Première partie

Mécanique des fluides

Table des matières

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle est actuellement étendue à des écoulements solides tels les glaciers ou le manteau terrestre.

Le mouvement des liquides et des gaz est régi par les mêmes équations : les équations de Navier-Stokes [1] mais avec la différence que l'on considère en général les liquides comme étant incompressibles et les gaz compressibles.

La mécanique des fluides se compose de deux grandes sous-branches :

- la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède, l'étude de la pression
- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement.

Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement à leur viscosité, une de leur caractéristique physico-chimique. La famille des fluides newtoniens (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides non newtoniens (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides newtoniens ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. Les fluides non newtoniens ont, en plus, la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. La rhéologie est la science qui traite des fluides non newtoniens. Comme autres branches de la mécanique des fluides on distingue : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, l'étude des écoulements polyphasiques [2], l'électro-fluidodynamique, la biomécanique, la microfluidique... Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies : la mécanique des fluides numérique (CFD ou *Computational Fluid Dynamics* en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs très puissants : les super-calculateurs.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, l'étude de l'écoulement du sang (hémodynamique), mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie.

1. En coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3), les équations de Navier-Stokes s'écrivent :
   - Équation de continuité :
     $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$
   - Équation de bilan de la quantité de mouvement (j = 1,2,3) :
     $\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_i} + \rho f_j$
   - Équation de bilan de l'énergie :
     $\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\rho e + p)\, v_i \right] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{i,j} v_j) + \sum_{i=1}^{3} \rho f_i v_i - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + r$

2. Un écoulement polyphasique est un écoulement d'un fluide comportant plusieurs phases. On pourra par exemple étudier le comportement d'un fluide comportant des bulles de gaz, ou encore étudier le comportement de deux fluides non missibles dans une canalisation.

Chapitre 1

Mécanique des fluides parfaits (non visqueux)

1.1 Principe d'Archimède

Archimède de Syracuse (du grec Arkhimêdês), né à Syracuse en 287 av. J.-C. et mort à Syracuse en 212 av. J.-C.), est un grand scientifique Grec de Sicile (Grande Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur.

La vie d'Archimède est peu connue, on ne sait pas par exemple s'il a été marié ou a eu des enfants. Les informations le concernant proviennent principalement de Polybe (202 av. J. Chr. - 126 av. J. Chr.), Plutarque (46 - 125), Tite-Live (59 - 17) ou bien encore pour le cas de l'anecdote de la baignoire, de Vitruve, un célèbre architecte romain. Ces écrits sont donc, sauf pour Polybe, très postérieurs à la vie d'Archimède.

Concernant les mathématiques, on a trace d'un certain nombre de publications, travaux et correspondances. Il a en revanche jugé inutile de consigner par écrit ses travaux d'ingénieur qui ne nous sont connus que par des tiers.

Archimède est un mathématicien, principalement géomètre, de grande envergure. Il s'est intéressé à la numération, cherchant, par exemple à écrire le nombre de tous les grains de sable de l'univers. La majeure partie de ses travaux concerne la géométrie.

Archimède est considéré comme le père de la mécanique statique. Dans son traité, De l'équilibre des figures planes, il s'intéresse au principe du levier et à la recherche de centre de gravité.

On lui attribue aussi le principe d'Archimède :

Tout corps plongé dans un fluide est soumis à une poussée de bas en haut égale au poids du volume du fluide déplacé

Le génie d'Archimède en mécanique et en mathématique fait de lui un personnage exceptionnel de la Grèce antique et justifie la création à son sujet de faits légendaires. Ses admirateurs parmi lesquels

Cicéron qui découvrit sa tombe, Plutarque qui relata sa vie, Léonard de Vinci, et plus tard Auguste Comte ont perpétué, enrichi les contes et légendes d'Archimède.

À l'instar de tous les grands savants, la mémoire collective a associé une phrase, une fable transformant le découvreur en héros mythique : à Newton est associée la pomme, à Pasteur le petit Joseph Meister, à Albert Einstein la formule $E = mc^2$. Pour Archimède, ce sera la phrase Eurêka ! (en grec : j'ai trouvé !) prononcée en courant nu à travers les rues de la ville alors qu'il venait de trouver l'explication de la poussée du même nom. Archimède venait enfin de trouver la solution à son problème : En effet, il était courant à cette époque que les rois en manque d'argent fondent leurs bijoux en or et découvrent que les présents qui leurs avaient été fait n'étaient en réalité que du plomb plaqué or ou un mélange d'or-argent ! Le roi avait chargé Archimède de trouver un moyen pour déjouer cette fraude. C'est dans sa baignoire, alors qu'il cherchait depuis longtemps, qu'il trouva la solution, d'où sa joie ! Il put mesurer le volume de la couronne par immersion dans l'eau puis la peser afin de comparer sa masse volumique à celle de l'or massif.

