas des forces à distance, il convient dans certains cas d'effectuer des transformations pour tenir compte du retard de propagation.

Cette correction ne relève pas de la relativité. Comme les forces électromagnétiques s'appliquent à distance, on avait mis en évidence que ces forces se propagent à la vitesse de la lumière et non à vitesse infinie, et inclu cette nuance dans les équations, avant la révolution de la relativité restreinte

Loi d'interaction gravitationnelle

Certains auteurs appellent quatrième loi de Newton sa Loi universelle de la gravitation. Cette dénomination est très contestable, mais elle est mentionnée ici à cause de la parenté historique des lois : si cette loi ne fait pas partie des principes de la mécanique au même titre que les trois autres et le principe de relativité, la première réussite de Newton fut d'utiliser ses lois mécaniques plus sa loi d'interaction gravitationnelle pour démontrer les lois empiriques de Kepler. Ce sont ces premiers succès qui établirent pour longtemps la domination des lois de Newton sur la science.

$$\boxed{\vec{F} = G\frac{m_1\,m_2}{R^2}\vec{1_r}}$$

où
- F est la force de gravitation reliant deux corps dotés d'une masse.
- G est la constante de gravitation universelle.
- m_1 est la masse du premier corps.
- m_2 est la masse du second corps.
- R est la distance séparant les deux corps.
- $\vec{1_r}$ est le vecteur directeur de la droite joignant les centres de gravité respectifs des deux corps (par exemple, du corps 1 au corps 2).

Notons qu'en combinant cette loi et le principe fondamental de la dynamique, on démontre la prédiction de Galilée selon laquelle dans le vide, tous les objets tombent à la même vitesse (en admettant implicitement qu'inertie et masse gravitationnelle sont égales).

« Cinquième corollaire » de Newton : principe de relativité

Newton dans ses *Principia* a mis en évidence la notion de relativité du mouvement dans les définitions précédant le livre premier. Toutefois, en introduisant la notion d'espace absolu, il ne dégage pas encore la notion de référentiel galiléen telle qu'elle est définie aujourd'hui. D'autre part, Newton ne fait aucune référence au cas où un référentiel n'est pas en mouvement rectiligne uniforme par rapport à ce qu'il appelle l'espace absolu. Ses résultats sont donc implicitement valables dans des référentiels en mouvement rectiligne uniforme mais aucune infirmation de la validité de ses lois dans les référentiels accélérés n'est donnée dans les Principia. Il faudra attendre les travaux de Coriolis et de Foucault au XIXe siècle pour que la notion de référentiel galiléen telle qu'elle est connue aujourd'hui se dégage et pour que les formules de changement de repère vers (ou depuis) un référentiel non galiléen soient établies.

Le principe de relativité s'énonce comme suit : « *Deux référentiels d'espace en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre sont équivalents pour les lois de la mécanique* ».

Au sens de Newton, il faudrait se restreindre aux référentiels en mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'espace absolu, en se souvenant que si un référentiel est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un deuxième lui-même en mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'espace absolu, alors le premier référentiel est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'espace absolu.

On pourra le vérifier, en admettant les trois premières lois, l'invariance du temps, de la masse et des forces. C'est pourquoi ce principe est appelé ici corollaire.

Ce principe est dit principe de relativité galiléenne, car on en trouve la trace dans le célèbre Dialogue de Galilée, quoique Galilée avait supposé qu'il en était de même pour une rotation uniforme, ce qui n'est pas le cas.

Une formulation plus moderne affirme que toutes les lois de la physique sont les mêmes pour deux référentiels d'espace en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. C'est cette formulation forte qui est à la base de la relativité restreinte.

Remarquons que le référentiel héliocentrique est (généralement considéré comme) galiléen et c'est dans ce référentiel que sont étudiés les mouvements des planètes et des sondes spatiales. Considérer le référentiel géocentrique comme galiléen, alors que le centre de la Terre est en accélération autour du Soleil, revient à négliger les forces de marée. Considérer le référentiel terrestre comme galiléen revient à négliger la composante centrifuge dans la « pesanteur », et la force de Coriolis si le point matériel est en mouvement. D'une façon pragmatique, savoir trouver à quel degré d'approximation un référentiel peut être (considéré comme) galiléen est une quête sans cesse repoussée.

En 1905 la théorie de la relativité restreinte d'Albert Einstein montre que la notion de temps absolu, est un concept qui ne donne des résultats corrects qu'aux vitesses beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière. Autre conséquence de la relativité restreinte, aucun corps matériel ne peut dépasser une vitesse-limite appelée c, dont on considère, jusqu'à aujourd'hui, qu'elle est égale à la célérité du photon, par définition : c = 299 792 458 m/s.

De même en 1915, en généralisant le principe de relativité, Einstein propose sa théorie de la gravitation, encore en 2005 non testée dans un laboratoire terrestre, mais vérifiée et non infirmée en astronomie, avec une précision croissante. Cette théorie propose une propagation de la gravitation à la vitesse de la lumière, évitant la propagation à vitesse infinie imposée par les équations de Newton. Cette nouvelle vision de la gravité souligne l'importance du résultat préalable admis par Newton suivant lequel la masse inertielle est égale à la masse gravitationnelle.

Malgré tout, cet édifice des principes reste un monument de la pensée humaine. Ces simples lois permettent à elles seules de construire toute la mécanique usuelle, c'est-à-dire de décrire toute la physique excepté les situations quantiques ou relativistes.

La prédiction du mouvement des planètes par les équations de Newton était remarquable. Et en tenant compte des interactions des planètes, la seule aberration par rapport à la réalité était le petit résidu de 43 secondes d'arc par siècle pour l'avance du périhélie de Mercure, et il a fallu la relativité générale pour l'expliquer.

Et dans la vie commune des faibles vitesses (autre donc que l'architecture « relativiste » des bâtiments du LHC, au CERN), on se satisfait bien de ces lois du mouvement d'usage pratique.

Et, dès que l'on veut la précision ultime (par exemple, une meilleure précision des systèmes de positionnement global, GPS ou Galileo), alors on sait qu'il faut corriger légèrement Newton par Einstein, ou par Heisenberg quand on étudie les atomes.

Limites relativistes de la mécanique newtonienne

Historiquement, la troisième loi permet cependant d'introduire dans les mentalités le concept d'interaction, fondamental en physique. À l'époque, cette loi est une absurdité, si l'on se réfère par exemple au point de vue d'Aristote chez qui la magie et autres actions à distance n'existent pas dans le cadre de la physique. Rappelons que le magnétisme est interprété depuis le de Magnete de Gilbert par des « lignes spectrales », ou tourbillons. De même, la cause de la gravitation est interprétée par Descartes via une théorie (fausse) de tourbillons, si contradictoire que même Huygens n'y croît plus. Par contre, Newton déclarera dans une phrase restée célèbre : *hypotheses non fingo, je ne chercherai pas la cause ultime de la gravitation.* La gravitation « s'exprime » au travers de la loi centripète qu'il énonce, il ne fait aucune supposition sur la nature de cette force.

Newton sortait donc hardiment hors du cadre imposé par la physique de l'époque, d'où une critique véhémente, l'action instantanée à distance étant récusée (elle gênait d'ailleurs à Newton lui-même), comme insensée (Rømer venait de montrer la finitude de la célérité de la lumière). En 1915, Einstein proposera une hypothèse moins choquante : la gravitation se propage, à la vitesse limite c.

Newton avait postulé : il existe un espace et un temps absolu.

En fait, on pouvait étendre à toute une classe de référentiels dits « inertiels » la notion d'espace absolu : quête sans fin, mais de plus en plus précise. Si aucun référentiel usuel n'est parfaitement inertiel, on peut du moins prouver qu'ils existent. Mais Newton a eu tort de ne pas croire entièrement Galilée qui défendait l'équivalence entre un référentiel et un autre évoluant à vitesse constante par rapport au premier.

Par contre, Newton se méfiait du temps absolu : il savait qu'en changeant l'échelle de temps, l'expression de son principe fondamental de la dynamique changeait. Il l'a même savamment utilisé. Mais évidemment, il fallait prendre une décision : quelle échelle de temps choisir ? Ce qui paraissait le plus simple était la fameuse loi de Kepler. Et tout était cohérent.

Les notions de temps relatif, de finitude des vitesses, de synchronisation et de transport du temps allaient nécessiter encore beaucoup de découvertes avant d'être entrevues. Il a donc opté pour le temps dynamique absolu et édicté : le temps absolu s'écoule uniformément. C'est cette variable t qui intervient quand on écrit

$$v = \frac{dr}{dt}$$

puis

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ce temps absolu est généralement admis tant qu'on n'emploie pas la relativité restreinte. Mais il constitue néanmoins une hypothèse philosophique forte qui a été régulièrement discutée par Leibniz notamment qui disait :

« J'ai marqué plus d'une fois que je tenais l'espace pour quelque chose de purement relatif, comme le temps ; pour un ordre de coexistences comme le temps est un ordre de successions... »

Une des grandes difficultés des théories de Newton, mise à jour dès le XVIIe siècle est la notion d'action instantanée à distance. Newton lui-même était gêné par cette supposition présente tout aussi bien dans sa théorie de la gravitation que dans sa troisième loi. Plus tard au cours du XVIIe siècle un certains nombres de difficultés, concernant l'électromagnétisme notamment, indiquèrent également que les principes de Newton ne pouvait pas rendre compte en l'état de tous les problèmes mécanique ou cinématique.

La relativité restreinte postule aujourd'hui qu'aucune interaction ne se propage plus vite que la vitesse de la lumière et remet donc définitivement en cause les interactions spontanées. De plus elle montre que pour des objets dont la vitesse est proche de celle de la lumière les lois de Newton ne sont plus qu'approchées. En fait, les formules de la relativité restreinte permettent de considérer la physique newtonienne comme une approximation ou supposant c infinie.

Ainsi les lois de Newton ne sont pas réfutées par Einstein, au contraire, la relativité permet de justifier les équations de Newton dans les cas de faibles vitesses en la rendant démontrable à partir d'une théorie plus générale qui l'englobe.

D'autre part même en relativité restreinte, les forces respectent toujours un théorème de la quantité de mouvement mais adapté, faisant apparaître le facteur de Lorentz. Le théorème de la quantité de mouvement est donc un théorème très puissant, puisqu'il permet de déduire les lois de Newton dans le cas où les faibles vitesses le permettent. Dans le cas contraire il s'incrit dans les résultats de la relativité restreinte.

Il serait bien sûr absurde de dire que les lois de Newton sont fausses. La chute d'un corps sur Terre est un cas où les corrections apportées par la relativité sont minimes, comme pour la plupart des applications quotidiennes de la mécanique classique.

En revanche, une situation où les résultats sont radicalement modifiés est celle, par exemple, de l'accélérateur de particules du CERN. L'énergie cinétique apportée à une particule de charge q par une tension V vaut qV. Avec le TeraVolt (1 000 milliards de volts) du CERN, on trouve classiquement pour un électron une vitesse 2 000 fois supérieure à la vitesse de la lumière. La vitesse réelle, calculée dans le cadre relativiste est celle de la lumière diminuée de quelques microns/seconde. Il est donc essentiel de bien distinguer les situations où les lois de Newton sont valables de celles où elles ne sont plus utilisables.

4.2 Mouvements particuliers et gravitation

4.2.1 Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Lorsqu'un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, son vecteur vitesse est constant (en direction, en sens et en norme). Donc, $\vec{v}(t) = \vec{v}$ et $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{0}$. Nous pouvons donc conclure que la somme des forces qui lui est appliqué est nulle elle aussi. On a donc l'équation vectorielle

$$m\,\vec{a}(t) = \vec{0}$$

qui peut s'écriree, sous forme paramétrique,

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} m\,a_x &=& 0 \\ m\,a_y &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} m\frac{dv_x}{dt} &=& 0 \\ m\frac{dv_y}{dt} &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} v_x &=& v_{0x} & \text{constante} \\ v_y &=& v_{0y} & \text{constante} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dr_x}{dt} &=& v_{0x} \\ \frac{dr_y}{dt} &=& v_{0y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} dr_x &=& v_{0x}dt \\ dr_y &=& v_{0x}dt \end{array} \right.$$

Avec la condition initiale $\vec{r}(t)|_{t=t_0} = \vec{r_0}$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $r_x(t_0) = r_{0x}$ et $r_y(t_0) = r_{0y}$ et que nous allons injecter dans le système que nous étudions. Nous obtenons, comme dans l'étude cinématique du MRU,

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \int_{r_{0x}}^{r_x} dr_x &=& \int_{t_0}^{t} v_{0x}dt \\ \int_{r_{0y}}^{r_y} dr_y &=& \int_{t_0}^{t} v_{0y}dt \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} r_x - r_{0x} &=& v_{0x}(t-t_0) \\ r_y - r_{0y} &=& v_{0y}(t-t_0) \end{array} \right.$$

En conclusion, nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0)}$$

se présente comme deux équations dépendant d'un paramètre commun : le temps. On pourra donc faire abstraction du temps pour dessiner la trajectoire du projectile sur un plan Oxy.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r_x(t) & = & v_{0x}(t - t_0) + r_{0x} \\ r_y(t) & = & v_{0y}(t - t_0) + r_{0y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{r_x - r_{0x}}{v_{0x}} + t_0 & = & t \\ \frac{r_y - r_{0y}}{v_{0y}} + t_0 & = & t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_x - r_{0x}}{v_{0x}} + t_0 = \frac{r_y - r_{0y}}{v_{0y}} + t_0$$

$$\Leftrightarrow r_y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} r_x + (r_{0y} - r_{0x}\frac{v_{0y}}{v_{0x}})$$

En posant $m = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ et $p = r_{0y} - r_{0x}\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$, on constate que la trajectoire du projectile considéré sera rectiligne, étant donné que nous avons l'équation d'une droite.

$$\Leftrightarrow r_y = m\, r_x + p$$

4.2.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Lorsqu'un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, son vecteur accélération est constant (en direction, en sens et en norme). Donc, $\vec{a}(t) = \vec{a}$ et $\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t)$. Nous pouvons donc conclure que la somme des forces qui lui est appliqué $\vec{F}$ n'est pas nulle. On a donc l'équation vectorielle

$$m\, \vec{a}(t) = \vec{F}$$

Avec les conditions initiales $\vec{r}(t)|_{t=t_0} = \vec{r_0}$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $r_x(t_0) = r_{0x}$ et $r_y(t_0) = r_{0y}$, et $\vec{v}(t)|_{t=t_0} = \vec{v_0}$, qui peut donc s'exprimer par les deux équations $v_x(t_0) = v_{0x}$ et $v_y(t_0) = v_{0y}$ que nous allons injecter dans le système que nous étudions. Nous obtenons, comme dans l'étude cinématique du MRUA, l'équation que nous pouvons encore écrire sous forme paramétrique :

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} m\, a_x & = & F_x \\ m\, a_y & = & F_y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} m\frac{dv_x}{dt} & = & F_x \\ m\frac{dv_y}{dt} & = & F_y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v_x & = & \frac{F_x}{m}(t - t_0) + v_{0x} \\ v_y & = & \frac{F_y}{m}(t - t_0) + v_{0y} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dr_x}{dt} & = & \frac{F_x}{m}(t - t_0) + v_{0x} \\ \frac{dr_y}{dt} & = & \frac{F_y}{m}(t - t_0) + v_{0y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} dr_x & = & \left(\frac{F_x}{m}(t - t_0) + v_{0x}\right) dt \\ dr_y & = & \left(\frac{F_x}{m}(t - t_0) + v_{0x}\right) dt \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \int_{r_{0x}}^{r_x} dr_x & = & \int_{t_0}^{t} \left(\frac{F_x}{m}(t - t_0) + v_{0x}\right) dt \\ \int_{r_{0y}}^{r_y} dr_y & = & \int_{t_0}^{t} \left(\frac{F_y}{m}(t - t_0) + v_{0y}\right) dt \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r_x - r_{0x} & = & \frac{F_x}{2\,m}(t - t_0)^2 + v_{0x}(t - t_0) \\ r_y - r_{0y} & = & \frac{F_y}{2\,m}(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0) \end{array} \right.$$

En conclusion, nous pouvons constater que ce système, qui peut s'écrire de manière condensée

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{F}\frac{(t - t_0)^2}{2\,m} + \vec{v}_0(t - t_0)}$$

se présente comme deux équations dépendant d'un paramètre commun : le temps. On pourra donc faire abstraction du temps pour dessiner la trajectoire du projectile sur un plan Oxy. Nous allons effectuer ce calcul pour le cas simplifié $t_0 = 0$, $\vec{r}_0 = \vec{0}$ et $\vec{v}_0 = \vec{0}$. On a

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r_x(t) & = & \frac{F_x}{2\,m} t^2 \\ r_y(t) & = & \frac{F_y}{2\,m} t^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} t^2 & = & \frac{2\,m\,r_x}{F_x} \\ t^2 & = & \frac{2\,m\,r_y}{F_y} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\,m\,r_x}{F_x} = \frac{2\,m\,r_y}{F_y}$$

$$\Leftrightarrow r_y = \frac{F_y}{F_x}\,r_x$$

En posant $m = \frac{F_y}{F_x}$, on constate que la trajectoire du projectile considéré sera bien rectiligne, étant donné que nous avons l'équation d'une droite passant par l'origine.

$$\Leftrightarrow r_y = m\,r_x$$

chute libre d'un corps

Nous avons dans le cas particulier d'un corps soumis à la gravité l'équation

$$m\,\vec{a}(t) = m\,\vec{g} \;\Leftrightarrow\; \vec{a}(t) = \vec{g}$$

Cette équation est, ici aussi, identique à celle considérée en cinématique :

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{g}\frac{(t-t_0)^2}{2} + \vec{v}_0(t-t_0)}$$

4.2.3 Mouvement circulaire uniforme (MCU)

Soit un yoyo de masse m tournant autour d'un doigt à vitesse $||\vec{v}(t)||$ constante. Pour retenir le yoyo dans sa trajectoire, le fil est soumis à une tension $\vec{T}(t)$ exprimée en Newtons. On a l'équation du mouvement

$$m\,\vec{a}(t) = \vec{T}(t) \parallel \vec{a}(t)$$

où $\vec{T}(t)$ est la tension dans le fil et $\vec{a}(t)$ est l'accélération subie par le yoyo.

Comme lors de l'étude du mouvement en cinématique, nous allons introduire les vecteurs $\vec{1_n}(t)$ et $\vec{1_t}(t)$ tels que

$$\vec{1_n}(t) = \cos\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \sin\omega(t-t_0)\vec{1_y}$$

et

$$\vec{1_t}(t) = -\sin\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \cos\omega(t-t_0)\vec{1_y}$$

où ω (rad/s) est la vitesse angulaire et t_0 est l'instant initial.

On sait que

$$\vec{r}(t) = R\ \vec{1_n}$$

où R est ici le rayon de courbure de la trajectoire, autrement dit, le rayon du cercle décrit par le yoyo. On a, en appliquant deux dérivations successives

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\frac{d\vec{1_n}}{dt} = R\omega\vec{1_t}$$

et

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = R\omega\frac{d\vec{1_t}}{dt} = -R\omega^2\vec{1_n}$$

car

$$\frac{d\vec{1_n}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\cos\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \sin\omega(t-t_0)\Big)\vec{1_y} = -\omega\sin\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \omega\cos\omega(t-t_0)\vec{1_y} = \omega\vec{1_t}$$

$$\begin{array}{rcc} \frac{d^2\vec{1_n}(t)}{dt^2} & = & \frac{d\vec{1_t}(t)}{dt} \\ & = & \omega\frac{d}{dt}\Big(-\sin\omega(t-t_0)\vec{1_x} + \cos\omega(t-t_0)\vec{1_y}\Big) \\ & = & -\omega^2\cos\omega(t-t_0)\vec{1_x} - \omega^2\sin\omega(t-t_0)\vec{1_y} = -\omega^2\vec{1_n} \end{array}$$

Les équations du mouvement du yoyo nous serons donc données par

$$\begin{array}{rcc} \vec{r}(t) & = & R\vec{1_n}(t) \\ \vec{v}(t) & = & R\omega\vec{1_t}(t) \\ \vec{a}(t) & = & -R\omega^2\vec{1_n}(t) \end{array}$$

La force centrifuge

La force centrifuge est une force fictive utilisée en physique dans le contexte de l'étude du mouvement des objets dans des référentiels non inertiels, car en rotation par rapport à un référentiel galiléen.

Par exemple, une personne est dans une voiture, et cette voiture démarre brusquement. La personne sent une force qui la plaque contre le dossier, elle subit la force d'inertie. Considérons maintenant un observateur extérieur : il verra juste un effet de l'inertie : lorsque la voiture démarre, la personne assise est immobile et est donc « rattrapée » par son dossier, et c'est la pression exercée par le dossier sur la personne qui va mettre celle-ci en mouvement, qui va la pousser et faire qu'elle se déplace à la même vitesse que le reste de la voiture. Il s'agit d'une force fictive.

En mécanique newtonienne, l'équation du mouvement $\vec{F} = m\,\vec{a}$ ne s'applique que dans un référentiel inertiel. Il est parfois utile ou plus simple de traiter un problème dans un référentiel qui est non-inertiel.

Quand on fait ce choix, on peut faire abstraction du caractère non inertiel du référentiel à condition de rajouter des forces supplémentaires dans le problème. On utilise alors cette équation mais en incluant dans le terme de force des forces supplémentaires qu'on appelle en conséquence des forces fictives.

Une force est un modèle destiné à représenter une interaction ; quelle que soit la nature de l'interaction, celle-ci est représentée par un vecteur ayant un point d'application, une direction, un sens et une intensité. C'est le cas des interactions de contact (pression, frottement) ou à distance (poids, force électrostatique, force de Lorentz).

En ce sens, les forces d'inertie ne résultent pas d'une interaction (c'est-à-dire de l'action d'un l'objet sur un autre) mais juste du choix du référentiel, ce ne sont donc pas à proprement parler des forces mais un simple artifice de calcul.