Ce que constate Archimède au bain public est que, pour un même volume donné, les corps n'ont pas le même poids apparent, c'est-à-dire une masse par unité de volume différente. On parle de nos jours de masse volumique. L'argent (masse volumique 10500 kg/m^3) étant moins dense que l'or (masse volumique 19300 kg/m^3), il a donc une masse volumique plus faible. De là, Archimède déduit que si l'artisan a caché de l'argent dans la couronne du roi, alors elle a une masse volumique plus faible. Ainsi fut découverte la supercherie du joaillier.

Pour répondre à la question du roi Hiéron, Archimède a donc pu comparer les volumes d'eau déplacés par la couronne et une masse d'or identique. Si les deux déplacent le même volume d'eau, leur masse volumique est alors égale et on peut en conclure que les deux sont composées du même métal. Pour réaliser l'expérience, on peut imaginer plonger dans un récipient rempli à ras-bord la masse d'or. Une certaine quantité d'eau débordera alors du récipient. Ensuite, on retire l'or et on le remplace par la couronne à étudier. Si la couronne est bien totalement en or, alors l'eau ne débordera pas. En revanche, si sa densité est plus faible, de l'eau supplémentaire débordera.

Cette méthode présente deux inconvénients. Le premier est qu'elle ne fait ici intervenir en rien le principe d'Archimède. Le second problème est qu'avec des conditions réalistes, en raison de la forme de la couronne et de la densité de l'or, la hauteur d'eau déplacée est très faible (inférieur au millimètre). Il est donc peu probable qu'Archimède ait pu tirer des conclusions significatives à partir d'une telle expérience.

Une méthode plus réaliste est la suivante. En disposant sur chaque bras d'une balance la couronne d'un côté et son poids égal en or, l'équilibre est initialement obtenu. Ensuite, on peut immerger les deux bras dans de l'eau. Si la couronne et l'or ont la même masse volumique, alors la poussée d'Archimède sera égale sur les deux bras de la balance et l'équilibre sera respecté. Si la couronne ne contient pas uniquement de l'or, alors elle subira une poussée d'Archimède plus importante et un déséquilibre sera alors visible.

Tout corps plongé dans un fluide, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et égale au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée « poussée d'Archimède ».

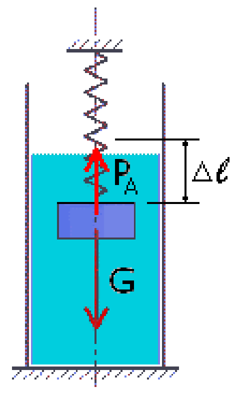


FIGURE 1.1 – Poussée d'Archimède

Dans un champ de gravité uniforme, la poussée d'Archimède P_A est toujours donnée par la formule suivante :

$$\vec{P}_A = -M_f\vec{g}$$

où M_f est la masse du fluide contenu dans le volume V déplacé, et g la valeur de la pesanteur.
Si la masse volumique ρ du fluide est elle aussi uniforme, on aura :

$$\vec{P}_A = -\rho V\vec{g}$$

ou encore, si l'on considère uniquement les grandeurs des forces :

$$P_A = \rho V g$$

La poussée d'Archimède P_A s'exprimera en newton (N) si la masse volumique ρ est en kg/m^3, le volume de fluide déplacé V en m^3 et la valeur de la pesanteur g en N/kg (ou m/s^2).

Remarque : lorsque la masse volumique du corps est inférieure à celle du fluide, le poids apparent est négatif. Voilà pourquoi une planche de bois remonte toujours à la surface de l'eau.

1.1.1 Formulation du théorème d'Archimède et idée de démonstration

Pour nous en convaincre, supposons un cube d'arête a entièrement immergé dans un liquide, sa face du haut étant horizontale et située à une profondeur $z_1 > 0$ (le sens positif est vers le bas).

Dans le cas d'un liquide incompressible au repos soumis à un champ de pesanteur uniforme, la pression absolue p vaut

$$p = p_0 + p_h$$

où p_0 est la pression atmosphérique et p_h la pression hydrostatique.

À une profondeur z, la pression hydrostatique correspond au poids P d'une colonne de liquide (que l'on peut imaginer cylindrique) de hauteur z et de base A, divisé par la base. Or

$$P = mg = [\rho z A]g$$

où m est la masse de la colonne, zA son volume, ρ la masse volumique (supposée uniforme) du liquide et g l'accélération de la gravité, ce qui donne

$$p_h = \frac{P}{A} = \rho g z$$

La pression absolue vaut donc

$$p(z) = p_0 + \rho g z$$

Par symétrie, les forces de pression exercées sur les quatre faces verticales du cube s'annulent deux à deux.

La force F_1 exercée vers le bas sur la face du haut, d'aire $A = a^2$, vaut

$$F_1 = p_1 A = (p_0 + \rho g z_1)a^2$$

La force F_2 exercée vers le haut sur la face du bas, située à la profondeur $z_2 = z_1 + a$, vaut

$$F_2 = p_2 A = (p_0 + \rho g z_2)a^2 = [p_0 + \rho g(z_1 + a)]a^2$$

La résultante F de toutes les forces de pression vaut donc

$$F = F_1 - F_2 = -(\rho g a)a^2 = -\rho g a^3 = -\rho g V = -M_f g$$

où $V = a^3$ est le volume du cube, c'est-à-dire en l'occurrence le volume immergé, et M_f la masse du fluide contenu dans un volume V. La grandeur de la force résultante est donc bien égale à celle du poids $M_f g$ du volume de fluide déplacé. Cette force étant négative, elle est bien orientée verticalement vers le haut.

Il est possible de généraliser la démonstration précédente à un volume de forme quelconque. Il suffit de décomposer la surface bordant le volume en une infinité d'éléments infinitésimaux dS supposés plans, puis de faire la somme, à l'aide du calcul intégral, de toutes les forces infinitésimales df exercées sur chaque élément de surface.

1.1.2 Exemple d'un solide entièrement immergé

Immergeons entièrement un solide de volume V, de masse m et de masse volumique ρ dans un fluide de masse volumique ρ_f uniforme, puis relâchons-le à partir du repos. Au départ, la vitesse étant nulle, deux forces seulement agissent sur le solide : son poids $\vec{F_p}$ (vers le bas) et la poussée d'Archimède $\vec{F_a}$ (vers le haut).

$$F_p = \rho V g \quad \text{et} \quad F_a = \rho_f V g \quad \Rightarrow \quad \tfrac{F_p}{F_a} = \tfrac{\rho}{\rho_f}$$

Le rapport des masses volumiques est en l'occurrence équivalent à celui des densités.

- Si la densité du solide est supérieure à celle du fluide, alors $F_p > F_a$ et le solide coule.
- Si la densité du solide est égale à celle du fluide, alors $F_p = F_a$ et le solide demeure immobile. Il est en équilibre neutre ou indifférent.
- Si la densité du solide est inférieure à celle du fluide, alors $F_p < F_a$ et le solide remonte vers la surface.

Dans les deux cas où le solide n'est pas en équilibre, son mouvement ultérieur est déterminé par trois forces : son poids, la poussée d'Archimède (opposée au poids) et une force de frottement visqueux F_f (opposée à la vitesse).

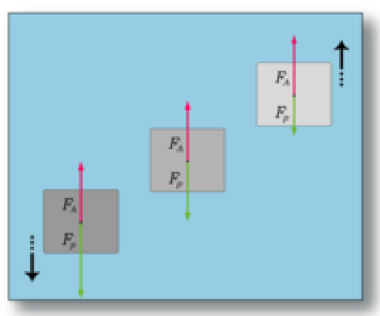


FIGURE 1.2 – Poussée d'Archimède : à gauche, $\rho > \rho_f$, au milieu $\rho = \rho_f$, à gauche $\rho < \rho_f$.

Selon la deuxième loi du mouvement de Newton, on a alors :

$$F_p - F_a \pm F_f = ma \text{ (le sens positif est vers le bas)}$$

où a est l'accélération du solide.

Comme la force de frottement visqueux n'est pas constante, mais qu'elle augmente avec la vitesse, l'accélération diminue graduellement, de sorte que le solide atteint plus ou moins rapidement une vitesse limite, lorsque la résultante des forces est nulle. (Cependant, dans ce chapitre, nous négligerons cette force de frottement)

1.1.3 Exemple d'un solide flottant à la surface d'un liquide

Considérons maintenant un solide de volume V et de masse volumique ρ_S flottant à la surface d'un liquide de masse volumique ρ_L. Si le solide flotte, c'est que son poids est équilibré par la poussée d'Archimède :

$$F_a = F_p$$

La poussée d'Archimède étant égale (en grandeur) au poids du volume de liquide déplacé (équivalent au volume V_i immergé), on peut écrire :

$$\rho_L V_i g = \rho_S V g$$

Le volume immergé vaut donc

$$V_i = \frac{\rho_S}{\rho_L} V$$

Puisque $V > V_i$, il s'ensuit que $\rho_S < \rho_L$.

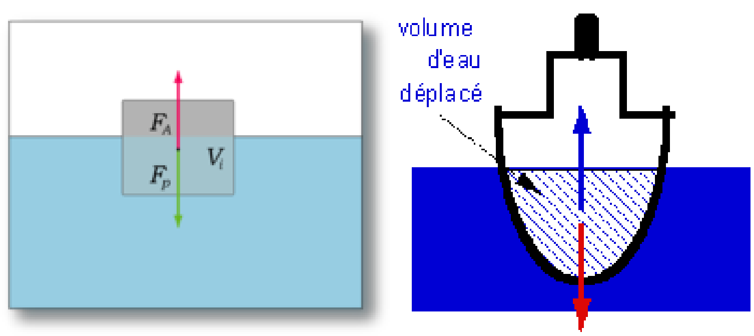


FIGURE 1.3 – Solide flottant à la surface d'un liquide

Application au cas d'un iceberg :

Considérons un morceau de glace pure à 0^oC flottant dans de l'eau de mer. Soit $\rho_S = 0,917\ kg/dm^3$ et $\rho_L = 1,025\ kg/dm^3$ (on aurait $\rho_L = 1,000\ kg/dm^3$ pour de l'eau pure à $3,98^oC$). Le rapport $\frac{\rho_S}{\rho_L}$ (c'est-à-dire la densité relative) est de $0,895$, si bien que le volume immergé V_i représente près de 90% du volume total V de l'iceberg.