Cependant, si l'on définit une force par son effet, c'est-à-dire par l'accélération ou la déformation qu'elle produit, alors les forces d'inertie sont bien des forces

Les effets de ces forces fictives sont parfaitement perceptibles depuis le référentiel non inertiel dans le sens où elles sont rajoutées justement pour que la perception qu'un observateur a du mouvement des objets depuis ce référentiel soit cohérente avec la Loi de Newton. Néanmoins, il faut les distinguer des autres forces fondamentales en ce sens que ces forces sont elles indépendantes du référentiel.

La force centrifuge est utilisée dans le cas particulier des référentiels décrivant une trajectoire circulaire. Un référentiel en rotation est bien non-inertiel étant donné qu'il décrit une trajectoire qui indique qu'il est soumis à une accélération. Sans cette rotation, il décrirait un mouvement rectiligne uniforme.

Si on étudie le mouvement d'un objet dans un référentiel tournant, on peut dès lors utiliser l'équation $\vec{F} = m\,\vec{a}$ à condition de rajouter, notamment, une force centrifuge comme agissant sur l'objet.

Si, de plus, depuis le référentiel tournant, l'objet est perçu comme à l'équilibre ($\vec{a} = 0$), alors la force centrifuge est la seule force fictive qu'il est nécessaire de rajouter. C'est par exemple le cas pour des référentiels attachés à des objets en rotation étant donné que si le référentiel est attaché à l'objet, l'objet y est perçu en équilibre, puisqu'il n'y est pas perçu en mouvement. Dans le cas contraire, il convient de rajouter une autre force fictive, la force de Coriolis.

L'expression de la force centrifuge à rajouter est

$$||\vec{F}|| = m\frac{v^2}{R}$$

où
- m est la masse de l'objet étudié.
- v est la vitesse du référentiel tournant.
- R est le rayon de courbure de la trajectoire du référentiel.
- toutes mesurées depuis un seul et même référentiel non-inertiel.

Idées fausses
- La force centrifuge serait la réaction à la force centripète.
- La force centrifuge n'obéirait pas au principe d'action-réaction.
- La force centrifuge serait une force comme les autres.

4.2.4 Mouvement circulaire accéléré : cas général

Soit un yoyo de masse m tournant autour d'un doigt à vitesse $||\vec{v}(t)||$ non constante. Pour retenir le yoyo dans sa trajectoire, le fil est soumis à une tension $\vec{T}(t)$ exprimée en Newtons. On a l'équation du mouvement

$$m\,\vec{a}(t) = \vec{T}(t) \not\parallel \vec{a}(t)$$

où $\vec{T}(t)$ est la tension dans le fil et $\vec{a}(t)$ est l'accélération subie par le yoyo.

Nous allons ici aussi introduire les vecteurs $\vec{1_n}(t)$ et $\vec{1_t}(t)$ tels que

$$\vec{1_n}(t) = \cos\theta(t)\vec{1_x} + \sin\theta(t)\vec{1_y}$$

et

$$\vec{1_t}(t) = -\sin\theta(t)\vec{1_x} + \cos\theta(t)\vec{1_y}$$

où θ (rad) est l'angle en fonction du temps et t_0 est l'instant initial. On suppose $\theta(t_0) = 0$.

On sait que

$$\vec{r}(t) = R\,\vec{1_n}(t)$$

où R est ici le rayon de courbure de la trajectoire, autrement dit, le rayon du cercle décrit par le yoyo. On a, en appliquant deux dérivations successives

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\frac{d\vec{1_n}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{1_t}$$

avec $\dot{\theta} = \frac{d\theta(t)}{dt}$ et

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = R\frac{d\dot{\theta}\vec{1_t}}{dt} = -R\theta^2\vec{1_n} + R\ddot{\theta}\vec{1_t}$$

car

$$\frac{d\vec{1_n}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\cos\theta(t)\vec{1_x} + \sin\theta(t)\Big)\vec{1_y} = -\dot{\theta}\sin\theta(t)\vec{1_x} + \dot{\theta}\cos\theta(t)\vec{1_y} = \dot{\theta}\vec{1_t}$$

$$\begin{array}{rcc} \frac{d^2\vec{1_n}(t)}{dt^2} & = & \frac{d\vec{1_t}}{dt} \\ & = & \frac{d}{dt}\Big(-\dot{\theta}\sin\theta(t)\vec{1_x} + \dot{\theta}\cos\theta(t)\vec{1_y}\Big) \\ & = & -\dot{\theta}^2\cos\theta(t)\vec{1_x} - \ddot{\theta}\sin\theta(t)\vec{1_x} - \dot{\theta}^2\sin\theta(t)\vec{1_y} + \ddot{\theta}\cos\theta(t)\vec{1_y} \\ & = & -\dot{\theta}^2\vec{1_n} + \ddot{\theta}\vec{1_t} \end{array}$$

Avec l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t)\ rad/s^2$, les équations du mouvement du yoyo nous serons donc données par

$$\begin{array}{rcc} \vec{r}(t) & = & R\vec{1_n}(t) \\ \vec{v}(t) & = & R\dot{\theta}(t)\vec{1_t}(t) \\ \vec{a}(t) & = & -R\dot{\theta}^2(t)\vec{1_n}(t) + R\ddot{\theta}(t)\vec{1_t}(t) \end{array}$$

Où on voit que l'accélération tangentielle n'est pas nulle, puisque la norme de la vitesse varie avec le temps.

Nous pourrions aussi déterminer, de cette manière, un mouvement elliptique (c'est-à-dire décrivant une ellipse, comme par exemple les planètes tournant autour du soleil) en considérant que le rayon R varie et dépend du temps ($\vec{R} = \vec{R}(t)$). Nous aurons donc, comme équations paramétriques de la trajectoire elliptique :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} R_x(t) & = & A\cos\theta(t) \\ R_y(t) & = & B\sin\theta(t) \end{array} \right.$$

où A et B sont les longueurs des deux demi grands axes de l'ellipse.

Le calcul est laissé comme exercice à la discrétion du lecteur envieux de s'améliorer. Notons que les équations de la trajectoire sont établies par rapport au centre de l'ellipse. Cependant, lors de l'étude d'une planète tournant autour du soleil, le soleil occupe un des foyers de l'ellipse et pas son centre.

4.2.5 La parabole de tir (MRU + MRUA)

Lorsque l'on projette un caillou en essayant de le jeter le plus loin possible, le projectile décrit, dans l'espace, une courbe qui ressemble à une cloche. Si le corps est lancé du point P de coordonnées $(r_{0x}, r0z)$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ décrivant un angle α avec l'horizontale, son mouvement $\vec{r}(t)$ sera décomposé en un mouvement horizontal $r_x(t)$ (selon l'axe Ox) et un mouvement vertical $r_z(t)$ (selon l'axe Oz). Nous allons étudier ces deux mouvements perpendiculaires, $r_x(t)$ et $r_z(t)$, indépendamments.

Soit

$$\vec{F} = \vec{G} = -||\vec{G}||\vec{1_z}$$

$$\vec{v}_0 = ||\vec{v}_0||\cos\alpha.\vec{1_x} + ||\vec{v}_0||\sin\alpha.\vec{1_z} = v_{0x}.\vec{1_x} + v_{0z}.\vec{1_z}$$

et

$$\tan \alpha = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}(t) & = & r_x(t).\vec{1_x} + r_z(t).\vec{1_z} \\ \vec{v}(t) & = & v_x(t).\vec{1_x} + v_z(t).\vec{1_z} \\ \vec{a}(t) & = & a_x(t).\vec{1_x} + a_z(t).\vec{1_z} \end{array}$$

Nous savons que le corps, dans la direction x, n'est soumis à aucune force : $F_x = 0$. Le mouvement du corps selon x sera donc un mouvement rectiligne uniforme (MRU) vu qu'aucune accélération selon x ne perturbera le mouvement selon x.

Dans la direction Oz, le corps est soumis à la gravité : $\vec{G} = -m\ g\vec{1_z}$. Le mouvement du corps selon z sera donc un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) vu qu'aucune autre force ne vient perturber la chute. Par contre, la vitesse $v_z(t) = -gt+v_{0z}$ du mobile sera proportionnelle au temps t.

On a, en remplaçant dans l'équation $m\ \vec{a} = \vec{F}$,

$$m\ \vec{a}(t) \quad = \quad -m\ g\ \vec{1_z}$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m\ a_x(t) & = & 0 \\ m\ a_z(t) & = & -m\ g \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v_x(t) & = & v_{0x} \\ v_z(t) & = & -g(t-t_0) + v_{0z} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r_x(t) & = & v_{0x}(t-t_0) + r_{0x} \\ r_z(t) & = & -g\frac{(t-t_0)^2}{2} + v_{0z}(t-t_0) + r_{0z} \end{array} \right.$$

Pour $t_0 = 0$ et $\vec{r_0} \equiv (r_{0x}, r_{0y}) = (0,0)$, nous avons les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r_x(t) & = & v_{0x}t \\ r_z(t) & = & -g\frac{t^2}{2} + v_{0z}t \end{array} \right.$$

Donc, si l'on élimine t, on trouve

$$r_z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} r_x^2 + r_x \tan\alpha$$

Cette équation est celle d'une parabole passant par l'origine et dont la concavité est tournée vers le bas et présentant un axe de symétrie verticale. La norme v_0 de la vitesse initiale $\vec{v_0}$ et l'angle de lancement α sont suffisants pour déterminer entièrement le mouvement décrit par le mobile.

Ici aussi, nous pouvons définir la portée, l'angle de tir optimal, la hauteur atteinte par le projectile, le temps de parcours, ... de manière identique à ce qui a été fait lors de l'étude cinématique d'un projectile.

4.2.6 chute libre d'un corps avec frottements

Parler de dynamique sans introduire les équations différentielles du 2^{eme} ordre et les forces de frottement $\vec{F}_{fr}$ serait un peu, mutatis mutandi, comme marcher dans des rues sans déjections canines. Le modèle serait trop parfait et trop simpliste, par conséquent inadapté à la réalité.

Avec la force de gravitation $\vec{G}$, on a l'équation de Newton

$$m\,\vec{a}(t) = \vec{G} + \vec{F}_{fr}(t)$$

En introduisant que les forces de frottements $\vec{F}_{fr}(t)$ dans le milieu sont proportionnelles à la vitesse $\vec{v}(t)$, il vient

$$m\,\vec{a}(t) = m\,\vec{g} - k\,\vec{v}(t)$$

Comme nous travaillons dans un espace à 1 dimension (le corps ne peut que descendre ou monter), nous utiliserons l'équation différentielle simplifiée, en considérant que le corps chute et que donc, sa vitesse est orientée vers le bas par rapport à l'axe Oz de référence, qui est orienté vers le haut.

De plus, nous savons que les forces de frottement s'opposent à la vitesse et donc, si le corps chute ($v(t) < 0$), elles seront dirigées vers le haut. On aura l'équation

$$m\,a(t) = -m\,g - k\,v(t)$$

Qui peut encore s'écrire

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}\dot{r} = -g$$

Il s'agit d'une équation différentielle[2] inhomogène du 2^{eme} ordre. Lorsque l'équation différentielle possède un second membre (ici, $-g$ est une fonction non nulle), il reste possible d'exploiter ce qui suit. L'équation obtenue en remplaçant $-g$ par la fonction nulle est appelée équation homogène associée à l'équation différentielle. On la suppose résolue : y_{SGh} représente la solution générale de l'équation homogène.

Pour trouver la solution de l'équation différentielle non homogène, il suffit alors de trouver une solution de l'équation avec second membre : y_{SPnh}, pour les connaîtres toutes. En effet, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y_{SPnh} + y_{SGh}$ où y_{SGh} est la solution générale de l'équation homogène associée.

On cherche des solutions homogènes de $\ddot{r} + \frac{k}{m}\dot{r} = -g$ sous forme exponentielle, c'est-à-dire telles que $r(t) = e^{t}$. Une telle fonction sera solution de l'équation différentielle si et seulement si λ est solution de

2. Une équation différentielle est une équation dans laquelle la ou les inconnue(s) ne sont pas des nombres mais des fonctions. Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I revient donc à chercher toutes les fonctions f dérivables sur I qui vérifient l'équation différentielle proposée.

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$$

Cette équation est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle.

Pour des équations différentielles homogènes du 2^{eme} ordre de la forme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \text{(où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels, } a \text{ non nul)}$$

l'équation caractéristique de l'équation différentielle sera donnée par

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Comme pour toute équation du second degré, trois cas se présentent selon le signe du discriminant.

1. Si $\Delta > 0$

   L'équation possède deux solutions λ_1 et λ_2.

   L'équation possède au moins deux fonctions exponentielles solutions $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. On démontre que ces deux solutions engendrent l'ensemble des solutions. C'est-à-dire que l'ensemble des solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

   $$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

   où C_1 et C_2 sont deux réels quelconques.

   Pour déterminer ces deux constantes, il est naturel de donner deux informations sur la fonction
   - cela se fait en général en donnant des conditions initiales en un point x_0, c'est-à-dire en précisant les valeurs y_0 et y'_0 de $y(x)$ et $y'(x)$ à cet instant. Dans ce cas l'existence et l'unicité de la solution vérifiant ces conditions initiales sont garanties.
   - pour de nombreux problèmes physiques, il est fréquent de donner des conditions aux limites en précisant les valeurs y_1 et y_2 aux « instants » x_1 et x_2. Il y a alors fréquemment existence et unicité des solutions, mais ce n'est pas toujours vrai.

2. Si $\Delta = 0$

   L'équation ne possède qu'une seule solution $\lambda*$. On démontre alors que l'ensemble des solutions sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

   $$y(x) = (Ax + B)e^{x}$$

   où A et B sont des réels quelconques.

Pour déterminer A et B, il faut, comme dans le cas précédent posséder deux conditions initiales sur y.

3. Si $\Delta < 0$

   L'équation ne possède pas de solutions réelles mais deux solutions complexes : λ_1 et λ_2 conjuguées l'une de l'autre.

   Il est alors utile de faire une incursion dans les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ définie par $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont des solutions de l'équation dans cet ensemble . On démontre alors que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies par $y(x) = C_1 e^{\lambda_1}(x) + C_2 e^{\lambda_2}(x)$ où C_1 et C_2 sont deux complexes quelconques.

   On démontre alors qu'elles engendrent l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ c'est à dire que cet ensemble est formé des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

   $$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$$

   où A et B sont deux réels quelconques et $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$.

   Pour déterminer A et B, il faut, comme dans les cas précédents posséder deux conditions initiales sur y.

Cependant, notre équation de la chute d'un corps $\ddot{r}(t) + \frac{k}{m}\dot{r}(t) = -g$ peut encore s'écrire, en considérant que $\dot{r}(t) = v(t)$ et $\ddot{r}(t) = \dot{v}(t)$,

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$$

Les solutions de l'équation homogène $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = 0$ associée peuvent se déduire de la procédure d'intégration suivante :

$$\begin{array}{rccc} & \frac{dv}{dt} & = & -\frac{k}{m}v \\ \Rightarrow & \frac{dv}{v} & = & -\frac{k}{m}dt \\ \Rightarrow & \int_{v_0^*}^{v} \frac{dv}{v} & = & -\frac{k}{m}\int -{t_0}^{t} dt \\ \Leftrightarrow & \ln\frac{v}{v_0^*} & = & -\frac{k}{m}(t - t_0) \\ \Leftrightarrow & \ln\frac{v}{v_0^*} & = & -\frac{k}{m}(t - t_0) \\ \Leftrightarrow & \frac{v}{v_0^*} & = & e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \end{array}$$

La solution générale de l'équation homogène peut finalement s'écrire

$$v_{SGh}(t) = v_0^* e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}$$

La solution particulière de l'équation inhomogène $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$ nous sera donnée par

$$v_{SPnh}(t) = -\frac{m}{k}g$$

car on peut vérifier que $\frac{dv_{SPnh}(t)}{dt} + \frac{k}{m}v_{SPnh}(t)$ est bien égal à $-g$.

Donc, la vitesse instantannée du projectile en chutte libre nous sera donnée par, avec $v(t_0) = v_0$,

$$v(t) = v_{SGh}(t) + v_{SPnh}(t) = (v_0 + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k}$$

En intégrant la vitesse par rapport au temps, nous obtenons la trajectoire $r(t)$ du corps. Nous avons l'équation

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{dr}{dt} & = & v(t) \\ \Rightarrow & dr & = & \left((v_0 + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k}\right) dt \\ \Rightarrow & \int_{r_0^*}^{r} dr & = & \int_{t_0}^{t} \left((v_0 + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k}\right) dt \\ \Leftrightarrow & r - r_0^* & = & -\frac{m}{k}(v_0 + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k}(t - t_0) \end{array}$$

Et, avec $r(t_0) = r_0$, nous avons finalement, pour l'équation de la trajectoire de la chute d'un corps

$$r(t) = -\frac{m}{k}(v_0 + \frac{mg}{k})(1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}) - \frac{mg}{k}(t - t_0) + r_0$$

4.2.7 La parabole de tir avec frottements

Avec la force de gravitation $\vec{G}$, on a l'équation de Newton

$$m\,\vec{a}(t) = \vec{G} + \vec{F}_{fr}(t)$$

En introduisant que les forces de frottements $\vec{F}_{fr}(t)$ dans le milieu sont proportionnelles à la vitesse $\vec{v}(t)$, il vient

$$m\,\vec{a}(t) = m\,\vec{g} - k\,\vec{v}(t)$$

Comme nous travaillons cette fois dans un espace à 2 dimension, nous utiliserons un système de deux équations différentielles, en considérant que le corps chute dans la direction z.

De plus, nous savons que les forces de frottement s'opposent à la vitesse et donc, si le corps chute, elles seront dirigées vers le haut. On aura les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m\,a_x(t) & = & -k\,v_x(t) \\ m\,a_z(t) & = & -m\,g - k\,v_z(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_x(t) & = & -\frac{k}{m}\,v_x(t) \\ a_z(t) & = & -g - \frac{k}{m}\,v_z(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{v}_x(t) & = & -\frac{k}{m}\,v_x(t) \\ \dot{v}_z(t) & = & -g - \frac{k}{m}\,v_z(t) \end{array} \right.$$

En appliquant ce que nous avons obtenu au paragraphe précédent, nous obtenons

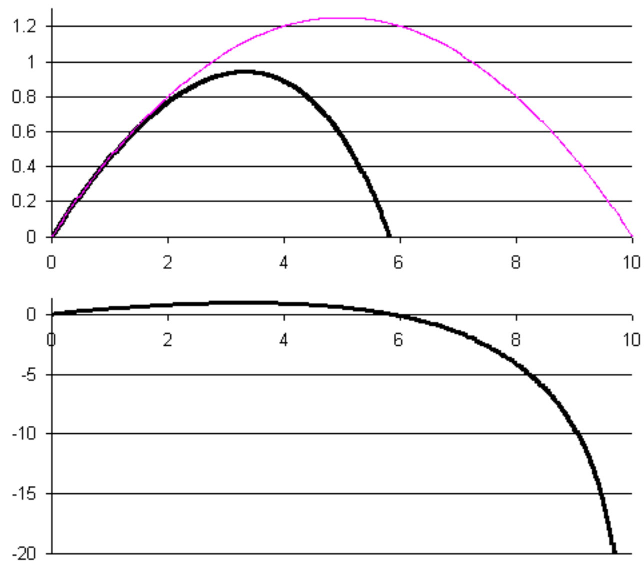


FIGURE 4.2 – (en haut) Courbe décrite par le projectile en présence de forces de frottements : comparaison avec la parabole de tir sans forces de frottements. (en bas) Courbe décrite par le projectile : nous pouvons voir que, sous l'axe Ox, le projectile se rapproche d'une asymptote verticale située en $r_x = \frac{m\,v_0}{k}$.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v_x(t) & = & v_{0x} e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \\ v_z(t) & = & (v_{0z} + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{k} \end{array} \right.$$

Donc, les équations paramétriques de la trajectoire seront données par

$$\left\{ \begin{array}{c} r_x(t) = \frac{m}{k} v_{0x} (1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}) + r_{0x} \\ r_z(t) = \frac{m}{k}(v_{0z} + \frac{mg}{k})(1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}) - \frac{mg}{k}(t - t_0) + r_{0z} \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier des conditions initiales $t_0 = 0$, $\vec{r}_0 = \vec{0}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} r_x(t) = \frac{m}{k} v_{0x} (1 - e^{-\frac{k}{m} t}) \\ r_z(t) = \frac{m}{k}((v_{0z} + \frac{mg}{k})(1 - e^{-\frac{k}{m} t}) - \frac{mg}{k} t \end{array} \right.$$

Donc, on peut écrire

$$t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{k\, r_x}{m\, v_{0x}} \right)$$

En remplaçant dans la deuxième équation, nous obtenons

$$r_z = \left(v_{0z} + \frac{m\, g}{k} \right) \frac{r_x}{v_{0x}} + \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{k\, r_x}{m\, v_{0x}} \right)$$

qui n'est plus l'équation d'une parabole, mais qui passe toujours par l'origine $(0, 0)$ des axes (voir 4.2 où nous avons utilisé les valeurs $g = 10\ m/s^2$, $m = 1\ kg$, $\vec{v}_0 \equiv (10, 5)\ m/s$ et $k = 1\ kg/s$).

4.2.8 Poids et forces de gravitation

La gravitation est le phénomène par lequel deux corps massifs quelconques s'attirent. La force exprimant l'attraction gravitationnelle s'écrit alors

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}\vec{1_{12}}$$

où

- $\vec{F}_{12}$ étant la force gravitationnelle exercée par le corps 1 sur le corps 2 (en newton) ;
- G, la constante gravitationnelle, qui vaut 6,6742 10^{-11} Nm^2/kg^2.
- m_1 et m_2, les masses des deux corps en présence (en kilogrammes).
- R, la distance entre les 2 corps (en mètres).
- $\vec{1_{12}}$ est un vecteur unitaire dirigé du corps 1 vers le corps 2.
- Le signe $-$ indique que le corps 2 est attiré par le corps 1.

Donc, comme $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, on peut écrire que

$$m_1\ \vec{a_1}(t) = -m_2\ \vec{a_2}(t)$$

Le problème à 2 corps

Le problème à deux corps est un point de départ de la mécanique classique, et un sujet essentiel de la mécanique céleste. Il concerne l'étude du mouvement relatif de deux points matériels P_1 et P_2 affectés de masses respectives m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle.

Si le système est supposé isolé dans l'espace, les points P_1 et P_2 décrivent par rapport au centre de masse des ellipses homothétiques dont l'un des foyers (immobile) est le centre de masse. Les caractéristiques (excentricité, position du second foyer) s'expriment en fonction de la masse réduite μ et de la masse totale $M_t = m_1 + m_2$. Ce résultat, loin d'être scolaire, est employé dans la détection des planètes extrasolaires.

On pose :

- $\vec{r} = \vec{P_1P_2}$
- $\vec{F}_{12}$ la force de P_1 sur P_2
- C le centre de masse de P_1 et P_2
- $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ où m_1 et m_2 sont les masses respectives des points P_1 et P_2

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

- $\vec{r} = \vec{CP}$
- le point P subit la force $\vec{F}_{12}$. En effet, le principe fondamental de la dynamique est vérifié :

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

– La vitesse de P vaut $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

Le problème est donc ramené à un mouvement à « force centrale ». Un mouvement à force centrale est le mouvement d'un point matériel P, soumis uniquement à une force centrale, c'est-à-dire une force toujours dirigée vers le même point noté C, appelé centre de force, qui est ici le centre de masse du système des deux corps.

Dans les cas simplifiés où nous supposerons les orbites des deux corps circulaires (et pas elliptiques), nous aurons les deux cas particuliers suivants de MCU :
– si $m_1 = m_2$, les deux corps décriront la même trajectoire circulaire autour du centre de masse C.
– si $m_1 >> m_2$, le corps P_2 décrira une trajectoire circulaire autour du centre de masse C, quasi confondu avec le corps P_1, qu'on pourra supposer immobile.

Interactions fondamentales

Isaac Newton en 1684 utilise pour la première fois cette loi de gravitation universelle, mais pour des astres supposés ponctuels. Il découvre que tout en astronomie s'en déduit, et qu'il peut même appliquer sa loi à la pesanteur, unifiant ainsi la mécanique terrestre et la mécanique céleste. Il demandera à Halley un délai pour mettre « tout ce fatras » au propre : ce qui exigera de sa part un effort colossal. En 1687, paraîtront les *Principia*, qui est un monument de la pensée humaine : des dizaines de théorèmes y sont démontrés, montrant la voie pour la recherche du XVIII^{eme} siècle. Pour la première fois, est mise pleinement en acte la pensée de Galilée : le grand livre de la Nature peut s'expliquer par les mathématiques. Ainsi peut-on considérer Newton comme le fondateur de la physique mathématique. Tous ses rivaux (Hooke, Huygens , etc.) sont relégués à « l'avant Newton », un peu comme après 1905, on parlera de « avant/après Einstein ». Mais cela est, à l'instar d'Einstein, à nuancer et Newton reprendra à son compte une parole de Nicole Oresme : « Si j'ai pu voir un peu au-delà, c'est que j'étais porté par des épaules de géants ». Il est clair que la loi en $1/r^2$ est déjà connue de Hooke, Halley , etc, mais personne ne l'a énoncée ainsi.

Les Principia sont très difficiles à lire : il fallait pour suivre le cheminement de la pensée de Newton comprendre « l'ultime raison », le 0/0 du calcul infinitésimal. Évidemment, en tant qu'inventeur du calcul infinitésimal, Newton possédait une certaine avance sur ses contemporains.

D'autre part, Newton franchit un Rubicon qui provoquera les tollés de l'élite scientifique de l'époque. Explicitement, il rétablit en physique cette chose « interdite » depuis Aristote : l'action instantanée à distance. Les cartésiens refuseront cela, et le temps de réception des travaux de Newton en France et en Allemagne sera très long (presque 30 ans). Newton lui-même a essayé de trouver la cause de la gravitation, en vain.

Vers 1900, on sait qu'il reste à expliquer un résidu dans la précession de la trajectoire de la planète Mercure autour du Soleil. Einstein expliquera ces fameuses 43 secondes d'arc par siècle, en inventant sa théorie de la gravitation appelée relativité générale en 1915. La loi de Newton n'était qu'une approximation (très bonne) de la réalité, mais incapable de s'appliquer aux trous noirs, ou à la « chute de la lumière ».

On découvrira ainsi qu'il existe trois autres forces fondamentales en physique :
– la force électromagnétique (courants électriques, aimants,...),
– l'interaction faible,
– l'interaction forte (cohésion des noyaux).

ces trois dernières forces fondamentales pouvant, à ce jour, être unifiées via certaines théories modernes.

D'une façon générale il est naturel en physique de chercher à unifier la description des interactions. James C. Maxwell le premier a effectué l'unification des phénomènes magnétique et électriques avec sa théorie de l'électromagnétisme. Avec l'avènement de la mécanique quantique et le développement de la version quantique de l'électromagnétisme appelée électrodynamique quantique il a été possible de mélanger cette dernière avec l'interaction faible plus récemment découverte au sein de la théorie électrofaible. La découverte par la suite de la chromodynamique quantique expliquant la structure du noyau atomique en terme des quarks sera alors la dernière pièce de l'édifice constitué par le modèle standard qui incorpore les trois interactions dans une théorie unifiée.

4.3 Lois de Kepler et applications de la dynamique

Johannes Kepler (ou Keppler), né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt, près de Stuttgart (Allemagne) et mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne en Bavière, est un astronome célèbre pour avoir étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic mais surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournaient pas en cercle parfait autour du Soleil mais en suivant des ellipses. Il a découvert les relations mathématiques (dites Lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leurs orbites. Ces relations sont fondamentales car elles furent plus tard exploitées par Isaac Newton pour élaborer la théorie de la gravitation universelle. Notons toutefois, que si Kepler avait vu juste quant à la forme des orbites planétaires, il expliquait les mouvements des planètes non pas par la gravité mais par le magnétisme. Il a enfin accordé une attention majeure à l'optique en synthétisant en 1604 les principes fondamentaux de l'optique moderne comme la nature de la lumière, la chambre obscure, les miroirs (plans et courbes), les lentilles ou la réfraction.

Kepler naît au sein d'une famille de religion protestante luthérienne, installée dans la ville de Weil-der-Stadt en Allemagne (Baden-Württemberg). Né prématurément à sept mois et hypocondriaque de nature chétive, il souffrit toute sa vie d'une santé fragile. À l'âge de trois ans, il contracte la petite vérole, ce qui, entre autres séquelles, affaiblira sévèrement sa vue.

Kepler vécu dans une famille peu ordinaire dont l'ambiance n'est pas des plus saines. Son père, Heinrich Kepler, était mercenaire dans l'armée du Duc de Württemberg et, toujours en campagne, était rarement présent à son domicile. Sa mère, Catherine, qu'il qualifie même de « petite, maigre, sinistre et querelleuse », fut élevée par une tante qui finit sur le bûcher pour sorcellerie. Kepler eut deux autres cadets : Margarette, sa soeur, avec qui il resta proche, et Christopher, qui lui fut toujours antipathique. De 1574 à 1576, il vécut avec son petit frère Heinrich, épileptique, chez ses grands-parents alors que son père était en campagne et sa mère partie à sa recherche.

Au retour de ses parents, Kepler déménage à Léonberg et entre à l'école latine en 1577. Ses parents lui font découvrir l'astronomie. Ainsi, en 1577 sa mère l'emmène en haut d'une colline pour observer le passage d'une comète. Son père quant à lui, lui montre l'éclipse de Lune le 31 janvier 1580 et comment celle-ci devint toute rouge. Kepler étudia plus tard ce phénomène et l'expliqua dans l'un de ses ouvrages sur l'optique. À nouveau parti en guerre en 1589, son père disparaît à jamais.

Alors que Kepler projetait de devenir ministre luthérien, l'école protestante de Graz demande un professeur de mathématiques. Il abandonne alors ses études en théologie pour prendre le poste et quitte Tübingen en 1594. À Graz, Il publie des almanachs avec des prédictions astrologiques, qui se réalisent, bien qu'il refusait certains de ses préceptes. À l'époque, la distinction entre science et croyance n'était pas encore clairement établie et le mouvement des astres, encore assez méconnu, était gouverné par des lois divines.

En 1615, sa mère, alors âgée de 68 ans, est accusée de sorcellerie. Kepler, persuadé de son innocence, va passer six années à assurer sa défense auprès des tribunaux et écrire de nombreux plaidoyers. Il dut, à deux reprises, retourner dans le Wurtemberg. Elle passa une année enfermée dans la tour de Güglingen aux frais de Kepler ayant échappé de peu à la torture. Finalement, elle fut acquittée le 28 septembre 1621. Affaiblie par ces dures années de procès et d'emprisonnement, elle meurt six mois plus tard.

Kepler meurt en 1630 à Ratisbonne, à l'âge de 59 ans.

En astronomie, les lois de Kepler décrivent les propriétés principales du mouvement des planètes autour du Soleil, sans les expliquer. Elles ont été découvertes par Johannes Kepler à partir des observations et mesures de la position des planètes faites par Tycho Brahé, mesures qui étaient très précises pour l'époque.

Copernic avait soutenu en 1543 que les planètes tournaient autour du Soleil, mais il les laissaient sur les trajectoires circulaires du vieux système de Ptolémée hérité de l'antiquité grecque.

Les deux premières lois de Kepler furent publiées en 1609 et la troisième en 1618. Les orbites elliptiques, telles qu'énoncées dans ses deux premières lois, permettent d'expliquer la complexité du mouvement apparent des planètes dans le ciel sans recourir aux épicycliques du modèle ptoléméen.

Peu après, Isaac Newton découvrit en 1687 la loi de l'attraction gravitationnelle (ou gravitation), induisant celle-ci, par le calcul, les trois lois de Kepler.

Première loi : Loi des orbites

Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est un foyer.

Dans le référentiel héliocentrique, le Soleil occupe toujours l'un des deux foyers de la trajectoire ellip-

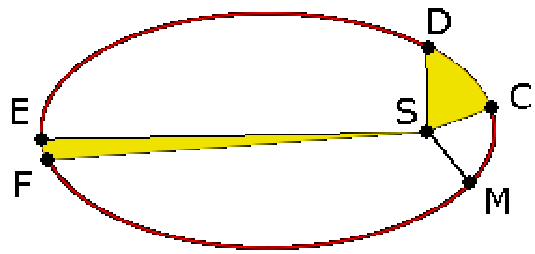


FIGURE 4.3 – Illustration de la seconde loi de Kepler.

tique des planètes qui gravitent autour de lui. À strictement parler, c'est le centre de masse qui occupe ce foyer. La plus grande différence est atteinte avec Jupiter qui, du fait de sa masse importante, décale ce centre de masse de 743 075 km, soit 1,07 rayons solaires. Des déplacements plus importants peuvent être obtenus en cumulant les effets des planètes sur leur orbite. À l'exception de Mercure, les ellipses que décrivent les centres de gravité des planètes ont une très faible excentricité orbitale, et leur trajectoire est quasi-circulaire.

De cette première loi, on déduit par le calcul que le soleil exerce sur une planète une force centripète.

Seconde loi : Loi des aires

Si S est le Soleil et M une position quelconque d'une planète, l'aire balayée par le segment $[SM]$ entre deux positions C et D est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions E et F si la durée qui sépare les positions C et D est égale à la durée qui sépare les positions E et F. La vitesse d'une planète devient donc plus grande lorsque la planète se rapproche du soleil. Elle est maximale au voisinage du rayon le plus court (périhélie), et minimale au voisinage du rayon le plus grand (aphélie).

De cette deuxième loi, on déduit que la force exercée sur la planète est constamment dirigée vers le soleil.

Troisième loi : Loi des périodes

Le carré de la période sidérale T d'un objet (temps entre deux passages successifs devant une étoile lointaine) est directement proportionnel au cube du demi-grand axe a de la trajectoire elliptique de la planète :

$$\frac{T^2}{a^3} = k \quad \text{, avec k constant.}$$

De cette troisième loi, on déduit qu'il existe un facteur constant entre la force exercée et la masse de la planète considérée, qui est la constante de gravitation universelle, ou constante gravitationnelle.

Cette formule avec celles de l'ellipse permettent de calculer les différents paramètres d'une trajectoire elliptique à partir de très peu d'informations. En effet, Johann Lambert (1728 - 1777) montra que la connaissance de trois positions datées permettaient de retrouver les paramètres du mouvement (pour une discussion plus approfondie, voir Lois de Kepler, démonstration ; puis satellites, orbitographie).

4.3.1 Forme newtonienne de la troisième loi de Kepler

Newton comprit le lien entre les lois de la mécanique classique et la troisième loi de Kepler. Il en déduit la formule suivante :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathrm{G}(m_1 + m_2)} a^3$$

où :
- T, période de l'objet,
- a, demi grand axe de la trajectoire elliptique,
- G, Constante gravitationnelle,
- m_1, masse de l'objet 1,
- m_2, masse de l'objet 2.

Les lois de Kepler ne sont pas seulement applicables aux planètes mais à chaque fois qu'une masse se déplace dans l'espace en orbite autour d'une autre masse. C'est le cas, par exemple, de la Lune et de la Terre ou d'un satellite en orbite autour de celle-ci.

Cette loi n'est cependant applicable que pour des masses importantes suffisamment éloignées. Ainsi, pour le déplacement d'un électron autour du noyau d'un atome, on entre dans le domaine de la physique quantique, qui n'obéit pas aux mêmes lois (celui-ci est beaucoup plus influencé par l'attraction électrostatique que par les forces gravitationnelles).

4.3.2 Application : Découverte de nouveaux corps célestes

Johannes Kepler découvrit ses lois grâce à un travail d'analyse considérable des tables astronomiques établies par Tycho Brahé. En particulier l'étude de Mars lui permit de montrer que le mouvement n'était pas épicyclique mais elliptique.

Ses lois ont permis, elles-mêmes, d'affiner les recherches astronomiques et de mettre en évidence des irrégularités de mouvements de corps connus, par une étonnante progression de l'analyse.

L'exemple le plus spectaculaire fut celui des irrégularités d'Uranus qui permit la « découverte » de Neptune par Le Verrier (1811 - 1877), par le calcul : découverte confirmée par l'observation de Galle (1812 - 1910) en 1846.

Chapitre 5

Travail, puissance, énergie

Dans le sens commun l'énergie désigne tout ce qui permet d'effectuer un travail, fabriquer de la chaleur, de la lumière, de produire un mouvement.

En physique, c'est une grandeur scalaire, exprimée en $\frac{kg\ m^2}{s^2}$ (Joules). L'énergie est la mesure unifiée des différentes formes de mouvement.

5.1 Travail

Le mot travail vient du bas latin tripalium (VI^e siècle) instrument de torture formé de trois pieux. Trois bâtons, deux verticaux et un placé en transversale auquel on attachait les esclaves pour les punir, ou les animaux pour les ferrer ou les soigner. Le mot subit une altération sous l'influence de la famille de trabs, trabis : poutre. (travée)

Au XII^e siècle : Travail = Tourment, souffrance. Travailler = Tourmenter, souffrir. Il désigne ce qu'endure la femme dans l'enfantement.

Au XVI^e siècle : « Se donner de la peine pour ... » Le mot travail est aussi associé à Adam et Ève : le travail serait une sorte de condamnation divine pour avoir tenté de goûter au fruit de la connaissance.

En anglais, travail a donné les mots travel - to travel (voyage - voyager) aux débuts du XIV^e siècle, reflétant certainement la difficulté de se déplacer au Moyen-Age.

Le travail d'une force est l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace (l'objet subissant la force se déplace ou se déforme). Si par exemple on pousse une voiture, le travail de la poussée est l'énergie produite par cette poussée. Le travail est exprimé en joules (J), et est souvent noté W, initiale du mot anglais *Work* qui signifie travail.

Une force constante $\vec{F}$ qui s'applique sur un objet parcourant un trajet rectiligne $\vec{r}$ fournit une énergie, un travail W

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{r}}$$

où $\vec{F} \cdot \vec{r}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{r}$.

On remarque que seule la composante de $\vec{F}$ qui est parallèle à $\vec{r}$ travaille (propriété du produit scalaire : le produit scalaire de 2 forces orthogonales est nul).

Si la force change au cours du trajet, ou si le trajet n'est pas rectiligne, on se ramène à une courte durée dt pendant laquelle la force peut être supposée constante et le trajet parcouru $d\vec{u}$ est considéré comme rectiligne (tangent à la courbe) ; ce travail élémentaire est noté δW et vaut :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

On peut alors obtenir le travail total fourni par la force $\vec{F}$, en sommant les travaux sur la trajectoire C parcourue par le point d'application de $\vec{F}$:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si la trajectoire est circulaire (par exemple dans le cas où le point d'application d'une force est en rotation autour d'un axe, alors le travail élémentaire du moment résultant vaut $\delta W = \vec{M}_d \cdot d\vec{\theta}$, où $\vec{M}_d$ est le moment de la force par rapport à l'axe, et $d\vec{\theta}$ l'angle parcouru par le solide pendant une courte durée dt.

5.1.1 Cas particuliers

Considérons une force $\vec{F}$ constante s'appliquant sur un objet se déplaçant sur une trajectoire rectiligne. Trois cas particuliers permettent d'illustrer la notion de travail d'une force.

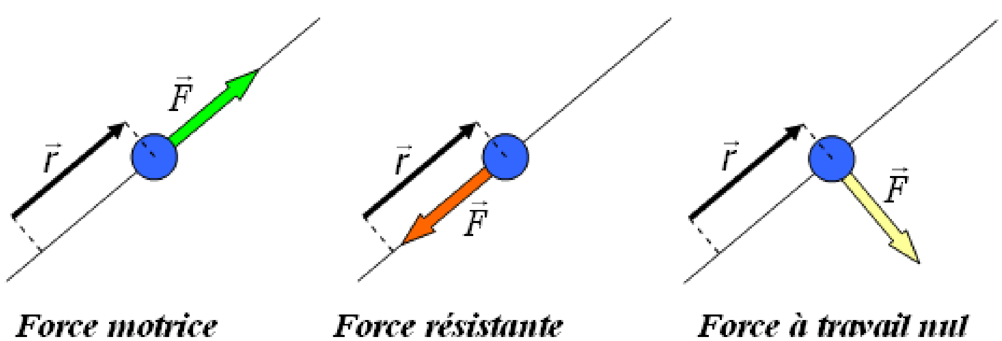


FIGURE 5.1 – Illustration des 3 cas particuliers du travail d'une force.

1. Si la force $\vec{F}$ est parallèle au déplacement $\vec{r}$ et orientée dans le même sens, le travail $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = ||\vec{F}||\ ||\vec{r}||$, fourni par la force est positif : la force a augmenté l'énergie du système, celui-ci se déplace donc plus rapidement. On appelle parfois une telle force, une force motrice.

2. Si la force $\vec{F}$ est parallèle au déplacement $\vec{r}$ mais orientée dans le sens opposé, le travail $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = -||\vec{F}||\ ||\vec{r}||$, fourni par la force est négatif : la force a diminué l'énergie du système, celui-ci se déplace donc plus lentement. On appelle parfois une telle force, une force résistante.

3. Si la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement $\vec{r}$, le travail de la force est nul $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = 0$: la force n'a pas modifié l'énergie du système.

Ce dernier cas ne doit pas laisser penser qu'une force dont le travail est nul n'a aucun effet sur un système. Ainsi, dans le cas d'un solide en mouvement circulaire uniforme, la force centripète a un travail nul. Pour autant, si l'on supprime la force centripète, alors en vertu de la 1^{ere} loi de Newton, le solide cessera son mouvement circulaire et se déplacera en mouvement rectiligne.

La force centripète qui crée l'accélération du même nom est perpendiculaire au mouvement : son travail est nul.

Les forces dont le travail est nul ne modifient pas l'énergie cinétique du solide. En particulier, elles ne modifient pas la norme de la vitesse. Elles peuvent cependant en modifier la direction.

5.2 Energie

Le mot énergie vient du bas latin *energia* qui vient lui-même du grec $\epsilon\nu\epsilon\rho\gamma\epsilon\iota\alpha$ (*energeia*) qui signifie « force en action », par opposition à $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ (*dynamis*) signifiant « force en puissance ».

Après avoir exploité sa propre force, puis celle des esclaves, des animaux et de la nature (les vents et les chutes d'eau), l'homme a appris à exploiter les énergies contenues dans la nature et capables de lui fournir une quantité croissante de travail mécanique par l'emploi de machines : machines-outils, chaudières et moteurs. L'énergie est alors fournie par un carburant ou énergie fossile.

L'énergie est un concept ancien. L'expérience humaine est que tout travail requiert de la force et produit de la chaleur. Plus on « dépense » de force par quantité de temps, plus vite on peut faire un travail, et plus on s'échauffe.

Comme l'énergie est nécessaire à toute entreprise humaine, l'approvisionnement en énergie est devenu une des préoccupations majeures des sociétés humaines.

Un Grec de l'antiquité possédait en moyenne cinq esclaves. Un ménage moderne avec un compteur électrique de 6 kW possède l'équivalent énergétique de 36 esclaves.

5.2.1 Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle gravitationnelle (ou énergie gravitationnelle) est le travail nécessaire pour transporter une masse depuis l'infini jusqu'à sa position finale. En pratique, lorsque nous parlerons d'énergie potentielle, nous considérerons des variations de cette énergie par rapport à une référence arbitraire (en général le sol). De plus, pour la distinguer du cas général du travail d'une force, nous adopterons la notation E_p pour l'énergie potentielle.

Les forces conservatives sont, par définition, des forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi. La force de gravitation en est un exemple.