1.1.4 Autres exemples d'application de la Poussée d'Archimède

- Le principe d'Archimède s'applique à des fluides, c'est-à-dire aussi bien à des liquides qu'à des gaz. C'est ainsi grâce à la poussée d'Archimède qu'une montgolfière ou un dirigeable peuvent s'élever dans les airs (dans les deux cas, un gaz de masse volumique plus faible que l'air est utilisé, que ce soit de l'air chauffé ou bien de l'hélium).
- Un plongeur se met à « couler » vers -12 m dans l'Atlantique ou la Méditerranée car sa densité augmente avec la profondeur (à cause de la compression croissante, particulièrement des bulles contenues dans le néoprène de sa combinaison : sa masse ne change pas mais son volume diminue) jusqu'à atteindre et dépasser celle du milieu ambiant.

FIGURE 1.4 – Iceberg : la partie immergée représente près de 90% du volume total.

- L'eau douce ayant une masse volumique plus faible que l'eau salée, la poussée d'Archimède est plus forte dans la mer Morte (mer la plus salée du monde) que dans un lac. Il est donc plus facile d'y flotter.
- Les spationautes s'entraînent aux exercices dans l'espace dans des piscines où, grâce à la poussée d'Archimède qui équilibre leur poids, ils peuvent connaître un état qui s'apparente jusqu'à un certain point à l'impesanteur.
- Le poids des navires (et donc leur masse volumique) variant suivant qu'ils soient en charge ou sur lest, la poussée d'Archimède va également varier. Pour maintenir un niveau de flottaison (tirant d'eau) constant et assumer une meilleure stabilité, les navires sont pourvus de ballasts qu'ils peuvent remplir ou vider suivant leur cargaison ou la salinité de l'eau dans laquelle ils naviguent. (Ce qui pose de graves problèmes écologiques, étant donné le traffic maritime actuel.)
- Les sous-marins contrôlent leur masse volumique en utilisant également des ballasts.

Point d'application

Tout se passe comme si la poussée d'Archimède s'appliquait au centre de carène, c'est-à-dire au centre de gravité du volume de fluide déplacé.

Cette caractéristique est importante pour le calcul de la stabilité d'un sous-marin en plongée ou d'un aérostat à faible altitude : sous peine de voir l'engin se retourner, il est nécessaire que le centre de carène soit situé au-dessus du centre de gravité.

Pour ce qui est d'un navire ou d'un aérostat en haute altitude, en revanche, le centre de carène est souvent situé au-dessous du centre de gravité (par exemple pour une planche à voile). Cependant, lorsque la pénétration de l'objet dans le fluide évolue, le centre de carène se déplace, créant un couple qui vient s'opposer au mouvement. La stabilité est alors assurée par la position du métacentre, qui est le point d'application des variations de la poussée. Ce métacentre doit se trouver au-dessus du centre de gravité.

De façon anecdotique, on peut remarquer que les concepteurs d'aérostats et de sous-marins doivent s'assurer simultanément de deux types d'équilibres pour leurs engins.

1.2 Pression

La pression est la force exercée sur une surface donnée.

Soit F la norme de la somme des forces normales appliquées à la surface S d'un corps. En physique, on définit la pression, notée p, comme le quotient d'une force (F) sur l'aire de la surface (S) sur laquelle elle s'applique :

$$p = \frac{F}{S}$$

La pression en un point (x, y, z) est donc la limite à laquelle tend ce rapport quand la surface tend vers zéro. On a

$$p(x, y, z) = \frac{dF}{dS}$$

Dans le système international, l'unité de mesure de la pression est le pascal (Pa) : une pression de 1 pascal correspond à une force de 1 newton exercée sur une surface de 1 m^2.

Autres unités usuelles :
- 1 $bar = 10^5\ Pa$
- 1 $MPa = 1\ N/mm^2$
- 1 $kgf/cm^2 = 0,981\ bar$ (kgf = kilogramme force)
- 1 $psi = 6894\ N/m^2 = 6894\ Pa = 0,06894\ bar$ (psi = pound per square inch (lb/in^2), livre par pouce carré, unité anglo-saxonne)
- 1 $atm = 101325\ Pa$ (atm = atmosphère)
- 1 $mmHg = 1\ torr = 133\ Pa$ ($mmHg$ = millimètre de mercure)

L'appareil de mesure de la pression est le manomètre. Pour la pression atmosphérique, on utilise le baromètre. On peut également utiliser un vacuomètre pour mesurer la pression d'un gaz dans un tube à vide.

Dans un contenant fermé, un liquide va exercer un force égale sur toute la surface. cette loi s'appele la loi d'archimède.

Expérimentalement, on constate que la pression dans l'eau ne dépend que de la profondeur et pas de la direction. En effet, si l'on prend une petite boîte rigide ouverte d'un côté et que l'on tend une membrane élastique, cette boîte enfermant de l'air à pression atmosphérique, et que l'on plonge cette boîte dans l'eau, la déformation de la membrane permet de visualiser la différence de pression entre l'air et l'eau, et celle-ci ne dépend que de la profondeur, pas de l'orientation de la boîte ni de sa position dans le plan horizontal.