Considérons un corps de masse m se déplaçant, sans frottements, de $\vec{r}_0$ vers $\vec{r}_f$ dans un repère Oxz, l'axe Oz étant supposé vertical et dirigé dans le sens opposé de la gravité ($\vec{g} = -g\vec{1_z}$). Dans ce cas, le travail du poids vaut

$$W = \vec{G} \cdot \vec{AB} = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$$

Si l'on note $(\Delta r_x, \Delta r_z)$ les coordonnées cartésiennes du vecteur déplacement $\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_0$ dans ce repère alors les coordonnées des vecteurs $\vec{G}$ et $\vec{r}$ dans le repère sont les suivantes :

$$\vec{G} = -mg\vec{1_z} \quad \text{et} \quad \vec{r} = \Delta r_x \vec{1_x} + \Delta r_z \vec{1_z}$$

et, par définition du produit scalaire, le travail du poids se simplifie de la façon suivante, en adoptant la notation $W = E_p$:

$$\boxed{E_p = \vec{G} \cdot \vec{r} = -m\ g\ \Delta r_z}$$

Le travail du poids d'un corps est donc indépendant du chemin suivi lors de son déplacement, il ne dépend que de la variation d'altitude du centre de gravité de ce corps. À ce propos, remarquons que si le corps s'apprête à « tomber » de $\vec{r}_0$ à $\vec{r}_f$, la quantité Δr_z sera négative et l'énergie potentielle E_p positive.

5.2.2 Energie cinétique

L'énergie cinétique E_c (aussi appelée dans les anciens écrits *vis, viva*, ou force vive) est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement. L'énergie cinétique d'un corps est égale au travail nécessaire pour faire passer le dit corps du repos à son mouvement de translation et de rotation actuel.

C'est Guillaume d'Ockham (1280 - 1349) qui a introduit, en 1323, la différence entre ce qu'on appelle le mouvement dynamique (que nous engendrons) et le mouvement cinétique (engendré par des interactions, dont des collisions).

Dans le domaine de validité de la mécanique newtonienne, la notion d'énergie cinétique peut être facilement mis en évidence, pour un corps considéré comme ponctuel (ou point matériel) de masse m constante.

En effet la relation fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m\,\vec{a}$ s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

avec $\vec{F}$ somme des forces appliquées au point matériel de masse m (y compris les forces fictives, dans le cas d'un référentiel non galiléen).

En prenant le produit scalaire membre à membre par la vitesse $\vec{v}$ du corps, il vient :

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

or

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

il vient ainsi :

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

On met en évidence dans le membre de gauche la quantité

$$\boxed{E_c = m\frac{v^2}{2}}$$

appelée énergie cinétique du point matériel, dont la variation est égale à la somme des puissances $\vec{F}\cdot\vec{v}$ des forces appliquées au corps.

Dans le cas d'un corps que l'on ne peut considérer ponctuel, il est possible de l'assimiler à un système (d'une infinité de) points matériels P_i de masses m_i avec $M = \sum_i m_i$ la masse totale du corps.

L'énergie cinétique E_c du système de points peut être alors simplement définie comme la somme des énergies cinétiques associées aux points matériels constituant le système. On a

$$E_c = \sum_i E_{c,i} = \sum_i m_i\frac{v_i^2}{2}$$

Cette expression est générale et ne préjuge pas de la nature du système, déformable ou pas.

Théorème de l'énergie cinétique

Nous allons, ci-dessous, établir la relation entre travail et énergie cinétique.

Soit un mobile de masse m effectue un MRUA d'accélération $\vec{a}$ constante. On a

$$E_c(t) = m\frac{v^2(t)}{2} = m\frac{(\vec{v}_0 + \vec{a}\ t)^2}{2} = m\frac{v_0^2(t)}{2} + m\vec{v}_0 \cdot \vec{a}\ t + m\frac{a^2}{2} = E_{0c} + m\ a\ v_0\ t = ||\vec{F}||\ ||\vec{r}||$$

où $\vec{r}$ est le déplacement du mobile, v_0 sa vitesse initiale et E_{0c} son énergie initiale. Rappellons qu'il s'agit d'un MRUA et, par conséquent, les vecteurs $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ et $\vec{F}$ sont tous parallèles.

Il vient dès lors que, si le travail effectué lors du déplacement du mobile vaut $W = ||\vec{F}||\ ||\vec{r}||$, on a

$$E_c = E_{0c} + W$$

Autrement dit,

L'énergie cinétique finale d'un objet est égale à son énergie cinétique initiale augmentée du travail total réalisé par toutes les forces qui agissent sur cet objet.

Dans le théorème de l'énergie cinétique, W représente le travail réalisé par toutes les forces qui s'exercent sur le mobile (ou l'objet) considéré. Quand les forces gravitationnelles effectuent un travail, on les représentent séparément et on parle alors d'énergie potentielle E_p.

5.2.3 Autres formes d'énergie

L'énergie est un concept créé par les humains pour quantifier les interactions entre des phénomènes très différents ; c'est un peu une monnaie d'échange commune entre les phénomènes physiques. Ces échanges sont contrôlés par les lois et principes de la thermodynamique. L'unité officielle de l'énergie est le Joule.

Lorsqu'un phénomène entraîne un autre phénomène, l'intensité du second dépend de l'intensité du premier. Par exemple, les réactions chimiques dans les muscles d'un cycliste lui permettent de provoquer le déplacement du vélo. L'intensité de ce déplacement (c'est-à-dire la vitesse) dépend de l'intensité des réactions chimiques des muscles du cycliste, qui peuvent être quantifiées (la quantité de sucre « brûlée » par la respiration, le métabolisme du muscle).

Prenons un exemple plus complexe. Un moteur à explosion fonctionne grâce à une réaction chimique : la combustion (ou « explosion ») qui a lieu à l'intérieur d'un cylindre. La réaction du combustible (l'essence) avec le comburant (l'oxygène de l'air) produit du gaz avec émission de chaleur et de lumière, ce qui se traduit par une augmentation de la température et de la pression dans le cylindre ; la différence de pression entre ce gaz et l'atmosphère de l'autre côté du piston déplace ce dernier, qui va, à travers une transmission mécanique, faire tourner les roues ainsi qu'un alternateur qui va produire de l'électricité. Au passage, il y aura des frottements mécaniques qui produiront un échauffement et une usure.

On a donc un réarrangement des molécules (rupture et recréation de liaisons chimiques) qui provoque une augmentation de la quantité de mouvement des molécules (ce qui se traduit par une augmentation de la température du gaz et donc une augmentation de sa pression). Ce dernier provoque le mouvement d'un solide (le piston), qui va entraîner un système de transmission, et pouvoir ainsi d'une part faire tourner un axe, qui peut être par exemple relié aux roues d'une voiture ou bien à un alternateur. L'entraînement de la pièce mobile de cet alternateur va faire tourner un aimant qui, par induction au sein d'une bobine, va provoquer un déplacement d'électrons (courant électrique).

Le concept d'énergie va permettre de calculer l'intensité des différents phénomènes (par exemple la vitesse de la voiture et la quantité d'électricité produite par l'alternateur) en fonction de l'intensité du phénomène initial (la quantité de gaz et la chaleur produite par la réaction chimique de combustion).

Remarques
- Dans les applications grand public, et notamment dans le domaine de la nutrition, on exprime fréquemment l'énergie en calories ; la calorie est en toute rigueur l'énergie qu'il faut fournir pour faire chauffer un gramme d'eau de un degré Celsius, mais les nutritionnistes nomment par simplification « calorie » ce que les physiciens nomment « kilocalorie ».
- En électricité, on utilise le watt-heure (Wh), énergie consommée pendant une heure par un appareil ayant une puissance d'un watt, ou encore son multiple le kilowattheure (kWh) qui vaut 1 000 Wh. Celui-ci n'est pas très éloigné du travail que peut effectuer un cheval en une heure (736 Wh par convention) excepté en termes de coût, car il revient en France en 2005 à 7 centimes d'euro.
- Pour des raisons thermodynamiques (second principe), toute transformation énergétique réelle est irréversible, ce qui veut dire qu'en inversant l'opération (exemple : retransformer en mouvement via un moteur électrique l'énergie produite par la dynamo d'un vélo) on ne retrouve pas la quantité l'énergie consommée au départ. Cela est lié aux pertes.

L'énergie est donc « quelque chose » qui se conserve, ou se transforme, mais qui n'est autre qu'une grandeur physique, numérique, associée à une situation concrète (par exemple, le mouvement d'un corps pour l'énergie cinétique, une interaction pour une forme d'énergie potentielle, etc.). C'est par le nombre que la notion d'énergie atteint un degré d'objectivité adéquat en physique moderne.

En pratique, on distingue souvent différentes « formes » d'énergie. Toutefois, il faut être conscient que l'énergie sert à mesurer l'intensité d'un phénomène, cette division n'est qu'une manière de faire correspondre l'énergie au phénomène qu'elle mesure. Par ailleurs, cette distinction n'a rien d'absolu, mais dépend uniquement de la position de l'observateur : le principe de relativité s'applique aussi à l'énergie, de sorte que le même phénomène pourra être analysé en terme d'énergie « cinétique », « électromagnétique », ou « potentielle »...

Les formes d'énergie classiquement considérées sont :
- énergie cinétique : l'énergie associée au mouvement d'un corps ou d'une particule ; cela comprend également l'énergie électromagnétique transportée par les photons (lumière, ondes radio, rayons X et γ ...) ou par des particules chargées (énergie électrique) ;
- énergie thermique : l'énergie cinétique d'un ensemble au repos ;

- on peut dire que les autres types d'énergie sont des énergies potentielles : moyennant un petit changement, possible sans travail, un système instable se transforme en un système plus stable, avec dégagement de la différence d'énergie entre les deux systèmes (le plus stable ayant une énergie moindre) :

  - énergie potentielle mécanique (énergie potentielle de gravité ou énergie potentielle élastique) qui forme avec l'énergie cinétique ce qu'on appelle l'énergie mécanique ;
  - énergie potentielle chimique ;
  - énergie potentielle électromagnétique (énergie potentielle électrostatique ou magnétostatique) : position instable d'une ou plusieurs particule(s) chargée(s) dans un champ électromagnétique, par exemple l'énergie stockée dans un condensateur ou dans une bobine électrique ;
  - chaleur latente ;
  - énergie libre.

  - énergie fatale : c'est l'énergie inéluctablement présente ou piégée dans un processus ou un produit, qui parfois et pour partie peut être facilement récupérée et valorisée.

    Exemple : La France produisait dans les années 2000 plus de 25 millions de t/an de déchets ménagers dont 40 %, suite à des retards dans la mise en place du recyclage étaient encore traités par incinération. Le pouvoir calorifique de ces déchets est une forme d'énergie fatale. Sans récupération (récupération de chaleur, méthane, hydrogène et/ou électricité, etc, éventuellement avec co-ou tri-génération, cette énergie serait perdue dans l'environnement (dans les décharges) ou rejetée dans l'atmosphère. La combustion de déchets peut produire de la vapeur qui peut alimenter des serres, des usines ou un réseau urbain de chaleur. La méthanisation des déchets organiques peut produire de substantielles quantités de méthane, et un compost valorisable en agriculture.

Dans la théorie de la relativité, Einstein établit l'existence de deux formes d'énergie seulement :
- énergie cinétique de translation ;
- énergie de masse : masse et énergie au repos sont équivalentes (le fameux $E = mc^2$). Cette forme d'énergie inclut toutes les formes d'énergies précédentes dans la vision classique : un apport d'énergie « classique », telle que la tension d'un arc, augmente la masse du système de façon généralement infime, sauf dans le cadre des réactions nucléaires. Par exemple, lors de fission nucléaire, la masse totale de matière diminue légèrement. La masse « manquante », immatérielle, est sous forme d'énergie cinétique des particules ou énergie thermique. Dans les centrales nucléaires, cette énergie thermique est ensuite récupérée pour la production d'électricité.

5.3 Puissance

En physique, la puissance est la quantité d'énergie par unité de temps fournie par un système à un autre. La puissance correspond donc à un débit d'énergie : deux systèmes de puissances différentes pourront fournir le même travail (la même énergie), mais le système le plus puissant sera le plus rapide.

Dans certains cas, il faut une grande puissance au démarrage (grande energie sur une courte durée), donc seuls les systèmes puissants peuvent faire fonctionner le dispositif. C'est notamment le cas lorsqu'il faut vaincre un frottement sec ou bien lorsqu'il y a un effet de seuil (comme par exemple la vitesse minimale de décollage d'un avion ou d'une fusée). Une rame de métro nécessitera une puissance d'environ 1 MegaWatt pour se lancer, et 10 à 15 fois moins pour maintenir sa vitesse de croisière.

La puissance est toujours égale au produit d'une grandeur d'effort (force, couple, pression, tension, ...) par une grandeur de flux (vitesse, vitesse angulaire, débit, intensité du courant, ...)

L'unité de puissance du SI est le *watt*, noté W, qui correspond à un joule fourni par seconde.

Les factures d'électricité sont exprimées en kMh (kilowatt-heure). Il s'agit d'une unité d'énergie qui équivaut à

$$1\ kWh = 10^3\ 3600\ Watts.s = 3,6\ 10^6\ J$$

On utilise encore le cheval vapeur dans le cas des moteurs thermiques (1 cv = 736 W environ).

Toujours dans le domaine automobile, la puissance fiscale, est un paramètre arbitraire défini par l'administration, le rapport avec la puissance réelle n'étant pas univoque. Le calcul prend en compte la cylindrée, le type de carburant, et l'étagement de la boîte des vitesses.

En physique, la puissance moyenne P_m est l'énergie E délivrée par un phénomène divisée par la durée τ de ce phénomène :

$$\boxed{P_m = \frac{E}{\tau}}$$

La puissance instantanée $P(t)$ est la dérivée de l'énergie fournie par rapport au temps :

$$\boxed{P = \frac{dE}{dt}}$$

on a

$$P_m = \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t} P(t)dt$$

Par abus de langage, on attribue la puissance à l'objet qui la transforme en déplacement, lumière, etc. Exemple :

- un moteur de 100 cv

– une lampe de 100 W

5.3.1 Puissance d'une force

Si le point d'application d'une force $\vec{F}$ (en N) se déplace à la vitesse instantanée $\vec{v}$ (en m/s), alors la puissance instantanée vaut (en $Watt$)

$$\boxed{P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t)}$$

On retrouve aisément ce résultat en dérivant le travail d'une force.

5.3.2 Puissance d'un couple

Si l'objet est en rotation sous l'action d'un couple $\vec{C}$ (en Nm) et tourne autour d'un axe parallèle au couple à la vitesse de rotation instantanée $\omega(t)$ (en rad/s), alors la puissance instantanée vaut (en $Watt$)

$$\boxed{P(t) = \omega(t)\ ||\vec{C}||}$$

5.4 Conversion énergie(s) - travail

5.4.1 Loi de conservation

L'énergie est une quantité qui se conserve

La notion de conservation est relativement simple à comprendre.

Si on met dans un volume quelque chose et que l'on ferme bien la boîte, l'on s'attend à y retrouver, lorsqu'on l'ouvrira ultérieurement, ce qu'on y a mis. Ceci en physique s'appelle un principe de conservation ; la boîte est l'ensemble des phénomènes considérés. Si on ne retrouve pas tout, c'est que une partie a pu sortir sous une forme ou une autre ou même que ce qui manque (ou est en plus) a changé de forme et qu'on ne s'en est pas rendu compte. On a en fait « oublié de mettre un élément dans la boîte », on a négligé d'inclure un phénomène dans le système.

Ce principe est tellement fort en physique qu'à chaque fois qu'il a paru ne pas être vérifié cela a conduit à des découvertes importantes. Chaque fois qu'il a semblé que l'énergie n'était pas conservée, il s'agissait en fait de sa transformation en une nouvelle forme. Par exemple, la radioactivité a un temps été interprétée comme la réémission de quelque chose qui était reçu de l'extérieur et l'explication est venue de l'équivalence masse énergie.

L'énergie dans un volume est donc d'office conservée, par principe, et si elle diminue dans le volume, c'est qu'une partie en est sortie... ou qu'elle s'est transformée en quelque chose qu'il nous faut identifier : chaleur, masse, rayonnement, etc. La perte d'énergie, même minime, est fréquemment due à sa transformation en énergie thermique.

On est tenté d'écrire :
« L'énergie se transforme d'une forme en une autre, mais ne disparaît jamais. »

La formulation exacte serait :
« Lorsque l'intensité d'un phénomène varie, cela ne peut se faire que par la variation d'un autre phénomène ; la somme des énergies représentant l'intensité de ces phénomènes est une constante. »

Dans les processus radioactifs, le mouvement de la particule éjectée, ou l'impulsion du photon créé, provient de la disparition de la masse ; on écrit souvent par un raccourci que « l'énergie de masse se transforme en énergie cinétique ».

L'énergie d'une réaction chimique correspond à une variation de masse trop infime pour être mesurable, ce qui a fait croire un temps à la conservation de la masse dans les réactions chimiques. De fait, on considère toujours actuellement que la masse se conserve lors d'une réaction chimique, mais l'on sait que c'est une approximation.

5.4.2 Loi de transformation de l'énergie mécanique

La loi de conservation nous apprend qu'en l'absence de pertes ou d'apport extérieur de travail, l'énergie se conserve. Autrement dit, l'énergie mécanique totale E_0 se conserve. Pour un mobile, nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$E_0 = E_{0c} + E_{0p} = E_c(t) + E_p(t)$$

où
- E_0 est l'énergie mécanique du mobile,
- E_{0c} est l'énergie cinétique initiale du mobile,
- E_{0p} est l'énergie potentielle initiale du mobile,
- $E_c(t)$ est l'énergie cinétique du mobile au temps t,
- $E_p(t)$ est l'énergie potentielle du mobile au temps t,

Remarquons que nous pouvons aussi écrire

$$\boxed{E_c(t_1) + E_p(t_1) = E_c(t_2) + E_p(t_2)}$$

Etant donné que nous avons déjà défini l'énergie potentielle comme étant un travail, l'énergie cinétique comme étant un finalement un travail elle aussi (théorème de l'énergie cinétique), nous nous arrêterons là en ce qui concerne la loi de transformation.

5.5 Application : Exemple de la chute d'un corps

Pour monter debout sur une chaise de 50 centimètres de haut, une personne de masse 80 kg doit effectuer un travail correspondant à celui de son poids ($\vec{G} = m\vec{g}$) sur une distance h de 50 cm, soit un travail de $m.g.h$ où la masse m vaut 80 kg, g est l'accélération de la gravité (10 m/s^2) et h vaut 0,5 m. Le travail effectué, correspondant à l'énergie mécanique dépensée, vaut donc

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = 80.10.0,5 = 400\ J$$

Placée à cette hauteur, nous pouvons dire que l'énergie potentielle E_p de la personne est de 400 J. Si celle-ci chute, sa vitesse (nulle avant la chute) augmentera jusqu'à ce qu'elle touche le sol. Etant donné qu'il y a conservation de l'énergie, nous pouvons dire que l'énergie potentielle de la personne avant la chute sera égale à l'énergie cinétique E_c de la personne juste avant qu'elle ne touche le sol. Autrement dit, de 400 J.

La vitesse de la personne juste avant que celle-ci ne percute le sol nous sera donnée par

$$E_c = m\frac{v^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2\frac{E_c}{m}} = \sqrt{2\frac{400}{10}}\ m/s$$

Autrement dit, dans un cas plus général, nous aurions eu, en considérant $E_p(t_0) = E_c(t_f)$, où t_f est le temps de chute, l'équation

$$v = \sqrt{2\frac{E_c(t_f)}{m}} = \sqrt{2\frac{E_p(t_0)}{m}} = \sqrt{2\frac{m\ g\ h}{m}} = \sqrt{2\ g\ h}$$

Qui est identique à la solution que nous avons obtenu lors de l'étude de la chute d'un corps en cinématique et qui nous assure que la vitesse d'un corps qui chute est indépendante de sa masse.

Pour conclure, si aucun travail extérieur n'est appliqué, nous dirons finalement qu'un mobile
- qui monte, perd de l'énergie cinétique qui se transforme en énergie potentielle
- qui descend, perd de l'énergie potentielle qui se transforme en énergie cinétique

Les théorèmes énergétiques vont donc nous permettre, à l'instar de la dynamique, de résoudre certains problèmes liés aux mouvements de corps massifs.

Chapitre 6

Mécanique relativiste et mécanique quantique

6.1 Mécanique quantique

Fille de l'ancienne théorie des quanta, la mécanique quantique constitue le pilier d'un ensemble de théories physiques qu'on regroupe sous l'appellation générale de physique quantique. Cette dénomination s'oppose à celle de physique classique, celle-ci échouant dans sa description du monde quantifié (découpé en petites parties), microscopique, atomes et particules, ainsi que dans celle de certaines propriétés du rayonnement électromagnétique.

Les principes fondamentaux de la mécanique quantique ont été établis essentiellement entre 1922 et 1927 par Bohr, Dirac, de Broglie, Heisenberg, Jordan, Pauli et Schrödinger. Ils permettent une description complète de la dynamique d'une particule massive non relativiste.

Les principes de base ont été complétés par Bose et Fermi afin d'autoriser la description d'un ensemble de particules identiques, ouvrant la voie au développement d'une physique statistique quantique. Enfin, en 1930, le mathématicien Von Neumann a précisé le cadre mathématique rigoureux de la théorie.

La mécanique quantique fixe un cadre mathématique tout à fait cohérent qui a permis de remédier à tous les désaccords entre certains résultats expérimentaux mis en évidence à la fin du XIX^e siècle et les prédictions théoriques correspondantes de la physique classique.

La mécanique quantique a repris et développé l'idée de dualité onde-corpuscule introduite par de Broglie en 1924 consistant à considérer les particules de matière non pas seulement comme des corpuscules ponctuels, mais aussi comme des ondes, possédant une certaine étendue spatiale. Bohr a introduit le concept de complémentarité pour résoudre cet apparent paradoxe : tout objet physique est bien à la fois une onde et un corpuscule, mais ces deux aspects, mutuellement exclusifs, ne peuvent être observés simultanément[1]. Si l'on observe une propriété ondulatoire, l'aspect corpusculaire disparaît. Réciproquement, si l'on observe une propriété corpusculaire, l'aspect ondulatoire disparaît.

A ce jour, aucune contradiction n'a pu être décelée entre les prédictions de la mécanique quantique et les tests expérimentaux associés. Ce succès a hélas un prix : la théorie repose sur un formalisme mathématique abstrait, qui rend son abord difficile pour le profane.

6.1.1 Paradoxes de la mécanique quantique : le chat de Schrodinger

Les « paradoxes » de la mécanique quantique ne font état d'aucune faille dans la mécanique quantique, mais révèlent au contraire à quel point notre intuition peut se révéler trompeuse dans ce domaine qui ne relève pas directement de l'expérience quotidienne de nos sens.

L'expérience du chat de Schrödinger fut imaginée en 1935 par le physicien Erwin Schrödinger, afin de mettre en évidence des lacunes supposées de l'interprétation de Copenhague de la physique quantique, et particulièrement mettre en évidence le problème de la mesure.

La mécanique quantique est relativement difficile à concevoir car sa description du monde repose sur des amplitudes de probabilité (fonctions d'onde). Ces fonctions d'ondes peuvent se trouver en combinaison linéaire, donnant lieu à des « états superposés ». Cependant, lors d'une opération dite de « mesure » l'objet quantique sera trouvé dans un état déterminé ; la fonction d'onde donne les probabilités de trouver l'objet dans tel ou tel état.

C'est la mesure qui perturbe le système et le fait bifurquer d'un état quantique superposé (atome à la fois intact et désintégré par exemple, mais avec une probabilité de désintégration dans un intervalle de temps donné qui, elle, est parfaitement déterminée) vers un état mesuré. Cet état ne préexiste pas à la mesure : c'est la mesure qui semble le faire advenir.

Toutefois, la notion de mesure ou de bifurcation n'apparaît pas explicitement ni même indirectement dans le formalisme quantique, et les tentatives d'en faire surgir cette notion se heurtent à d'extrêmes difficultés. En conséquence, certains physiciens n'accordent aucune réalité physique au concept de mesure ou d'observation. Pour eux, les états superposés ne s'effondrent (ou ne « bifurquent ») pas, et l'état mesuré n'existe pas réellement (voir par exemple : Hugh Everett).

C'est pour faire apparaître le caractère paradoxal de cette position et pour poser de manière frappante le problème, que Schrödinger a imaginé cette expérience de pensée.

Erwin Schrödinger a donc imaginé une expérience dans laquelle un chat est enfermé dans une boîte fermée avec un dispositif qui tue l'animal dès qu'il détecte la désintégration d'un atome d'un corps radioactif (par exemple : un détecteur de radioactivité type Geiger, relié à un interrupteur provoquant la chute d'un marteau cassant une fiole de poison gazeux).

Si les probabilités indiquent qu'une désintégration a une chance sur deux d'avoir eu lieu au bout d'une minute, la mécanique quantique indique que, tant que l'observation n'est pas faite, l'atome est simultanément dans deux états (intact/désintégré). Or le mécanisme imaginé par Erwin Schrödinger lie l'état du chat (mort ou vivant) à l'état des particules radioactives, de sorte que le chat serait simultanément dans deux états (l'état mort et l'état vivant), jusqu'à ce que l'ouverture de la boîte (l'observation) déclenche le choix entre les deux états. Du coup, on ne peut absolument pas dire si le chat est mort ou non au bout d'une minute.

La difficulté principale tient donc dans le fait que si l'on est généralement prêt à accepter ce genre de situation pour une particule, l'esprit refuse d'accepter facilement une situation qui semble aussi peu naturelle quand il s'agit d'un objet plus familier comme un chat.

Cette expérience n'a jamais été réalisée, car :
- les conditions techniques pour préserver l'état superposé du chat sont très difficiles
- et même si ces conditions sont atteintes, il s'agit d'une pure expérience de pensée, non réalisable même en principe. En effet, on ne pourra jamais mettre en évidence directement, ou mesurer, que le chat est à la fois mort et vivant car le fait d'essayer de connaître son état provoquera nécessairement l'effondrement de la fonction d'onde.

En fait, le but est surtout de marquer les esprits : si la théorie quantique autorise à un chat d'être à la fois mort et vivant, c'est ou bien qu'elle est erronée, ou bien qu'il va falloir reconsidérer tous nos préjugés.

Schrödinger lui-même a imaginé cette expérience pour réfuter l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique, qui conduisait à un chat à la fois mort et vivant. Einstein avait fait la même expérience de pensée avec un baril de poudre. Schrödinger et Einstein pensaient que la possibilité du chat mort-vivant démontrait que l'interprétation de la fonction d'onde par Max Born était incomplète. Nous verrons dans la partie « quelle solution ? » que cette situation souligne bien l'étrangeté de la mécanique quantique, mais ne la réfute pas.

Il est évident que le fait que l'interprétation orthodoxe de la physique quantique mène à un chat à la fois mort et vivant montre que la mécanique quantique obéit à des lois souvent contraires à notre intuition. Pire, on se rend compte que la question n'est pas « comment est-ce possible dans le monde quantique ? » mais « comment est-ce impossible dans le monde réel ? ».

6.2 Mécanique relativiste

On nomme Relativité restreinte une première version de la théorie de la Relativité, émise en 1905 par Albert Einstein, qui ne considérait pas la question des accélérations d'un référentiel, ni les interactions d'origine gravitationnelles. Cependant, elle présentait une explication cohérente des interactions électromagnétiques et de leurs transformations par changement de référentiel à l'aide de la transformation de Lorentz. De plus, elle résolvait des paradoxes existant en mécanique classique relatifs aux mesures de la vitesse de la lumière. Cette théorie a introduit pour la première fois la notion d'espace-temps et expliqué quelques phénomènes étonnants, mais vérifiés expérimentalement, de variation des mesures de longueur et de durée entre un observateur et un autre, chacun d'eux étant situé dans un référentiel différent.

Elle est enseignée dans le cadre de la cinématique en mathématiques et comme introduction à la relativité générale en physique pour sa clarté et sa simplicité. D'autre part, c'est actuellement la seule théorie utilisable pour représenter les effets relativistes en mécanique quantique.

La théorie a été popularisée en science-fiction, notamment en raison du phénomène de dilatation des temps, avec le célèbre paradoxe des jumeaux. Elle a eu également un impact en philosophie en éliminant toute possibilité d'existence d'un temps et de durées absolues dans l'ensemble de l'univers, implicitement admis avant elle.

6.2.1 Dilatation du temps

La dilatation des durées : un phénomène physique durant un intervalle de temps dans un référentiel, dure une quantité différente dans un autre référentiel.

Supposons un intervalle de temps Δt_0 correspondant à l'intervalle entre deux battements de coeur d'un individu, entre deux tocs d'une horloge, immobiles dans le référentiel $\mathbb{R}'$, ce qui veut dire que dans ce référentiel les deux événements (1er battement, 2ème battement,...) ont lieu au même point d'espace de $\mathbb{R}'$. Dans le référentiel $\mathbb{R}$ par rapport auquel se déplace $\mathbb{R}'$, à la vitesse v, le voyageur ou l'horloge se sont déplacés d'une distance $\Delta x = v\ \Delta t$, fournissant une expression de l'intervalle d'espace temps, vu de $\mathbb{R}$. La conservation de l'intervalle d'espace-temps fournit alors :

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ainsi, le même phénomène durant 1 s (par exemple) dans un référentiel où il est au repos est vu durer $\gamma\ s$ dans le référentiel par rapport auquel le sujet du phénomène se déplace à la vitesse v : une horloge qui se déplace apparaît ralentir.

Il faut insister ici sur la signification de la notion de durée entre deux événements dans un référentiel. La méthode de mesure consiste à attribuer comme coordonnée temporelle d'un événement l'instant lu sur l'horloge fixe du référentiel à l'endroit où se passe cet événement. Ainsi la durée la plus courte est-elle celle qui correspond au référentiel associé au phénomène (au voyageur, à son horloge propre) ; elle n'est lue que par l'intermédiaire d'une seule horloge, on lui attribue le nom de durée de temps propre.

Pour tout référentiel par rapport auquel le voyageur se déplace la durée du phénomène demande, pour sa mesure, deux horloges, une à chacun des points du référentiel où se trouvera le voyageur à l'instant initial et à l'instant final. C'est cette durée à laquelle il faut comparer la durée propre.

Les vérifications expérimentales sont nombreuses : durée de vie de muons atmosphériques, durée de vie de particules dans les accélérateurs ... marches des horloges embarquées des satellites (le phénomène sert dans ce cas à séparer des effets de la gravitation).

6.2.2 Contraction des longueurs

La contraction des longueurs dans la direction du déplacement : supposons que dans le référentiel $\mathbb{R}'$ se trouve une règle fixe, de longueur L_0, le long de l'axe $O'x'$, cette longueur mesurée sur les règles étalons associées au référentiel dans lequel la règle est fixe est la longueur propre de la règle.

Dans le référentiel $\mathbb{R}$, par rapport auquel la règle se meut, la mesure demande aussi la définition d'une méthode, acceptable pour tous les référentiels. On appellera longueur de la règle mobile la distance entre les points de $\mathbb{R}$ qui coïncideront avec les extrémités de la règle, au même instant de $\mathbb{R}$, choisi arbitrairement.

Cette méthode appliquée à partir des relations de transformation fournit :

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

La longueur de la règle mobile est donc plus courte (que sa longueur propre) dans tout référentiel par rapport auquel elle se meut.

Les vérifications expérimentales sont un peu différentes que celles citées plus haut : dans le référentiel des muons traversant l'atmosphère à grande vitesse, c'est l'atmosphère qui se meut, mais de plus l'épaisseur d'air traversée n'est plus quelques kilomètres, mais quelques centaines de mètres...

Cette contraction avait été envisagée, avant Einstein, par Fitzgerald, et soutenue ensuite par Poincaré.

6.2.3 Relativité de la simultanéité : le paradoxe du train

La relativité de la simultanéité : la modification des valeurs des durées entre deux événements lors du passage d'un référentiel à l'autre devient spectaculaire dans le cas d'événements simultanés. La relativité, via la possibilité de synchronisation des horloges fixes dans un référentiel donné, limite la notion de simultanéité à l'intérieur d'un référentiel galiléen. C'est d'ailleurs ce qui a permis de définir la méthode de mesure de distance ci-dessus.

Deux événements simultanés dans $\mathbb{R}$, en deux points de $\mathbb{R}$ différents, ne sont plus simultanés dans tout autre référentiel en mouvement par rapport à $\mathbb{R}$. On insistera sur le fait que de tels événements sont ailleurs l'un de l'autre et que, donc, ils ne sont pas cause-effet l'un de l'autre.

On considère un train et un tunnel de chemin de fer qui ont (dans le même référentiel) la même longueur.

Ce tunnel est équipé de deux détecteurs, un à l'entrée, appelons-le E et l'autre à la sortie, on l'appelle S, et le train s'apprête justement à le traverser. Il est très rapide et se déplace à une vitesse proche de celle de la lumière. Le détecteur S émet un signal lumineux lorsque l'avant du train sort du tunnel. Le détecteur E quant à lui émet un signal lumineux lorsque l'arrière du train entre dans le tunnel.

Un observateur placé en bordure de voie et précisément à égale distance des deux détecteurs voit le train traverser le tunnel et constate que

1. E a émis un signal avant S. Il en déduit donc que le train est plus court que le tunnel ;
2. le train mettra 2 secondes pour arriver à sa destination en continuant à cette allure.

Pourtant, après être arrivé à destination, il rencontre un passager du train qui lui affirme que :

1. Au contraire, c'est S qui a émis un signal avant E et que c'est bien naturel car le train était plus long que le tunnel d'après lui ;
2. le train, gardant sa vitesse pratiquement jusqu'à la gare, est arrivé à destination en 1 seconde.

Qui s'est trompé ? Personne. La relativité restreinte affirme que la distance, la durée et la simultanéité sont relatives, à savoir qu'elles varient d'un référentiel à l'autre.

Ainsi le train paraît-il plus court pour un observateur placé dans le référentiel du tunnel, alors que c'est le tunnel qui paraît plus court pour un observateur assis dans le train, et tout cela par le simple fait que les deux observateurs ont des notions très différentes de la simultanéité des deux événements E et S.

Ce paradoxe est confirmé par l'expérience. Par exemple, pour un observateur immobile, une particule instable (comme un élément radioactif) met en moyenne plus de temps à se désintégrer dans un accélérateur de particule que lorsqu'elle est au repos.

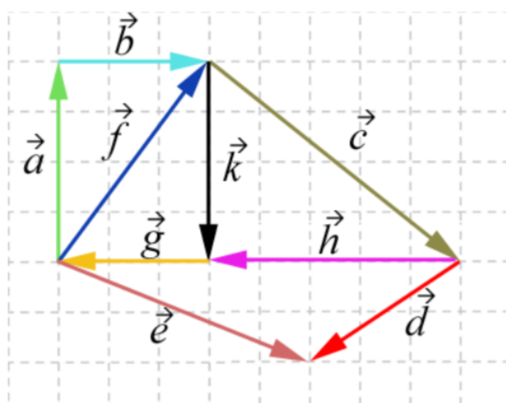
Chapitre 7

Exercices

7.1 Calcul vectoriel

7.1.1 Les bases

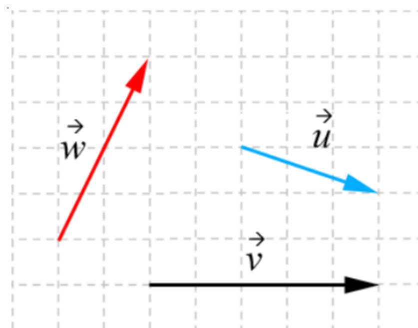
Exercice 1 : équations vectorielles simples



1. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$
2. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{c} + \vec{h} + \vec{g}$
3. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{c} + \vec{h}$
4. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{k} + \vec{g}$
5. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{h}$
6. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{c} - \vec{k}$
7. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} + \vec{b} = \vec{f}$
8. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} + \vec{d} = \vec{e}$
9. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} - \vec{f} = \vec{b}$
10. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{h} + \vec{g} - \vec{x} = \vec{d}$
11. Exprimer $\vec{c}$ par rapport à $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$
12. Exprimer $\vec{g}$ par rapport à $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{k}$
13. Exprimer $\vec{e}$ par rapport à $\vec{d}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$
14. Exprimer $\vec{e}$ par rapport à $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$

Exercice 2 : combinaisons linéaires

Utiliser les vecteurs de la figure ci-dessus pour dessiner, sur une feuille quadrillée, les vecteurs suivants :



$\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{v}$, $3\vec{v}$, $4\vec{w}$, $\vec{v}-\vec{w}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $3(\vec{v}+\vec{u})-2\vec{w}$ et $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$

Exercice 3 : relation de Chasles

Soient A, B, C, D et E cinq points quelconques. Simplifier au maximum les expression suivantes (sans faire de dessin).

$$\vec{a}=\vec{BC}+\vec{DE}+\vec{DC}+\vec{AD}+\vec{EB} \qquad \vec{b}=\vec{AC}-\vec{BD}-\vec{AB} \qquad \vec{c}=\vec{EC}-\vec{ED}+\vec{CB}-\vec{DB}$$
$$\vec{d}=3\vec{AB}+2\vec{BC}-\vec{DB} \qquad \vec{e}=7\vec{AC}+2\vec{CD}+3\vec{AD} \qquad \vec{f}=3\vec{AD}-2\vec{ED}+\vec{DC}+2\vec{EA}-\vec{AC}$$

Exercice 4 : relation de Chasles

Soient trois points A, B et C non alignés. Soit le point G défini par la relation $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a la relation $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=3\vec{MG}$.

Exercice 5 : norme et vecteurs définis par les coordonnées de deux points

Soit le vecteur $\vec{PQ}$ ayant comme départ le point P et comme arrivée le point Q. Donner les composantes de $\vec{PQ}$ sous la forme (v_x, v_y) et calculer sa norme $||\vec{PQ}||$.

1. $P(0,0)$ et $Q(3,4)$
2. $P(3,2)$ et $Q(5,6)$
3. $P(-2,-1)$ et $Q(6,-2)$
4. $P(-3,7)$ et $Q(0,0)$

Exercice 6 : norme

1. Que vaut la norme d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(3,4)$?
2. Que vaut la norme d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$?
3. Trouver un vecteur $\vec{v}$ dont la norme est égale à 13 et dont la composante dans la direction x vaut 4.
4. Trouver un vecteur $\vec{v}$ dont la norme est égale à 6 et dont la composante dans la direction y vaut 3.
5. Trouver un vecteur $\vec{v}$ dont la norme est égale à 4 et dont la composante dans la direction x est deux fois plus grande que la composante dans la direction y.
6. Trouver un vecteur $\vec{v}$ de direction $(-1,3)$ et dont la norme vaut 8.

7. Trouver un vecteur $\vec{v}$ incliné de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'horizontale et dont la norme vaut 7.

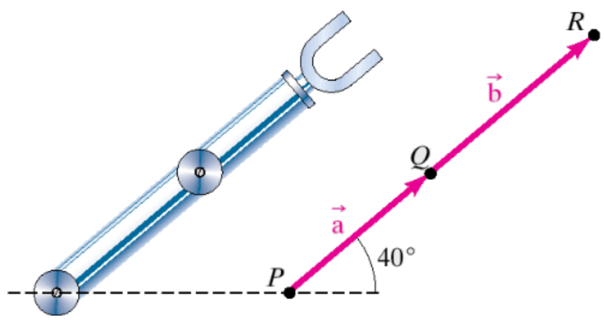
Exercice 7 : récapitulatif

Soit $\vec{v}(3,-5)$ et $\vec{w}(-2,3)$. Calculer

1. $\vec{v}+\vec{w}$
2. $\vec{w}-\vec{v}$
3. $-5\vec{v}$
4. $||\vec{v}||$
5. $2\vec{v}+3\vec{w}$
6. $3\vec{v}-2\vec{w}$
7. $||\vec{v}-\vec{w}||$
8. $||\vec{v}||-||\vec{w}||$
9. le vecteur unité $\vec{1_v}$

7.1.2 Problèmes

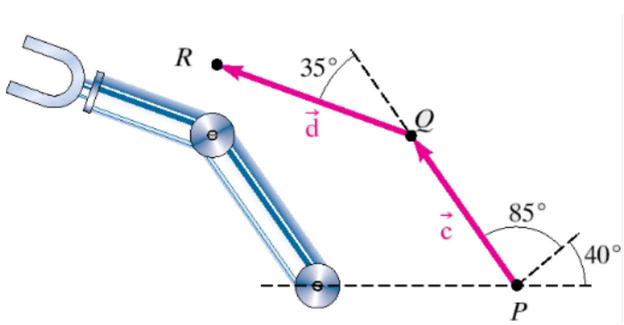
Exercice 1



La figure ci-dessus représente le bras d'un robot. Ce bras peut pivoter aux articulations P et Q. Le bras supérieur (représenté par $\vec{a}$) fait $37,5\ cm$ de long et l'avant-bras, y compris la main (représenté par $\vec{b}$), a une longueur de $42,5\ cm$. Calculer les coordonnées du point R situé sur la main.

Exercice 2

Partant de la figure de l'exercice précédent, le bras est pivoté de 85^o et l'avant-bras de 35^o, comme présenté dans la figure ci-dessous. Calculer les nouvelles coordonnées de R.



Exercice 3

Si le vent souffle à 20 km/h dans la direction de 40^o vers l'ouest par rapport au nord, exprimer sa vitesse par un vecteur $\vec{v}$ dans le système d'axes défini par Ox dans la direction est et Oy dans la direction nord.

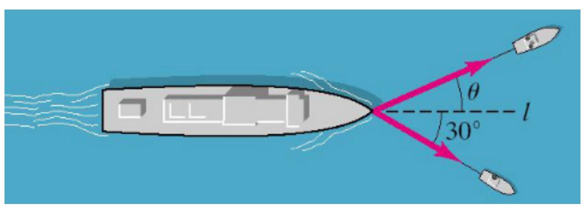
Exercice 4

D'après ses instruments de bord, un avion se déplace à 500 km/h dans la direction est. Si le vent souffle à une vitesse de 60 km/h dans la direction nord-ouest, déterminer (la norme de) la vitesse de l'avion par rapport au sol.

Exercice 5

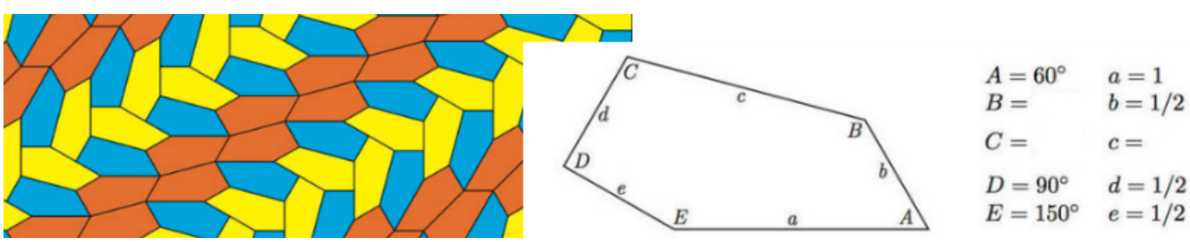
Vu du sol, un avion se déplace vers le nord-ouest à une vitesse constante de 250 miles par heure. Sachant qu'il est poussé par un vent d'est de 50 miles par heure, quelle serait la vitesse de l'avion s'il n'y avait plus de vent ?

Exercice 6



Deux remorqueurs amènent un navire dans un port. Le remorqueur le plus puissant génère une force de 16000 N. Le navire suit une ligne droite l. Calculer l'angle que forme le plus puissant remorqueur avec la droite l.

Exercice 7



Un nouveau type de pentagone pouvant paver le plan a été découvert en 2015. Que valent les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$? Quelle est la longueur du côté c ?

7.1.3 Produit scalaire et vectoriel

Exercice 1 : les bases du produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{v}(2,-3)$ et $\vec{w}(5,3)$. Calculer en utilisant le produit scalaire

1. $\vec{v}\cdot\vec{w}$
2. $\vec{w}\cdot\vec{v}$
3. $\vec{v}\cdot\vec{v}$
4. $\vec{w}\cdot\vec{w}$
5. $||\vec{v}||$
6. $||\vec{w}||$

Exercice 2 : problème

Un bateau veut atteindre le point de la rive opposée situé exactement en face de lui. La vitesse du courant est de 3 km/h. Le bateau est capable de maintenir une vitesse constante de 20 km/h. Selon quel angle par rapport à la ligne directe doit être dirigé le bateau pour qu'il atteigne son objectif ?