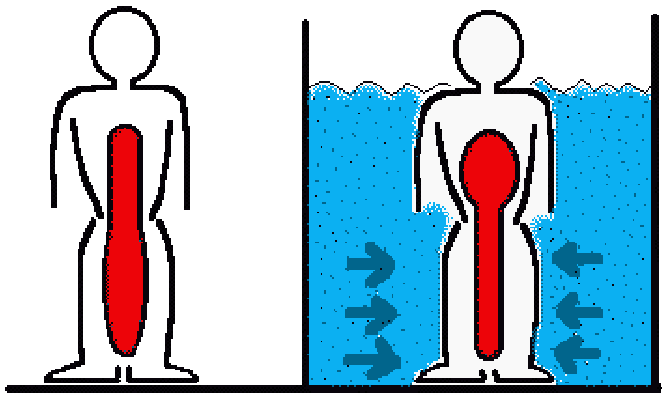


FIGURE 1.5 – La pression hydrostatique refoule une importante quantité de sang des membres inférieurs vers la partie céphalique de l'organisme, et en particulier le thorax (600 à 700 ml de sang, qui s'accumulent d'un seul coup dans la circulation pulmonaire, car s'y trouvent les seuls vaisseaux de l'organisme capables de se distendre).

Le fluide étant incompressible, il transmet intégralement les efforts. La pression à une profondeur z résulte donc de la pression p_0 qu'exerce l'air en surface, et du poids P de la colonne d'eau au-dessus de la membrane.

Supposons que la membrane soit horizontale et orientée vers le haut, et que son aire est S. La colonne d'eau située au-dessus a pour volume Sz, donc pour masse ρSz si ρ est la masse volumique de l'eau. Le poids P de l'eau est donc

$$P = \rho g(Sz)$$

où g est l'accélération de la gravité. La membrane est alors soumise à une force F

$$F = p_0 S + \rho g(Sz)$$

soit une pression

$$P = \frac{F}{S} = p_0 + \rho g z$$

Rappelons que c'est cette variation de la pression en fonction de la profondeur qui crée la poussée d'Archimède.

1.3 Ecoulement laminaire

L'hydrodynamique est l'étude des fluides en mouvement.

On imagine aisément la difficulté d'écrire l'équation du mouvement de chaque particule d'un nuage de fumée par exemple. En outre, les chocs et interactions entre particules ne nous facilitera certainement

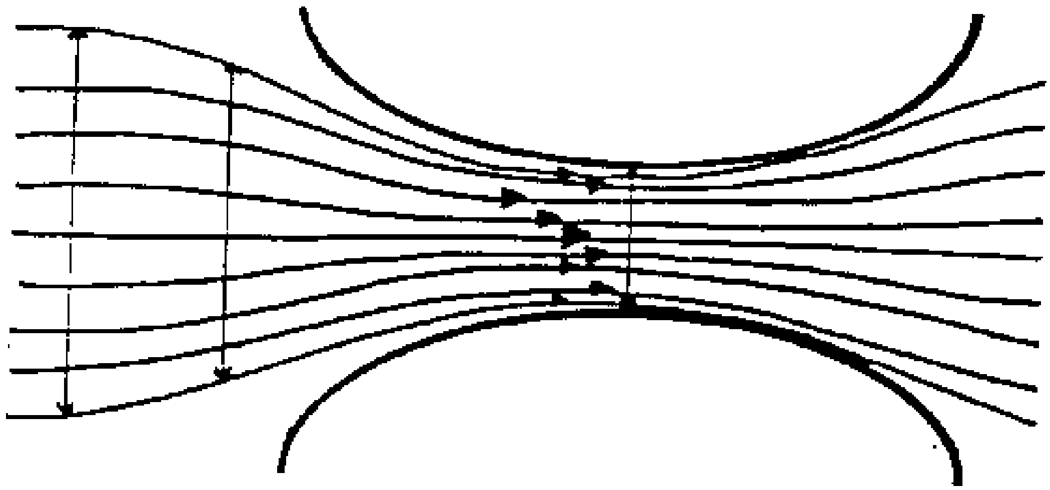


FIGURE 1.6 – Ecoulement laminaire : lignes de courant

pas la tâche.

Cependant, le problème se simplifie lorsqu'on considère lécoulement d'un fluide dans un cas particulier : l'écoulement laminaire.

Un écoulement est dit laminaire lorsqu'il est régulier (qu'il ne présente pas trop de variations spatiales ou temporelles), bien souvent stationnaire. Il s'agit en fait d'une solution stable des équations de Navier-Stokes, au sens où si on modifie l'écoulement, il retourne vers la solution laminaire.

Si l'écoulement est laminaire, chaque particule passant par un point A suit exactement la même trajectoire que les particules passées précédemment par le point A. Ces trajectoires sont les *lignes de courant*. Cet effet est basé sur la conservation de l'énergie des particules de fluide qui empruntent une ligne de courant.