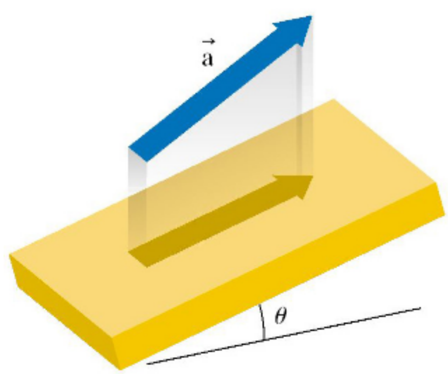
Si la rivière a une largeur de 0,5 km, combien de temps durera la traversée ?

Exercice 3 : perpendicularité

Trouver v_x tel que $\vec{v}(v_x,-1)$ et $\vec{w}(2,3)$ soient perpendiculaires.

Exercice 4 : application du produit scalaire

On utilise le calcul vectoriel en informatique pour calculer la longueur des ombres sur les surfaces plates. On peut représenter la longueur des objets par le vecteur $\vec{a}$. Sur la figure ci-dessous, une source lumineuse éclaire un objet et projette son ombre sur le sol verticalement. Le sol forme un angle θ avec l'horizontale.



Calculer la longueur de l'ombre sur le sol pour

1. $\vec{a}(3;5),\ \theta=0^o$ 2. $\vec{a}(25,7;-3,9),\ \theta=12^o$ 3. $\vec{a}(-13,8;19,4),\ \theta=-17^o$

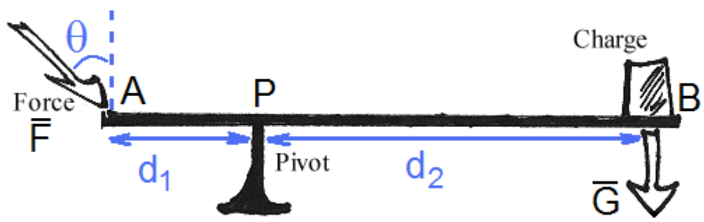
Exercice 5 : les bases du produit vectoriel

Calculer $||\vec{a}\times\vec{b}||$ si $||\vec{a}||=6$, $||\vec{b}||=5$ et l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut 30^o.

Exercice 6 : produit vectoriel et produit scalaire

Que vaut la norme du produit vectoriel $\vec{v}(2,-3) \times \vec{w}(5,3)$?

Exercice 7 : introduction à la statique



Le dispositif ci-dessus présente les dimensions suivantes : $d_1 = 20\ cm$, $d_2 = 65\ cm$. Le poids $\vec{G}$ de la charge vaut 50 N et la force $||\vec{F}|| = 350\ N$.

1. Calculer la norme du produit vectoriel $||\vec{PB} \times \vec{G}||$.
2. Calculer la norme du produit vectoriel $||\vec{PA} \times \vec{F}||$ avec $\theta = 0$.
3. Que devrait valoir l'angle θ pour que ces deux normes $||\vec{PB} \times \vec{G}||$ et $||\vec{PA} \times \vec{F}||$ soient égales ?

7.1.4 Exercices récapitulatifs et de drill

Exercice 1 : combinaisons linéaires et produit scalaire

Soient 2 vecteurs $\vec{a} \equiv (-6,0)$ et $\vec{b} \equiv (3,4)$. Calculer et illustrer graphiquement

1. $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$, $2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{a}$
2. les normes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$
3. l'angle compris entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, entre $\vec{a}$ et $\vec{a}+\vec{b}$, entre $\vec{b}$ et $\vec{a}+\vec{b}$, entre $\vec{a}+\vec{b}$ et $\vec{a}-\vec{b}$, entre $\vec{a}-\vec{b}$ et $\vec{b}-\vec{a}$

Exercice 2 : projections orthogonales

Soient 2 vecteurs $\vec{a} \equiv (-6,0)$ et $\vec{b} \equiv (3,4)$. Calculer les projections orthogonales suivantes et illustrer graphiquement

1. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sur l'axe Ox
2. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sur l'axe Oy
3. $\vec{a}$ sur $\vec{b}$
4. $\vec{b}$ sur $\vec{a}$
5. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sur la droite d'équation $d \equiv y = 2x+3$
6. $\vec{a}+\vec{b}$ sur l'axe Ox

7. $\vec{a}+\vec{b}$ sur l'axe Oy
8. $\vec{a}+\vec{b}$ sur la droite d'équation $d \equiv y = 2x+3$
9. $\vec{a}+\vec{b}$ sur la droite d'équation $d \equiv y = -x+1$

Exercice 3 : produit scalaire

Soient les vecteurs $\vec{u} \equiv (2,3)$, $\vec{v} \equiv (-4,5)$, $\vec{w} \equiv (2,-4)$, $\vec{x} \equiv (1,0)$, $\vec{y} \equiv (0,1)$ et $\vec{z} \equiv (1,1)$. Calculer

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $\vec{w}\cdot\vec{x}$, $\vec{x}\cdot\vec{y}$, $\vec{y}\cdot\vec{z}$, $\vec{z}\cdot\vec{u}$
2. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$, $(\vec{u}+\vec{w})\cdot\vec{v}$, $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}$, $(\vec{w}-\vec{u})\cdot\vec{w}$, $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{z})$, $(\vec{u}-\vec{z})\cdot(\vec{z}-\vec{u})$, $(\vec{w}+\vec{v})\cdot(\vec{v}+\vec{z})$, $(\vec{u}+\vec{w})\cdot(\vec{z}-\vec{y})$

Exercice 4 : vecteurs unitaires

Sachant que $\vec{a} \equiv (-6,0)$ et $\vec{b} \equiv (3,4)$. Calculer

1. $\vec{1_a}$ et $\vec{1_b}$
2. le vecteur unitaire correspondant à $2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$
3. le vecteur unitaire $\vec{1_v}$ correspondant à $\vec{v} \equiv (\sin\theta, \cos\theta)$

Exercice 5 : produit vectoriel et produit scalaire

Soient les vecteurs $\vec{u} \equiv (2,3)$, $\vec{v} \equiv (-4,5)$, $\vec{w} \equiv (2,-4)$, $\vec{x} \equiv (1,0)$, $\vec{y} \equiv (0,1)$ et $\vec{z} \equiv (1,1)$. Calculer les normes des produits vectoriels suivants en utilisant, si c'est nécessaire, le produit scalaire pour obtenir l'angle α entre 2 vecteurs.

1. $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $\vec{w}\times\vec{x}$, $\vec{x}\times\vec{y}$, $\vec{y}\times\vec{z}$, $\vec{z}\times\vec{u}$
2. $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}$, $(\vec{u}+\vec{w})\times\vec{v}$, $(\vec{u}-\vec{v})\times\vec{w}$, $(\vec{w}-\vec{u})\times\vec{w}$, $(\vec{u}-\vec{v})\times\vec{v}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{w}+\vec{z})$, $(\vec{u}-\vec{z})\times(\vec{z}-\vec{u})$, $(\vec{w}+\vec{v})\times(\vec{v}+\vec{z})$, $(\vec{u}+\vec{w})\times(\vec{z}-\vec{y})$

Exercice 6 : problème

Soit un losange $ABCD$ où la longueur de la grande diagonale vaut $|AC| = 24\ cm$ et la longueur de la petite diagonale vaut $|BD| = 10\ cm$.

1. Que vaut la longueur du côté du losange ?
2. Que vaut l'angle α formé par les côtés AB et AD du losange ?
3. Que vaut l'angle β formé par les côtés BA et BC du losange ?

4. Que vaut l'aire de ce losange ? (utiliser le produit vectoriel)

Exercice 7 : problème

Démontrer avec le produit scalaire que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires

7.2 Cinématique

7.2.1 Vitesse et accélération

Exercice 1 : vitesse moyenne

Un mobile a pour équation de position $r(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$ où $a = 1\ m/s^3$, $b = -1\ m/s^2$, $c = 10\ m/s$ et $d = -100\ m$. Calculer

1. la vitesse moyenne entre $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 10\ s$
2. la vitesse moyenne entre $t_1 = 5\ s$ et $t_2 = 15\ s$
3. la vitesse moyenne entre $t_1 = 10\ s$ et $t_2 = 20\ s$
4. la vitesse moyenne entre $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 20\ s$

Exercice 2 : accélération moyenne

Un mobile a pour équation de vitesse $v(t) = a\,t^2 + b\,t + c$ où $a = 3\ m/s^3$, $b = -2\ m/s^2$ et $c = 10\ m/s$. Calculer

1. l'accélération moyenne entre $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 10\ s$
2. l'accélération moyenne entre $t_1 = 5\ s$ et $t_2 = 15\ s$
3. l'accélération moyenne entre $t_1 = 10\ s$ et $t_2 = 20\ s$
4. l'accélération moyenne entre $t_1 = 0\ s$ et $t_2 = 20\ s$

Exercice 3 : vitesse et accélération moyenne et instantannée

Un mobile a pour équation

$$\begin{array}{ccc} \text{de position} & r(t) = & a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d \\ \text{de vitesse} & v(t) = & 3a\,t^2 + 2b\,t + c \\ \text{d'accélération} & acc(t) = & 6a\,t + 2b \end{array}$$

1. – Si l'accélération instantannée du mobile vaut $acc(t) = 2\ m/s^2$ à $t = 0\ s$
   – Si la vitesse instantannée du mobile vaut $v(t) = -51\ m/s$ à $t = 0\ s$
   – Si la position du mobile vaut $r(t) = 10\ m$ à $t = 0\ s$
   – Si la position du mobile vaut $r(t) = 100\ m$ à $t = 10\ s$

   Déterminer les constantes a, b, c et d.

2. Calculer la vitesse moyenne et l'accélération moyenne du mobile pour les intervalles de temps

t_1	0	0	0	0	5	5	5	10	10	15
t_2	5	10	15	20	10	15	20	15	20	20

Exercice 4 : vitesse et accélération moyenne et instantannée, dérivées

$$\frac{d}{dt}(k\ t^n) = k\frac{d}{dt}(t^n) = k\ n\ t^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2}(k\ t^n) = k\frac{d^2}{dt^2}(t^n) = k\ n\frac{d}{dt}(t^{n-1}) = k\ n(n-1)t^{n-2}$$

$$\frac{d}{dt}(f(t)+g(t)) = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

1. Déterminer l'équation de la vitesse d'un mobile ayant $r(t) = 3t^4 - 6t^2$ comme équation de position
2. Calculer la vitesse instantannée pour $t = 0$, 5 et 10 s.
3. Calculer la vitesse moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0, 5)$, $(0, 10)$ et $(5, 10)$ secondes.
4. Déterminer l'équation de l'accélération de ce mobile
5. Calculer l'accélération instantannée pour $t = 0$, 5 et 10 s.
6. Calculer l'accélération moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0, 5)$, $(0, 10)$ et $(5, 10)$ secondes.

Exercice 5 : vitesse et accélération moyenne et instantannée, dérivées

$$\frac{d}{dt}(k\sin\omega t) = k\frac{d}{dt}(\sin\omega t) = k\ \omega\cos\omega t \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(k\cos\omega t) = k\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -k\ \omega\sin\omega t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(k\sin\omega t) = k\omega\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -k\ \omega^2\sin\omega t \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2}(k\cos\omega t) = -k\omega\frac{d}{dt}(\sin\omega t) = -k\ \omega^2\cos\omega t$$

1. Déterminer l'équation de la vitesse d'un mobile ayant $r(t) = 3\sin(\pi t)$ comme équation de position
2. Calculer la vitesse instantannée pour $t = 0$, 5 et 10 s.
3. Calculer la vitesse moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0, 5)$, $(0, 10)$ et $(5, 10)$ secondes.
4. Déterminer l'équation de l'accélération de ce mobile
5. Calculer l'accélération instantannée pour $t = 0$, 5 et 10 s.
6. Calculer l'accélération moyenne pour les intervalles de temps $(t_1, t_2) = (0, 5)$, $(0, 10)$ et $(5, 10)$ secondes.
7. Illustrer graphiquement le mouvement du mobile. De quel type de mouvement s'agit-il ?
   - mouvement circulaire uniforme ?
   - mouvement rectiligne uniforme ?

– mouvement rectiligne uniformément accéléré ?
– S'il ne s'agit d'aucun de ces mouvements, comment le décrire ?

Exercice 6 : hodographe, dérivées, déplacement d'un mobile dans un plan

Soit un mobile ayant comme équations paramétriques de position

$$\begin{cases} r_x(t) &= \frac{1}{8}t^3 - \frac{2}{5}t^2 + 2t - 10 \\ r_y(t) &= -5t + 17 \end{cases}$$

1. Faire un graphique du mouvement du mobile dans un repère orthonormé Oxy.
2. Tracer l'hodographe des vitesses entre $t = 0$ s et $t = 5$ s.
3. Déterminer graphiquement la projection orthogonale sur l'axe Ox de la distance atteinte par le mobile pour $t = 5$, 10, 15 et 20 s.
4. Déterminer graphiquement la projection orthogonale sur l'axe Oy de la distance atteinte par le mobile pour $t = 5$, 10, 15 et 20 s.
5. Déterminer la distance atteinte par le mobile pour $t = 5$, 10, 15 et 20 s.
   – a) par calcul
   – b) en utilisant les résultats des projections orthogonales des points 3 et 4
6. Calculer la norme de la vitesse instantannée du mobile pour $t = 5$, 10, 15 et 20 s.
7. Calculer la norme de la vitesse moyenne du mobile pour les intervalles de temps

t_1	0	0	0	0	5	5	5	10	10	15
t_2	5	10	15	20	10	15	20	15	20	20

Exercice 7 : problème

Luke Skywalker part d'Aldébaran dans une navette et fonce dans un vortex. Il voyage alors à la vitesse moyenne de 150 fois la vitesse de la lumière pendant les 8 premières minutes de son déplacement, à 300 fois pendant les 3 minutes suivantes, etc (voir tableau). La navette s'immobilise dans la cour du château de Champignac-en-Cambrousse après 45 minutes de trajet.

vitesse ($c = 3.10^8$ m/s)	150	300	600	400	200
intervalle de temps (min)	8	3	7	15	12

Quelle distance totale Luke a-t-il parcouru d'Aldébaran à Champignac-en-Cambrousse ? Estimer cette distance en années-lumières, sachant q'une année lumière est la distance parcourue dans le vide par la lumière pendant une année terrestre (365,25 jours).

7.2.2 Mouvement rectiligne

Exercice 1 : les bases, MRUA

L'équation du mouvement rectiligne d'un mobile est $r(t) = -5t^2 + 5t + 10$ (unités SI). Calculer la vitesse du mobile à l'instant 5 s et son accélération aux instants 0 et 10 s.

Exercice 2 : problème, MRUA

Un avion part du repos et s'élance pour décoller avec une accélération de 4 m/s^2. Calculer

1. la distance parcourue par l'avion après 5 s
2. la vitesse atteinte par l'avion après 5 s.

Exerice 3 : problème, MRUA

Au CERN, des protons émergent d'un accélérateur de particules linéaire de 0,8 km avec une vitesse de $2,5.10^8$ m/s.

1. Si l'accélération est uniforme, quelle est sa valeur ?
2. Combien de temps faut-il aux protons pour parcourir l'accélérateur ?

Exercice 4 : problème, MRUA

Un train a une vitesse initiale de 30 m/s. Il freine et s'arrête avec une décélération uniforme en 50 secondes.

1. Que vaut la décélération du train ?
2. Quelle distance parcourt-il avant de s'arrêter ?

Exercice 5 : problème, MRUA

Une voiture roule à 15 m/s et percute un mur de pierres.

1. Un passager portant sa ceinture de sécurité s'immobilise sur une distance de 1 m. Que vaut la décélération moyenne de cette personne ?
2. Le nez d'un autre passager, sans ceinture de sécurité frappe le pare-brise et s'immobilise sur une distance de $0,01$ m. Quelle est la décélération moyenne subie par le nez de ce passager ?

Exercice 6 : mouvement rectiligne dans un plan

Un mobile se déplace dans un plan Oxy. Ses équations paramétriques du mouvement sont (en unités SI)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} r_x(t) & = & \frac{t^2}{2} \\ r_y(t) & = & 1 - t^2 \end{array} \right.$$

1. Représenter, à l'échelle (identique pour chaque axe), les positions occupées par le mobile entre $t = 0$ et 1 seconde.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire dans le plan.
3. Déterminer les équations de la vitesse et de l'accélération. Que peut-on dire des vecteurs vitesse et accélération ?
4. Calculer les coordonnées de ces vecteurs et leur norme à l'instant $t = 0,4\ s$.
5. Représenter ces vecteurs à cet instant.

Exercice 7 : problème

Près de la planète Omicron Perseï 8, un tyran sanguinaire du nom de Rrrrh se prépare à envoyer un missile autoguidé à plasma en direction de la terre. Le missile, initialement au repos, est mis à feu avec une accélération constante et parcourt une distance de $0,5$ années-lumières. Son moteur à distortion spatio-temporelle lui permet d'acquérir une vitesse de croisière de $0,9$ années-lumières par seconde, après quoi sa vitesse reste constante.

1. Que vaut l'accélération du missile ?
2. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir la distance de $0,5$ années-lumières et détruire la terre, située à $1486,37$ années-lumières ?

7.2.3 chute d'un corps

Exercice 1

Quelle doit être la hauteur d'une chute d'eau pour que l'eau atteigne la roue d'une turbine avec une vitesse verticale de 30 m/s ? (On néglige les forces de frottement)

Exercice 2

Colt Silver tombe à pic d'un pont et atteint l'eau après 5 s. On néglige les forces de frottement.

1. Quelle est la vitesse de l'homme qui tombe à pic au moment où il touche l'eau ?
2. Quelle est la hauteur du pont ?

Exercice 3

Un obus anti-aérien est tiré à la verticale avec une vitesse initiale de 500 m/s. On néglige les forces de frottement.

1. Calculer la hauteur maximum atteinte par l'obus
2. Quel temps lui faut-il pour atteindre cette hauteur ?
3. A quel moment l'obus atteindra-t-il une hauteur de 1000 m ?

4. A quel moment l'obus atteindra-t-il une hauteur de 3000 m ?

Exercice 4

Une bombe à eau remplie de peinture est lancée vers le bas par un psychopathe, en direction d'un pare-brise de Rolls-royce avec chauffeur, du haut d'un des ponts qui passent au dessus du ring de Charleroi, avec une vitesse initiale de 10 m/s. Elle atteint le pare-brise après 3 s. On néglige les forces de frottement.

1. Qelle est la vitesse de la bombe à eau lorsqu'elle touche le pare-brise et aveugle le chauffeur ?
2. Quelle est la hauteur du pont ?
3. A quelle distance du pont se trouvait la Rolls-royce si celle-ci se déplaçait à la vitesse constante de 90 km/h avant l'impact ?

Exercice 5

Une voiture qui se déplace à la vitesse de 108 km/h entre en collision frontale avec une autre voiture roulant à 90 km/h. Les deux vitesses s'additionnant, de quelle hauteur faudrait-il que les voitures tombent pour subir le même choc ? (On néglige les forces de frottement)

Exercice 6

Un enfant, se trouvant à côté d'un immeuble, lance une balle vers le haut avec une vitesse de 15 m/s. (On néglige les forces de frottement)

1. Quelle hauteur la balle atteindra-t-elle ?
2. Combien de temps faudra-t-il à la balle pour atteindre cette hauteur ?
3. Un autre enfant se penche à la fenêtre, à 6 m de haut, et tente d'attraper la balle. A quel moment la balle passera-t-elle à sa hauteur ?
4. De combien de temps disposera-t-il pour se concentrer s'il rate la balle la première fois ?

Exercice 7

Une fusée d'essai pilotée par Clint Eastwood est lancée à la verticale, à partir du sol, avec une accélération constante de 50 m/s^2. Elle épuise son carburant après 4 s. Grâce aux techniciens d'Hollywood, nous pouvons négliger la résistance de l'air. Trouver

1. la hauteur atteinte par la fusée lorsque le moteur s'arrête,
2. la hauteur maximum atteinte par la fusée,
3. la durée du vol jusqu'à la hauteur maximum.
4. Si Clint Eastwood est capable de signer 37 autographes à la minute (son organisme supporte les accélérations à la perfection), combien d'autographes pourra-t-il signer du départ de la fusée jusqu'à son amerissage au milieu de l'océan pacifique ?

7.2.4 Mouvement circulaire

Exercice 1 : les bases, MCU

Le rayon de l'orbite lunaire vaut environ 384000 km, la période de révolution de la lune autour de la terre est de $T = 27,32$ jours.

1. Déterminer l'accélération normale de la lune.
2. Déterminer sa vitesse instantannée.
3. Déterminer sa vitesse angulaire.

Exercice 2 : les bases, MCU

Le rayon de la terre fait en moyenne 6380 km.

1. Calculer l'angle balayé par un méridien, en 6 h, par suite du mouvement de rotation de la terre.
2. Calculer la vitesse angulaire d'un point situé à l'équateur.
3. Calculer la vitesse linéaire d'un point situé à l'équateur.
4. Calculer la vitesse linéraire d'un point situé à la latitude de 50^o.

Exercice 3 : MCU, équations du mouvement

Un mobile se déplace dans un plan Oxy. Les équations paramétriquesdu mouvement dans ce plan sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} r_x(t) & = & 2\sin 2\pi t \\ r_y(t) & = & 2\cos 2\pi t \end{array}\right. \quad \text{exprimées en } cm$$

1. Ecrire l'équation de la trajectoire du point.
2. Calculer la vitesse du point à un instant quelconque, en tirer les conclusions.
3. Calculer l'accélération en fonction du temps et la représenter aux instants $t = 0$, $T/4$, $T/2$, $3T/4$ et T secondes (où T est la période du mouvement).
4. Représenter graphiquement l'hodographe des vitesses.

Exercice 4 : MCU, équations du mouvement

On établit entre les plaques verticales d'un oscilloscope une tension $y = A\sin\omega t$ et entre les plaques horizontales une tension $x = A\sin(\omega t + \phi)$

1. Quel type de courbe observe-t-on si $\phi = \frac{\pi}{2}$?
2. Que devient cette courbe si $\phi = 0$?

Exercice 5 : problème

Une bille métallique de faibles dimensions est suspendue à un fil de longueur 1 m. On le fait tourner autour d'un axe vertical de telle façon que la bille décrit une trajectoire circulaire dans un plan horizontal.

Le fil fait un angle de 30^o avec l'axe de rotation. Quelle est la période du mouvement de la bille ?

Exercice 6 : problème

L'aviateur Howard Hughes, interprété par Léonardo Di Caprio, effectue un looping dans un plan vertical en 10 s. Le rayon du cercle décrit vaut 100 m.

1. Que vaut la vitesse angulaire (exprimée en rad/s) ?
2. Quelle est l'accélération radiale de Léonardo Di Caprio ?
3. En supposant que l'accélération de la force fictive exercée sur le pilote (force centrifuge) est l'opposé son accélération normale, quelle devrait être la vitesse minimum de l'avion pour éviter à notre ami de tomber lorsque celui-ci a la tête en bas ?

Exercice 7 : problème

Un motocycliste tourne sur une plaine horizontale à la vitesse de 54 km/h. Quel est le rayon de la trajectoire circulaire qu'il peut décrire, sachant qu'il peut tout au plus s'incliner de 25^o par rapport à la verticale ? (Conseil : considérer l'angle entre l'accélération de la gravité $\vec{g}$ et l'accélération normale $\vec{a}_n$)

7.2.5 Mouvement d'un projectile sans frottements (P_{tir})

Exercice 1

Quelle est la vitesse initiale d'une sauterelle au moment où elle quitte le sol, si l'angle du saut est 55^o et si la portée est $0,8$ m ?

Exercice 2

Mpenza frappe sur un ballon placé au sol. Il manque et sa chaussure part avec une vitesse initiale de 25 m/s en faisant un angle de 30^o avec l'horizontale.

1. Quand la chaussure atteint-elle sa hauteur maximum ?
2. Si les buts de De Wulf se trouvent à 35 m d'où il shoote, sa chaussure menacera-t-elle le célèbre gardien ?
3. Que vaut l'angle de lancement pour que la portée de la chaussure soit maximale ?
4. Si Mpenza avait tiré avec cet angle optimal, sa chaussure serait-elle entrée dans les buts d'une hauteur de $2,5$ m ?

Exercice 3

Un point se déplace dans un plan Oxy. Les équations paramétriques de sont mouvement sont données par

$$\begin{cases} r_x(t) &= 5t+2 \\ r_y(t) &= -5t^2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation de sa trajectoire.
2. Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération à instants $t = 0$ et 6 s.
3. Représenter graphiquement la trajectoire du point.
4. Représenter graphiquement l'hodographe des vitesses.

Exercice 4

Un obus est tiré d'un mortier artisanal avec un angle de 75^o et une vitesse initiale de 70 m/s.

1. Calculer le temps de montée de l'obus.
2. Calculer la hauteur maximum atteinte par l'obus.
3. Calculer la protée de l'obus.
4. Déterminer la portée maximum correspondant à l'angle de tir optimal.
5. Quelle hauteur maximum peut atteindre l'obus ? Est-ce sans risque ?
6. Faire le graphique de la parabole de sûreté.
7. Si un tank yankee se trouve sur une hauteur de 18 m et à une distance de 400 m, pourra-t-il être détruit par le mortier des combattants de la liberté de la république démocratique de Los Bananas ?

Exercice 5

Une balle est lancée horizontalement d'une fenêtre située à 15 m du sol à la vitesse de 20 m/s.

1. Quand la balle touchera-t-elle le sol ?
2. Où la balle va-t-elle retomber ?

Exercice 6

Thomas Beckett, un sniper inexpérimenté planque depuis 2 semaines dans l'appartement situé en face de l'hôtel Plazza. Il tient sa cible dans sa ligne de mire. Sa cible, un homme d'une quarantaine d'années, chauve et bedonnant, qui prend l'air appuyé sur le balcon de la terrasse de son penthouse de Las Vegas, se trouve à 200 m, à la même hauteur que le fusil. Si la balle quitte le canon avec une vitesse initiale de 500 m/s, de combien la balle manquera-t-elle sa cible ?

Exercice 7

Un bombardier, au cours d'une descente en piqué à 53^o par rapport à la verticale, laisse tomber une bombe à une altitude de 730 m. La bombre explose au sol 5 s plus tard.

1. Quelle était la vitesse du bombardier lorsqu'il a largué la bombe ?
2. Quelle était la distance horizontale parcourue par la bombe ?
3. Quelles étaient les composantes horizontale et verticale de la vitesse de la bombe, juste avant de toucher le sol ?

7.2.6 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

Un point se déplace dans un plan Oxy. Les équations paramétriques de sont mouvement sont données par (en unités SI)

$$\begin{cases} r_x(t) & = & t-2 \\ r_y(t) & = & t^2+4 \end{cases}$$

1. Représenter quelques positions du point dans le plan entre -3 et 2 s.
2. Représenter les vecteurs vitesse et accélération aux instants 0, -1 et 2 s.
3. Déterminer l'équation de la trajectoire du point.

Exercice 2

Un joueur de base-ball rattrape une balle qui a une vitesse de 30 m/s.

1. S'il ne déplace pas la main, la balle s'immobilise dans son gant en parcourant une distance de 1 cm. Que vaut la décélération moyenne ?
2. Si, en attrapant la balle, il déplace la main de manière à ce que la balle s'arrête sur une distance de 10 cm, que vaut la décélération ?

Exercice 3

Un sac de sable lâché d'un ballon, atteint le sol après 15 s. Quelle était la hauteur du ballon si, initialement, celui-ci

1. était immobile ?
2. descendait à une vitesse de 20 m/s ?
3. montait à une vitesse de 20 $m/^s$?

Exercice 4

Une balle est fixée à l'une des extrémités d'un fil de 24 cm de longueur, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On l'oblige à décrire une circonférence dans un plan horizontal, centrée sur la verticale passant par le point fixe. Déterminer la vitesse et l'accélération de la balle lorsque le fil forme un angle de 30^o avec la verticale.

Exercice 5

Un membre d'une des triades lâche un indicateur de la police de Hong-Kong dans un puits et on l'entend toucher l'eau 3 s plus tard. Si le son se propage à la vitesse de 344 m/s, quelle est la profondeur du puits ?

Exercice 6

Le colonel Austin, l'homme qui valait 3 milliards, tente d'attraper un homme qui s'enfuit à bord d'une voiture de sport. La distance entre eux est de 100 m au moment où la voiture commence son accélération. Cette accélération est constante et vaut 5 m/s^2. Les jambes bioniques du colonel Austin lui permettent de courir à la vitesse de 30 m/s.

1. Arrivera-t-il à arrêter les méchants et à sauver le monde ?
2. Si non, quelle vitesse minimale le super ordinateur cybernétique de Lee Majors devra-t-il imposer aux jambes pour permettre à l'acteur de rattraper les méchants et empêcher la 3^eme guerre mondiale ?

Exercice 7

Supposons que Batman soit initialement suspendu la tête en bas, ses pieds se trouvant à 10 m au-dessus du sol et à 15 m à droite d'un canon qui pointe sur lui. Batman commence à tomber au moment où le joker coupe la corde qui le suspend et actionne le canon. Le boulet part avec une vitesse de 20 m/s et un angle de 10^o avec l'horizontale

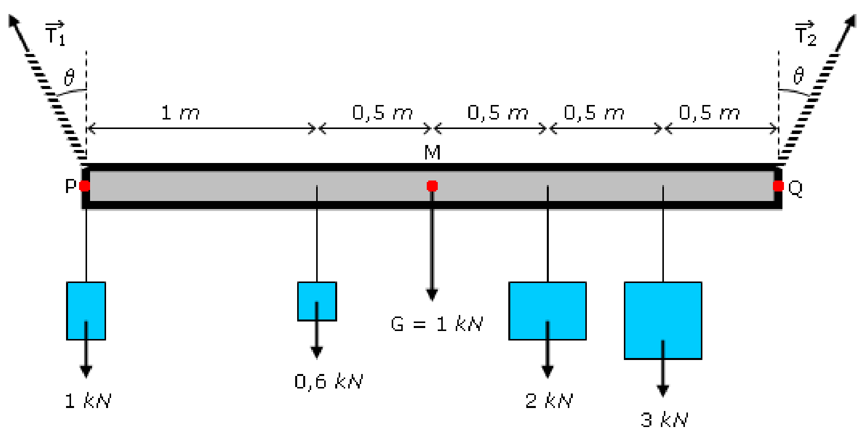
1. Quelles sont les composantes verticales et horizontales de la vitesse initiale du boulet ?
2. Combien de temps faut-il pour que la position horizontale du boulet varie de 15 m ?
3. Quelles sont, à cet instant, les positions verticales du boulet et de batman ?
4. Est-ce la fin de batman, si celui-ci mesure $1,80$ m ?

7.3 Statique

7.3.1 Moments de forces et équilibre des corps solides

Exercice 1

Trouver la valeur et le signe de chaque moment (par convention, signe positif si le moment implique une rotation dans le sens trigonométrique et signe négatif si le moment implique une rotation dans le sens horlogique) de chaque poids (ne pas prendre en compte $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$)
- par rapport au point P,
- par rapport au point M,
- par rapport au point Q.

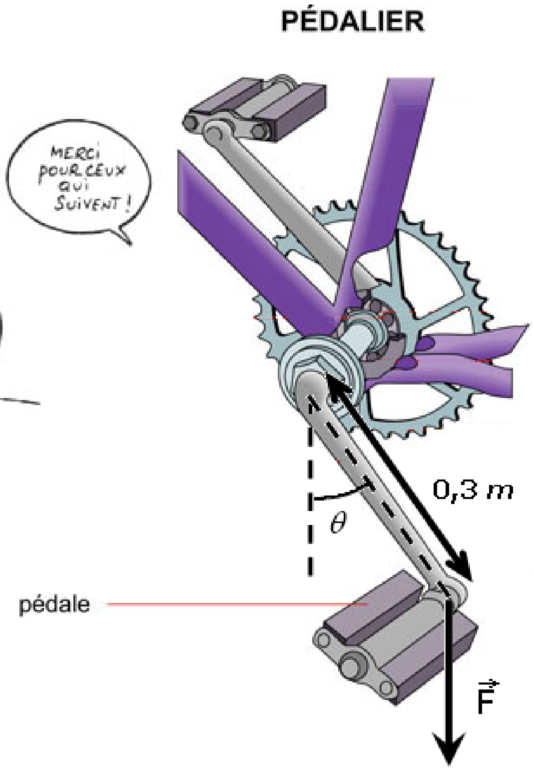


Exercice 2

Dans une chaîne de montage, une voiture, en cours de montage, est supportée par deux câbles. La voiture est schématisée par une barre de poids négligeable à laquelle s'accroche différents poids ponctuels. Evaluer les tensions T_1 et T_2 dans les câbles (voir figure 7.3.1).
- Si les câbles forment un angle de 0^o avec la verticale.
- Si les câbles forment un angle de 30^o avec la verticale.
- Si les câbles forment un angle de 45^o avec la verticale.
- Si les câbles forment un angle de 60^o avec la verticale.

Exercice 3

Un cycliste exerce, sur la pédale de son vélo, une force $\vec{F}$ dirigée vers le bas et valant 100 N.
- Trouver la grangeur et la direction des moments pour $\theta = 53^o$, -45^o et 90^o.
- À quelle position correspond le moment maximum ?



Exercice 4

Deux enfants sont en équilibre sur une balançoire de poids négligeable. Le premier enfant pèse 160 N. Il est assis à $1,5$ m du point d'appui. Le second enfant est assis à 2 m de l'autre côté par rapport au point d'appui. Quel est le poids du second enfant ?

Exercice 5

On a suspendu à un fil du linge humide. Le fil aura-t-il tendance à casser plus facilement si le fil est fortement tendu ou si au contraire il est lâche ? Expliquer.

Exercice 6

Deux poids sont suspendus aux extrémités d'une barre horizontale d'un mètre de longueur. Si le poids en $x = 0$ est de 10 N et si le centre de gravité se trouve en $x = 0,8$ m, quel poids est placé en $x = 1$ m ?
- Si l'on néglige le poids de la barre.
- Si la barre, homogène, pèse $\frac{10}{3}$ N.

Exercice 7

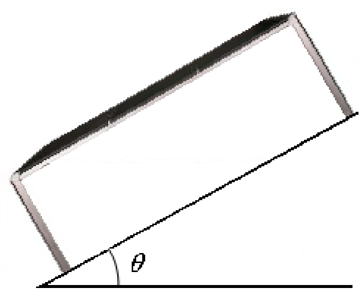
Un homme place une barre de 2 m de long au-dessous d'une grosse pierre qui pèse 4500 N. À quelle

distance maximum de la pierre doit-il placer le point d'appui de son levier ?
- S'il pèse 100 kg.
- S'il pèse 80 kg.
- S'il pèse 50 kg.

7.3.2 Centre de gravité

Exercice 1

Pour quelle valeur de l'angle θ la table basculera-t-elle ?



Exercice 2

Trois poids sont alignés sur une barre de poids négligeable et de 6 m de longueur. Calculer la position du centre de gravité du système si les poids $p_1 = 2\ N$, $p_2 = 5\ N$ et $p_3 = 10\ N$ sont respectivement disposés selon des distances $x(p_1) = x_1\ m$, $x(p_2) = x_2\ m$ et $x(p_3) = x_3\ m$.
- Soit $x_1 = 1\ m$, $x_2 = 2\ m$, $x_3 = 5\ m$.
- Soit $x_1 = 1\ m$, $x_2 = 5\ m$, $x_3 = 2\ m$.
- Soit $x_1 = 2\ m$, $x_2 = 1\ m$, $x_3 = 5\ m$.
- Soit $x_1 = 2\ m$, $x_2 = 5\ m$, $x_3 = 1\ m$.
- Soit $x_1 = 5\ m$, $x_2 = 2\ m$, $x_3 = 1\ m$.
- Soit $x_1 = 5\ m$, $x_2 = 1\ m$, $x_3 = 2\ m$.

Exercice 3

Les bateaux qui retournent à leur port d'attache, sans chargement, sont munis de ballasts qu'ils remplissent d'eau (autrefois, ils étaient chargés de pierres). Pourquoi ?

Exercice 4

Une poutre d'acier à une masse de 1000 kg et une longueur de 10 m. La poutre est en équilibre sur un bloc de béton mais elle dépasse de 4 m le bord du bloc. Jusqu'à quelle distance un homme de 100 kg peut-il avancer sur la poutre ?

Exercice 5

Les essieux d'une voiture sont distants de 3 m. Les roues avant supportent un poids total de 9000 N et les roues arrière un poids de 7000 N. À quelle distance se trouve le centre de gravité de la voiture par rapport à l'essieu avant ?

Exercice 6

Un promeneur de 80 kg porte un sac de 20 kg. Le centre de gravité du promeneur est à $1,1$ m au-dessus du sol lorsqu'il ne porte aucune charge. Le centre de gravité du sac se situe à $1,3$ m au-dessus du sol lorsqu'il est sur le dos du promeneur. À quelle distance se trouve le centre de gravité du promeneur lorsqu'il porte le sac ?

Exercice 7

Une unité astronomique ($u.a.$) correspond à la distance terre-soleil ($1,50.10^{11}$ km). La terre à une masse de $5,98.10^{24}$ kg.

- Sachant que la masse du soleil vaut $1,99.10^{30}$ kg, estimer, en $u.a.$, la position du centre de masse du système terre-soleil.
- Sachant que la masse de la lune vaut $7,35.10^{22}$ kg, estimer, en $u.a.$, la position du centre de masse du système terre-lune, sachant que la distance terre-lune vaut $3,84.10^{8}$ m.

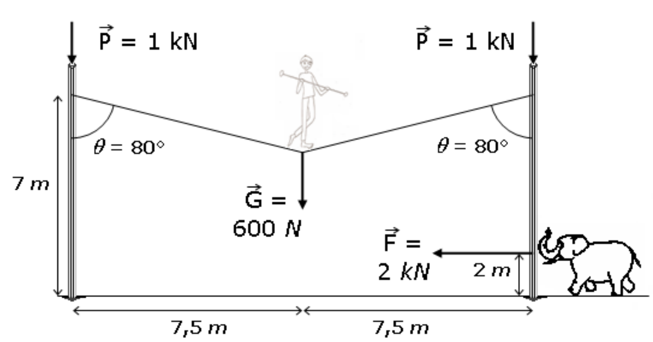
7.3.3 Réactions de liaison

Exercice 1

Une masse de 100 N est suspendue par deux câbles formant un angle de 30^o avec la verticale. Quelle est la tension exercée par la masse sur les câbles ?

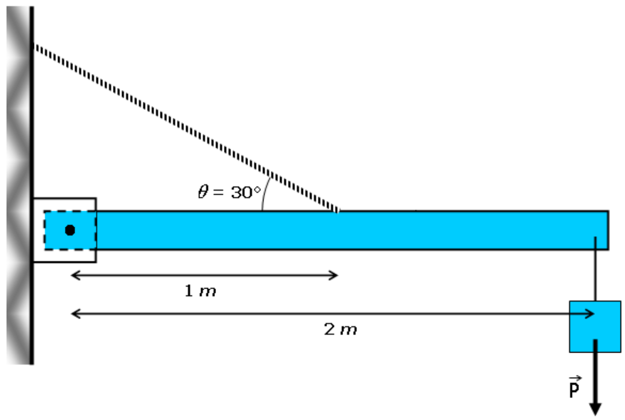
Exercice 2

Quelles sont les réactions des appuis dans le sol des piquets représentés sur le schéma ?



Exercice 3

Sur le schéma, la barre et le câble sont de poids négligeable. Le câble casse lorsque la tension dépasse 2000 N. Quel est le poids maximum P qui peut être attaché à la barre ?



Exercice 4

Sachant qu'une branche de chêne supporte un couple de 400 Nm, déterminer la distance maximum que pourra parcourir un enfant de 20 kg sur cette branche.

Exercice 5

Déterminer les réactions de liaison de l'appui A représenté sur le schéma 7.1.

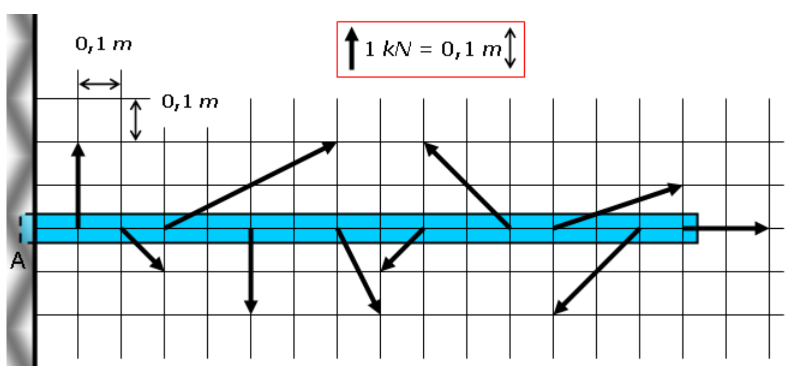


FIGURE 7.1 – Exercice 5

Exercice 6

Déterminer les réactions de liaison des appuis A et B représentés sur le schéma 7.2, avec $||\vec{G}|| = 600\ N$.

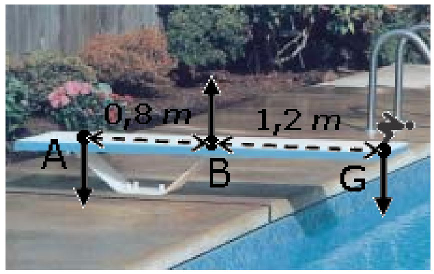


FIGURE 7.2 – Exercice 6

Exercice 7

Lors d'une partie de bras de fer, Lincoln Hawk doit affronter un adversaire ayant un avant-bras de 40 cm. Son propre avant-bras a une longueur de 35 cm et le coude de son advesaire est capable de résister à un couple de 250 Nm. La distance séparant la main et l'épaule de notre héros est de 50 cm. Le bras de son adversaire étant plus long que le sien, Lincoln retourne sa casquette pour réfléchir à la situation : à l'avantage mécanique, il ne peut gagner à la régulière ! Expliquer.

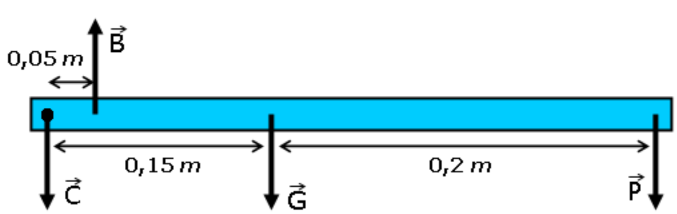
Quelle force son muscle pectoral devra-il développer pour casser le coude de son adversaire, sachant que le muscle exerce une traction sur le bras, dont le point d'application est situé au dixième de la distance entre la main et l'épaule ?

7.3.4 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

L'avant bras d'une personne est représenté sur la figure ci-dessous. Cette personne tient en main un poids P de 12 N. Le poids G de l'avant bras est de 12 N.

- Evaluer la force $\vec{B}$ exercée par le biceps et la force $\vec{C}$ exercée par l'articulation du coude.
- Lorsque la personne lâche le poids, on trouve que la force exercée par le biceps vaut 36 N et la force excercée par l'articulation du coude vaut 24 N. Pourquoi les forces sont-elles plus que doublées dans le cas où la personne tient un poids ?
- Si le biceps subit une contraction d'un cm, quelle sera la variation de position de la charge dans la main ?



Exercice 2

Un vase a une hauteur de $0,4\ m$. Son centre de gravité est à une hauteur de $0,15\ m$ du fond qui a une forme circulaire de $0,05\ m$ de rayon.

- Quelle inclinaison peut-on donner au vase sans le renverser ?
- Quelle inclinaison peut-on donner au vase sans le renverser, sachant que le fond de celui-ci est lesté d'un cylindre en plomb circulaire de même rayon que le fond, d'une hauteur de $0,02\ m$ (densité du plomb = 11,25) ?