Si la section droite du tube varie, la vitesse de chaque particule va varier le long de ces lignes de courant, mais en un point donné du tuyau, la vitesse d'une particule se trouvant en ce point est toujours la même.

La viscosité stabilise et régularise les écoulements de façon générale. Un fluide présentant une viscosité importante s'écoulera de façon laminaire. Un écoulement est caractérisé par son nombre de Reynolds Re, qui permet de se faire une idée de sa stabilité : quand ce nombre est petit, l'écoulement est laminaire, quand il est grand, l'écoulement est en général instable et turbulent.

Cependant, de part sa viscosité, un fluide réel aura une plus grande vitesse au centre du tuyau que près des parois (profil linéaire ou parabolique). Dans un but de simplification, nous commencerons par supposer que le fluide est non visqueux (aucune force de frottement) et que la vitesse est la même en tout point d'une section droite transversale.

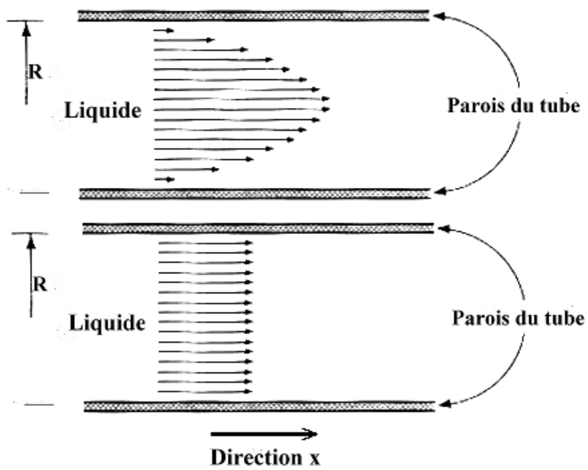


FIGURE 1.7 – Profil de la vitesse : écoulement d'un fluide visqueux (en haut) et non visqueux (en bas)

Pour résumer, l'écoulement d'un fluide est laminaire à condition que sa vitesse ne soit pas trop grande et que les obstacles, rétrécissements et coudes du tuyau soient tels que les lignes de courant ne changent pas trop brusquement de direction.

Si ces conditions ne sont pas remplies, l'écoulement est qualifié de turbulent.

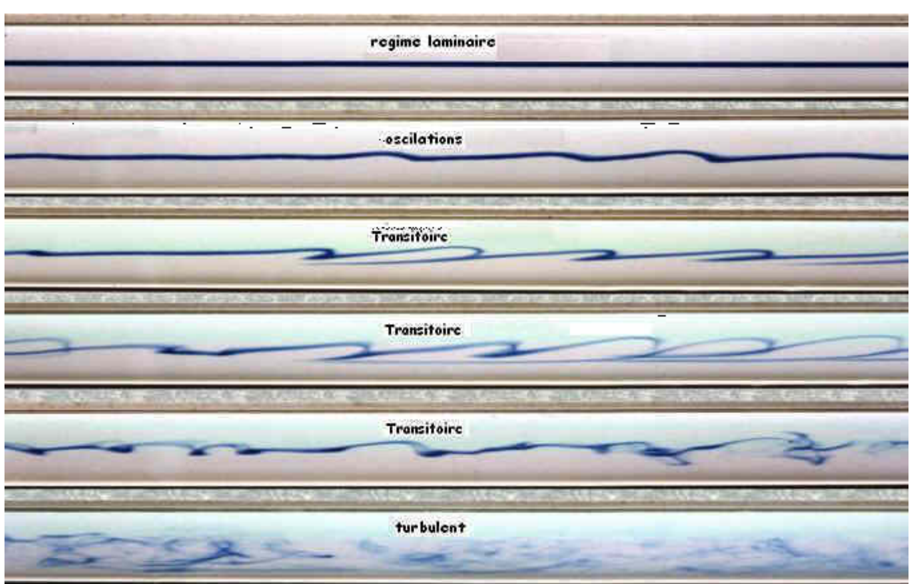


FIGURE 1.8 – Différents types d'écoulements : représentation des lignes de courant.

1.4 Equation de continuité

Si l'on considère un fluide comme incompressible et, de manière plus générale, qu'il y a conservation de l'énergie (et donc de la masse), Nous pouvons considérer un tuyau dans lequel s'écoule, de la gauche vers la droite, un fluide. Soit A_1 l'aire de la section 1 du tube et v_1 la vitesse des particules la traversant. Soit A_2 l'aire de la section 2 et v_2 la vitesse.

Pendant un intervalle de temps dt, les particules se déplacent d'une distance $dx = vdt$. Donc, en 1, un volume V_1 de fluide $V_1 = A_1 v_1 dt$ traversera la surface A_1 et en 2, un volume V_2 de fluide $V_2 = A_2 v_2 dt$ traversera la surface A_2.

Si le fluide est incompressible($\frac{\partial m}{\partial t} = 0$, les volumes V_1 et V_2 sont égaux et on a $A_1 v_1 = A_2 v_2$. Cette égalité étant valable en tout point du tuyau, on peut écrire

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 = ... = AV = Cte$$

Remarquons que le débit Q (m^3/s) d'un fluide est le volume traversant une surface A par unité de temps. Dès lors, si $Q_1 = A_1 v_1$ et $Q_2 = A_2 v_2$, on a

$$Q_1 = Q_2 = ... = Q = AV = Cte$$

Il s'agit de l'équation de continuité [1] de l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible, non visqueux.

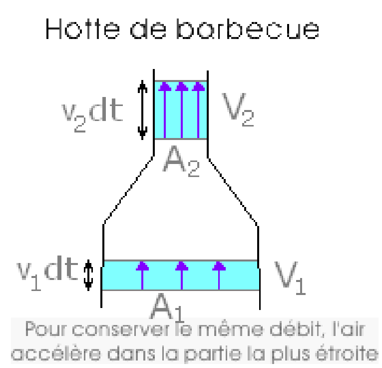


FIGURE 1.9 – Illustration de l'équation de continuité

Cette relation exprime que la vitesse d'un fluide augmente quand la section droite du tuyau diminue et réciproquement.

Si la vscosité du fluide n'est pas négligeable, l'équation de continuité reste valable en terme de vitesse moyenne $\bar{v} = \iint_A dv$ selon l'équation $Q = A\bar{v} = Cte$.

1. Qui peut aussi s'écrire $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

1.5 Equation de Bernoulli

La famille Bernoulli, qui s'est illustrée dans les mathématiques et la physique, est issue de Nicolas Bernoulli (1623 - 1708), descendant d'une famille ayant émigré d'Anvers à Bâle à la fin du XVIe siècle.

Ses représentants les plus connus sont :
- Jacques (1654-1705),
- Jean (1667-1748), tous deux fils de Nicolas,
- Daniel (1700-1782), fils de Jean.

Daniel Bernoulli (Groningue 9 février 1700 - Bâle 17 mars 1782) est médecin, physicien et mathématicien. Il cultiva à la fois les sciences mathématiques et les sciences naturelles, enseigna les mathématiques, l'anatomie, la botanique et la physique. Il publie en 1738 son ouvrage *Hydrodynamica* (Strasbourg) dans lequel il expose le théorème fondamental de la mécanique des fluides qui porte son nom : le théorème de Bernoulli, qui exprime le bilan hydraulique simplifié d'un fluide dans une conduite.

Depuis Navier-Stokes, ce théorème porte simplement le nom d'équation de Bernoulli. Il s'agit de l'équation fondamentale de l'hydrodynamique à la portée de tous. Elle relie la pression, la vitesse et la hauteur en des points situés le long d'une ligne de courant.

Considérons la portion de tube représentée. Cette portion a une section droite uniforme d'aire A_1 à gauche, suivie par une région de section décroissante, puis d'une région de section uniforme d'aire A_2 à droite.

Soit p_1 la pression appliquée sur A_1 et p_2 la pression appliquée sur A_2. Soit v_1 la vitesse en tous les points de la section large du tube et v_2 la vitesse en tous les points de la section étroite.

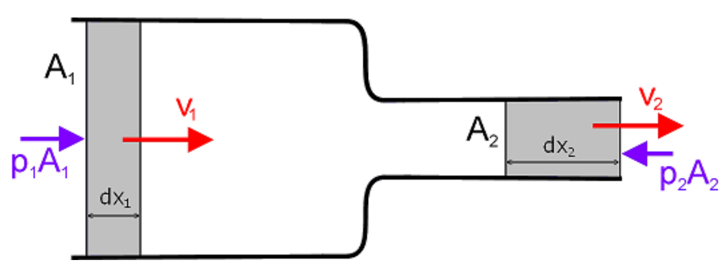


FIGURE 1.10 – Equation de Bernoulli : mise en évidence du travail appliqué lors du passage du système de la section 1 à la section 2.

L'équation de Bernoulli découle du principe de la conservation de l'énergie qui exprime que le travail des forces extérieures appliquées au fluide lors de son écoulement d'un endroit vers un autre est égal à la variation de son énergie mécanique $E_{mec} = E_p + E_c$ et on a

$$E_{mec} - E^0_{mec} = W$$

La force appliquée par le reste du fluide sur la face gauche vaut $p_1 A_1$. Si cette force progresse d'une distance dx_1, le travail de la force appliquée vaut $p_1 A_1 dx_1$.

La face droite progresse d'une distance dx_2 et subit de la part du reste du fluide une force $p_2 A_2$ qui s'exerce dans le sens opposé à celui du déplacement dx_2. Le travail de cette force vaut donc $-p_2 A_2 dx_2$.

Le travail des forces appliquées lors du passage du système de la section 1 à la section 2 est donc $W = p_1 A_1 dx_1 - p_2 A_2 dx_2$ (fourni par exemple par une pompe).

Si le fluide est incompressible, les volumes $A_1 dx_1$ et $A_2 dx_2$ sont égaux. Soit dm la masse de fluide comprise dans l'un ou l'autre de ces volumes et ρ la masse volumique du fluide. On a

$$A_1 dx_1 = A_2 dx_2 = \frac{dm}{\rho}$$

Donc, $W = (p_1 - p_2)\frac{dm}{\rho}$.