Exercice 3

On utilise une planche de $4\ m$ de long pour déterminer le centre de gravité d'une personne. Lorsqu'une personne se trouve sur la planche, les balances, situées aux extrémités de celle-ci indiquent respectivement $200\ N$ et $600\ N$. Où se trouve le centre de gravité de la personne ?

Exercice 4

Une planche homogène a une masse de $20\ kg$ et mesure $2\ m$ de long. On y pratique un trou circulaire dont le centre est situé à $0,5\ m$ d'une extrémité de la planche. Si, dans ces conditions, le centre de gravité est à $0,9\ m$ de l'autre extrémité de la planche, quelle masse de bois a-t-on enlevée ?

Exercice 5

Le dessus d'une table carrée à quatre pieds a une masse de $20\ kg$. Les pieds se trouvent aux quatre coins et ont une masse de $2\ kg$ chacun. Les dimensions de la table sont $h = 0,8\ m$ et $L = 1\ m$. Pour quelle valeur de l'angle θ que forme la table avec l'horizontale, celle-ci basculera-t-elle (voir figure 7.3.2) ?

Exercice 6

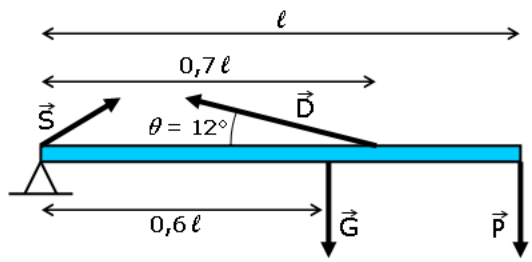
Un cheval a la jambe avant gauche en l'air. Les jambes arrière gauche et avant droite supportent chacune $1500\ N$. Le poids total du cheval vaut $5000\ N$.

- Quelle force est exercée par la jambe arrière droite ?
- Trouver la position du centre de gravité, sachant que les pattes arrières du cheval sont distantes de $0,5\ m$ et que la patte arrière droite et la patte avant droite sont distantes de $1,5\ m$.

Exercice 7

Dans la figure, le poids G de la partie supérieure du corps vaut $490\ N$. Evaluer la force D exercée par les muscles du dos et les composantes selon x et z de la force S exercée par le sacrum, si le poids P de la tête vaut

- $0\ N$,
- $175\ N$.



7.4 Dynamique

7.4.1 Densité - masse - masse volumique

Exercice 1

Déterminer la masse de 12 cm^3 de glycérine à 20^o C et 1 atm.

Exercice 2

Sachant que pour un gaz parfait, $p_1V_1 = p_2V_2$, estimer la densité de l'hélium à la pression de 3 atm. (On suppose que l'hélium se comporte comme un gaz parfait à la température de 0^o C.)

Exercice 3

À quel volume correspond 250 g d'azote à 0^o C à la pression d'une atmosphère ?

Exercice 4

Un alliage de L_i et de M_g flottera-t-il ?
- S'il est composé de 100 % de Li.
- S'il est composé de 100 % de Mg.
- S'il est composé de 34 % de Li et 66 % de Mg.
- S'il est composé de 66 % de Li et 34 % de Mg.

Exercice 5

Un sac étanche contenant un mélange de terre végétale et de sciure de pin est plongé dans un lac. À partir de quelle proportion de sciure de pin le sac flottera-t-il ?

Exercice 6

Si l'on considère que la terre et vénus ont approximativement la même densité moyenne (entre 5 et $5,5$), estimer le rayon de vénus, sachant qu'une personne pesant 500 N à la surface de la terre en peserait 450 N sur vénus. Vérifier les résultats avec le tableau ci-dessous

	Soleil	Mercure	Venus	Terre	Lune	
Dist. soleil (km)	0	57909175	108208930	149597890	384000	distance
et (AU)	0 $U.A.$	$0,387$ $A.U.$	$0,723$ $A.U.$	1 $A.U.$	$2,6.10^{-3} A.U.$	terre-lune
Diamètre (km)	1392000	4878	12250	12730	3480	
Volume (Terre=1)	1295000	$0,054$	$0,88$	1	$0,02$	
Masse (kg)	$1,989.10^{30}$	$3,302.10^{23}$	$4,8690.10^{24}$	$5,9742.10^{24}$	$7,35.10^{22}$	
Densité	$1,41$	$5,43$	$5,24$	$5,515$	$3,34$	
Vit. équa. (km/s)	2	$4,25$	$10,36$	$11,18$		
Temp. surface (K)		440	730	288 à 293		
Satellites	8	0	0	1		
Gravitation (m/s^2)	274	$3,70$	$8,87$	$9,80$	$1,62$	
	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
Dist. soleil (km)	227936640	778412010	1426725400	$2,870,972,200$	4498252900	5906376200
et (AU)	$1,524$ $A.U.$	$5,203$ $A.U.$	$9,537$ $A.U.$	$19,191$ $A.U.$	$30,069$ $A.U.$	$39,482$ $A.U.$
Diamètre (km)	6828	142000	107200	49260	44600	env. 2000
Volume (Terre=1)	$0,149$	1316	755	52	44	$0,005$
Masse (kg)	$6,4191.10^{23}$	$1,8987.10^{27}$	$5,6851.10^{26}$	$8,6849.10^{25}$	$1,0244.10^{25}$	$1,3.10^{22}$
Densité	$3,94$	$1,33$	$0,7$	$1,30$	$1,76$	2
Vit. équa.(km/s)	$5,02$	$59,54$	$35,49$	$21,29$	$23,71$	$1,2$
Temp. surface (K)	186 à 268					40
Satellites	2	63	48	27	13	1
Gravitation (m/s^2)	$3,71$	$23,12$	$8,96$	$8,69$	$11,00$	$0,60$

Exercice 7

Si la densité de jupiter vaut approximativement $1,33$ et celle de la terre $5,5$, sachant que la gravité à la surface de jupiter vaut $2,3$ fois celle de la terre, estimer le rayon de jupiter. Vérifier le résultat sur le tableau de la question précédente.

7.4.2 Poids et gravitation

Exercice 1

Sachant que la constante de gravitation universelle $G = 6,68.10^{-11}\ Nm^2/kg^2$, que le rayon de la terre vaut $R_T = 6367,6\ km$ en moyenne et que la gravité au voisinage de la terre vaut $g = 9,81\ m/s^2$ en moyenne,

- Calculer la masse de la terre.
- Calculer la masse volumique de la terre.
- Sachant que les couches superficielles ont une densité de $2,7$ (eau et roches), que peut-on dire sur les couches internes ?

Exercice 2

Sachant que la distance terre-soleil vaut environ 150 millions de km et que la période de la terre vaut $365,25$ jours, calculer la masse du soleil.

Exercice 3

Un satellite tourne au voisinage de la terre, il est donc soumis à une accélération centripète qui équivaut à la constante de gravitation g. Sachant que le Spoutnik avait une masse de 83 kg et une période de révolution de 96 minutes, déterminer l'altitude de ce satellite.

Exercice 4

Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire
- en considérant g constant,
- en considérant $g = G\frac{m_T}{d^2}$.

Exercice 5

Un satellite artificiel se trouve sur une orbite circulaire dont le rayon vaut $\frac{1}{4}$ du rayon de l'orbite lunaire. Quelle est sa période ?

Exercice 6

Si le rayon de l'orbite terrestre autour du soleil vaut 1 $u.a.$ (unité astronomique), à quelle distance du soleil se trouverait un astéroïde dont la période est de 8 ans ?

Exercice 7

La distance séparant mars du soleil est, en moyenne, de $1,524$ $u.a.$ Quelle est la période de révolution de mars autour du soleil ? (Vérifier avec les données de l'exercice 6 de la section précédente.)

7.4.3 Exercices récapitulatifs

Exercice 1 : 1^{ere} loi de Newton

Une avion de 2000 kg vole à une altitude constante et à vitesse constante.
- Quelle force résultante agit sur l'avion ?
- Que vaut la force de poussée exercée par l'air sur l'avion ?

Exercice 2 : 1^{ere} loi de Newton

Une caisse d'équipement de secours est parachutée d'un avion. La force due à la résistance de l'air augmnte, approximativement, avec le carré de la vitesse. La caisse atteint donc rapidement une vitesse limite constante dirigée vers le bas.

– Lorsque la caisse a atteint cette vitesse, est-elle en équilibre ?
– Que deviendra son mouvement si un coup de vent la pousse de côté ?
– Que deviendra son mouvement si elle rencontre un courant d'air descendant ?

Exercice 3 : 2^{eme} loi de Newton

Quelle force résultante est nécessaire pour fournir une accélération de 3 m/s^2 à une voiture de 1 t ?

Exercice 4 : 2^{eme} loi de Newton

Un fémur humain se fracture si la force de compression dépasse 2.10^5 N. Une personne, dont la masse est de 60 kg, se reçoit sur une jambe.
– Quelle accélération produira une fracture ?
– Que vaut cette accélération par rapport à l'accélération de la pesanteur ?

Exercice 5 : 3^{eme} loi de Newton

Une voiture s'arrête sur une route droite et plate, moteur débrayé.
– Quelles sont les forces qui s'exercent sur la voiture ?
– Quelles sont les forces de réaction ?

Exercice 6 : 3^{eme} loi de Newton

Un gros avion est tiré, à vitesse constante, le long d'une piste par un camion. Les deux véhicules sont reliés par une barre de fer.
– Quelles sont les forces qui s'exercent sur l'avion ?
– Quelles sont les forces qui s'exercent sur le camion ?
– Quelle est la force résultante sur l'avion ?
– Quelle est la force résultante sur le camion ?
– Quelle est la force résultante sur la barre de fer ?

Exercice 7 : poids, densité et gravitation

Une planète inconnue a un rayon égal à un tiers de celui de la terre. Sa densité moyenne vaut $5,5$.
– Quel sera le poids d'un spationaute dont la masse est de 70 kg ?
– À quelle planète du système solaire cette planète inconnue ressemble-t-elle à priori ?

7.5 Théorèmes énergétiques

7.5.1 Travail

Exercice 1

Un enfant tire une petite voiture avec une force de 10 N. Cette force fait un angle de 20^o avec l'horizontale. Si la voiture parcourt une distance de 6 m, quel est le travail fourni par l'enfant ?

Exercice 2

Une femme pousse une chaise horizontalement avec une force de 300 N. Evaluer le travail qu'elle effectue

- si la chaise est déplacée de 2 m parallèlement à la force,
- si la chaise est déplacée de 1 m dans la direction opposée à la force,
- si la chaise reste immobile.

Exercice 3

On exerce une force constante de 2000 N sur un wagon placé sur des rails et le wagon avance de 2 m. Si le travail total effectué par la force lors du déplacement vaut 1 kJ, quel est l'angle formé entre la force et la direction du déplacement ?

Exercice 4

Une moto s'arrête en dérapant sur une distance de 5 m. Durant ce dérapage, la force exercée par la route sur la moto vaut 200 N. Cette force a une direction opposée au mouvement.

- Quel travail la route effectue-t-elle sur la moto ?
- Quel travail est effectué par la moto sur la route ?

Exercice 5

Un fou tire une brosse à dents pesant $0,04$ N. La brosse à dents se déplace sur une distance de 1 km, à vitesse constante. Quel travail effectue le fou si le coefficient de frottement cinétique de la brosse à dents vaut $0,2$?

Exercice 6

Un boulet, ayant une masse de 10 kg tombe à la verticale d'une hauteur de 2 m. Quel est le travail effectué par la pesanteur ?

Exercice 7

Une voiture, ayant une masse de 1300 kg, parcourt une distance de 100 m en descendant une côte. La route forme un angle de 10^o avec l'horizontale. Quel est le travail effectué sur la voiture par la pesanteur ?

7.5.2 Energie cinétique et potentielle

Exercice 1 : E_c

Une balle de base-ball a une masse de $0,15\ kg$. Elle est lancée à la vitesse de $10\ m/s$.
- Que vaut son énergie cinétique ?
- Si la balle est lancée par un homme qui exerce une force constante sur une distance de $1,5\ m$, que vaut cette force ?

Exercice 2 : E_c

Un homme de $100\ kg$ se trouve dans une voiture qui avance à la vitesse de $20\ m/s$.
- Quelle est l'énergie cinétique de cet homme ?
- La voiture percute un mur. L'avant de la voiture s'écrase sur une distance de $1\ m$ et la voiture s'immobilise. Que vaut la force moyenne exercée par la ceinture de sécurité pendant la collision ?

Exercice 3 : E_c

Les lignes de pêche sont habituellement caractérisées par la force à laquelle elles peuvent résister. Quelle résistance est nécessaire pour ferrer un saumon de $10\ kg$ nageant à la vitesse de $3\ m/s$, si l'on veut l'immobiliser sur une distance de $0,2\ m$?

Exercice 4 : E_c

Une balle de base-ball est lancée du centre du terrain vers la seconde base. Sa vitesse diminue de $20\ m/s$ à $15\ m/s$. Si la masse de la balle est de $0,15\ kg$, quelle est l'énergie perdue en raison de la résistance à l'air ? (Supposer que les hauteurs initiales et finales sont identiques.)

Exercice 5 : E_p

Quel travail doit effectuer une pompe pour extraire $100\ kg$ d'eau d'un puits profond de $300\ m$? (Négliger la variation d'énergie cinétique.)

Exercice 6 : E_p

Un ascenseur et ses occupants ont une masse totale de $2000\ kg$. Le contrepoids est assuré par une pièce métallique dont la masse est de $1700\ kg$. Le contrepoids descend lorsque l'ascenseur monte. Quel travail le moteur doit-il effectuer contre la pesanteur pour élever l'ascenseur de $30\ m$?

Exercice 7 : E_p

Un saumon de $4,5\ N$ remonte, à vitesse constante, une échelle à poissons sur une distance de $5\ m$ (non horizontale). L'eau exerce une force dissipative de $1,3\ N$. Le poisson s'élève de $0,5\ m$ en remontant l'échelle.

- Quel travail le poisson doit-il effectuer pour compenser la force dissipative ?
- Quelle est la variation d'énergie potentielle du poisson ?
- Quel est le travail total effectué par le poisson en remontant l'échelle ?

7.5.3 Puissance

Exercice 1

Une fillette de 40 kg escalade, à vitesse constante, une corde de 8 m en 15 secondes. Quelle puissance dépense-t-elle contre les forces gravitationnelles au cours de cette ascension ?

Exercice 2

Le moteur d'un ascenseur a une puissance de 2000 W. À quelle vitesse peut-il soulever une charge de 1000 kg ?

Exercice 3

Le moteur d'une pompe à eau a une puissance de 1000 W. Si la variation d'énergie cinétique est négligeable, combien de kg d'eau peut-il extraire par seconde d'un puits profond de 20 m ?

Exercice 4

Une voiture de 2000 kg part du repos, accélère et atteint la vitesse de 30 m/s en 10 secondes. Quelle est la puissance moyenne développée par la voiture ?

Exercice 5

Un cycliste roule sur terrain plat à la vitesse constante de 5 m/s. Il dépense 100 W contre les forces dissipatives.

- Si les forces dissipatives sont indépendantes de la vitesse, quelle puissance doit-il fournir lorsqu'il roule à 10 m/s ?
- Si les forces dissipatives qui proviennent de la résistance à l'air sont, en première approximation, proprtionnelles au carré de la vitesse, quelle puissance le cycliste doit-il fournir à la vitesse de 10 m/s ?

Exercice 6

Le rayonnement solaire direct libère, sur terre, une puissance moyenne de 200 W par mètre carré de surface horizontale. On fait la moyenne de cette valeur sur 24 heures, sur les différentes époques de l'année et sur les variations météorologiques. Supposer que 10% de cette énergie solaire puisse être convertie en énergie électrique.

- De quelle surface en km^2 devrait-on disposer pour remplacer une centrale nucléaire de 1 GW ?

- Pour ses besoins domestiques, une famille américaine moyenne de 4 personnes utilise environ 8 kW de puissance. Si 20% de l'énergie solaire est captée, de quelle surface doit-on disposer pour fournir les 8 kW ?
- Comparer ce résultat à la surface moyenne estimée du toit d'une maison unifamiliale.

Exercice 7

L'énergie solaire est reçue, à la surface de la terre, à un taux de 350 W/m^2. Cette valeur est une moyenne qui tient compte de la latitude, du moment de la journée et de l'année, et des conditions atmosphériques. Environ 2% de cette énergie est convertie, par de complexes processus climatiques, en énergie éolienne.

- Trouver le rapport entre la puissance du vent produite par le soleil à la surface du globe et la puissance totale utilisée par l'humanité, soit environ 10^{13} W. (Le rayon de la terre vaut $6,38.10^6$ m.)
- On suppose qu'au maximum 3% de l'énergie éolienne pourrait être domestiquée. Ceci serait-il suffisant pour assurer les besoins énergétiques de l'humanité ?

7.5.4 Conversion énergie - travail

Exercice 1

Un skieur dévalle une colline en partant du repos. La hauteur de la colline est de 20 m. Si le frottement est négligeable, quelle sera la vitesse au bas de la pente ?

Exercice 2

Une voiture roulant à la vitesse de 40 m/s percute un mur. De quelle hauteur la voiture devrait-t-elle tomber pour subir le même dommage en percutant une surface identique au mur ?

Exercice 3

Une balle de base-ball, lancée à la verticale, atteint une hauteur de 50 m. Quelle était sa vitesse initiale ? (Négliger la résistance à l'air.)

Exercice 4

Une canette de bière passe devant une fenêtre à la vitesse de 30 m/s. Quelle sera sa vitesse après une chute de 20 m ?

Exercice 5

Un traîneau glisse sur 100 m le long d'une colline dont la pente fait un angle de 30^o avec l'horizontale. Il atteint la vitesse finale de 20 m/s au bas de la pente. Quelle fraction de l'énergie est dissipée par les forces de frottement ?

Exercice 6

De l'eau tombe d'une cascade. Elle a une vitesse de 3 m/s au sommet et une vitesse de 15 m/s en bas. L'altitude varie de 200 m à 180 m par rapport au niveau de la mer. Quelle fraction de l'énergie potentielle perdue par l'eau est dissipée ?

Exercice 7

En quittant le lac Ontario, le Saint-Laurent a un débit de 6800 m^3/s. Le lac est situé à 75 m au-dessus du niveau de la mer. Sans tenir compte de l'eau qui rejoint la rivière en aval, quelle énergie maximum pourrait, en principe, être produite par une centrale électrique sur une période de 24 h ? (La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3.)

7.5.5 Exercices récapitulatifs

Exercice 1

Une voiture de course pilotée par Tom Cruise pèse 2000 kg.
- Que vaut l'énergie cinétique s'il roule à 195 km/h ?
- Pour que cette vitesse soit atteinte en 10 secondes, quelle puissance moyenne faut-il fournir ?
- Si 1 litre d'essence représente $3,4.10^7$ J d'énergie chimique et qu'une voiture utilise $12,5\%$ de cette énergie pour se déplacer, de combien de litres d'essence seront-ils nécessaires pour, en partant au repos, atteindre une vitesse de 195 km/h ?

Exercice 2

On peut évaluer la quantité d'énergie maximum qui peut être produite par les centrales hydroélectriques aux Etats-Unis. Les chutes de pluie annuelles représentent une hauteur moyenne de $0,75$ m et les USA ont une superficie de 8.10^6 km^2.
- Evaluer la masse des eaux de pluviales.
- Si l'on tient compte des montagnes, des plaines et des régions côtières, l'altitude moyenne est d'environ 500 m. Si toutes les eaux pluviales finissent par atteindre les océans, quelle est l'énergie potentielle dissipée ?
- En fait, les deux tiers de l'eau s'évaporent dans l'atmosphère. Si l'on suppose que le reste est utilisé pour produire de l'énergie électrique, quelle serait la puissance moyenne produite en supposant qu'il n'y ait pas d'énergie dissipée sous forme de chaleur ?

Exercice 3

Les centrales nucléaires travaillent plus économiquement lorsqu'elles fonctionnent à régime maximum 24 h par jour, sans transitoires. Dès lors, on peut stocker l'excès d'énergie électrique en pompant l'eau dans des réservoirs situés au sommet d'une montagne. Pendant un pic de consommation électrique, on peut récupérer cette énergie en laissant redescendre l'eau dans les turbines. Une telle installation existe à la montagne Northfield dans le Massachusetts (près de Springfield). La chute d'eau a une hauteur moyenne de 250 m. Le réservoir a une surface de $1,3\ km^2$ et une profondeur moyenne de 10 m.

- Quelle énergie est disponible chaque fois que le réservoir est vidé ?
- Si la vidange s'effectue sur une période de 10 h et que 80% de l'énergie est convertie en électricité, quelle est la puissance disponible ?

Exercice 4

Sachant que la force gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 s'attirant est notée $\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{1_r}$, estimer l'énergie gravitationnelle de la lune, située à une distance $r \approx 384000\ km$ de la terre.

Exercice 5

Une navette spatiale de masse m est en orbite circulaire autour de la terre. La distance qui la sépare de la surface de la terre est égale au rayon terrestre. Quelle énergie est nécessaire pour doubler son altitude ?

Exercice 6

Sachant que la force électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 s'attirant est notée $\vec{F} = frac14\pi\epsilon_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{1_r}$, estimer l'ordre de grandeur du rayon décrit par un électron autour d'un proton, si son énergie électrostatique vaut $13,6\ eV$. (Pour estimer le rayon, ne considérer que la contribution de la force électrostatique.)

La charge d'un proton et d'un électron valent, en valeur absolue, $1,6.10^{-19}\ C$, la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F/m$ et 1 eV (électron-volt) $= 1,6.10^{-19}\ J$.

Exercice 7

Une partie de la puissance qui assure le mouvement d'une voiture est dissipé par la résistance de l'air. Une autre partie correspond au travail de déformation des pneus (résistance de la route). À 65 km/h, ces deux valeurs sont pratiquement égales.

- La résistance de l'air varie approximativement avec le carré de la vitesse tandis que les forces résistantes de la route sont pratiquement indépendantes de la vitesse. De combien augmentera la puissance nécessaire à la voiture si sa vitesse double ?
- De quel facteur sera réduit le nombr de kilomètres parcourus avec un litre d'essence ?