Puisque l'énergie cinétique ne change pas dans la région de section décroissante, la variation d'énergie cinétique du système est égale à la variation d'énergie cinétique dans les régions $A_1 dx_1$ et $A_2 dx_2$, c'est-à-dire

$$\Delta E_c = \frac{dm}{2} v_2^2 - \frac{dm}{2} v_1^2$$

Si la partie $A_2 dx_2$ ne se trouve pas à la même hauteur z que la partie $A_1 dx_1$, la variation d'énergie potentielle vaut

$$\Delta E_p = g z_2 dm - g z_1 dm$$

où z_1 et z_2 sont les altitudes respectives des parties $A_1 dx_1$ et $A_2 dx_2$ par rapport à un niveau de référence arbitraire.

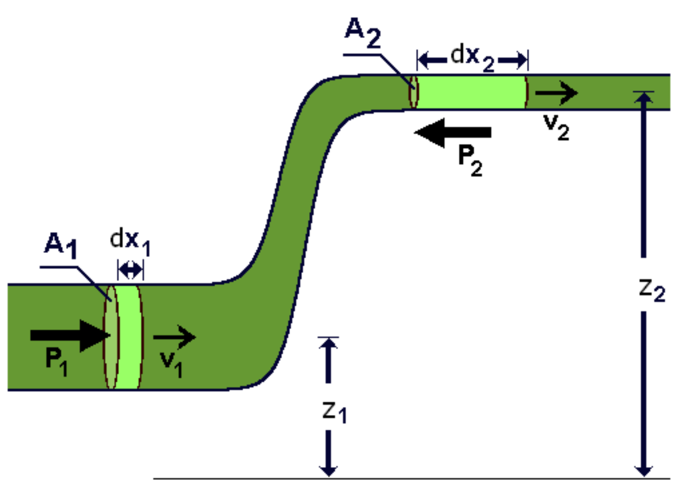


FIGURE 1.11 – Equation de Bernoulli : mise en évidence du travail appliqué lors du passage à des hauteurs différentes.

La conservation d'énergie $W = \Delta E_p + \Delta E_c$ implique donc que

$$(p_1 - p_2)\frac{dm}{\rho} = \frac{dm}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1)dm$$

Si l'on divise les deux membres de cette équation par $\frac{dm}{\rho}$, il vient

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1)$$

c'est-à-dire $p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho g z_2$.

Puisque les indices 1 et 2 sont relatifs à deux points quelconques du système, on a que

$$p + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = Cte$$

en tout point de l'ecoulement. Il s'agit de l'équation de Bernoulli pour un fluide incompressible, non visqueux, en écoulement laminaire.

- v = vitesse en m/s
- g = accélération de la pesanteur en N/kg ou m/s^2
- z = altitude en m
- p = pression dans la conduite en Pa ou N/m^2
- ρ = masse volumique du fluide en kg/m^3 ou g/L

1.5.1 Conséquences statiques de l'équation de Bernoulli

Nous savons que $p + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = Cte$. Dès lors, lorsque le fluide est au repos ($v = 0$), on a, vis-à-vis de deux points A et B donnés,

$$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$$

Si le point A est situé à la surface du liquide, $p_A = p_{atm}$ et il vient

$$p_B = p_{atm} + \rho g(z_1 - z_B)$$

Dès lors, on peut conclure que, dans un fluide, des points situés dans le même plan horizontal ont la même pression, ce qui s'observe avec les vases communicants.

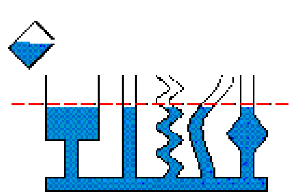


FIGURE 1.12 – Vases communicants

L'exemple du manomètre est aussi une conséquence statique de l'équation de Bernoulli. En effet, si $p_B = p_{gaz}$ est la pression du gaz contenu dans l'enceinte du manomètre et $p_A = p_{atm}$ la pression du liquide communiquant avec l'extérieur, on a $p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$. Dès lors, la pression atmosphérique extérieure p_{atm} peut se déduire de la hauteur $z_B - z_A = h$ et on a

$$p_{atm} = p_{gaz} + \rho g h$$

la valeur $\rho g h$ est appelée pression de jauge.

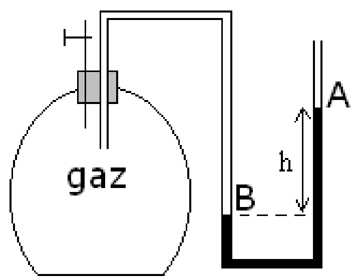


FIGURE 1.13 – Manomètre

Le baromètre à colonne de mercure se base sur un principe équivalent. On a $p_B = p_{gaz} \approx 0$ et la pression atmosphérique se déduit de la hauteur de la colonne de mercure. On a

$$p_{atm} = \rho_{Hg} g h$$

où ρ_{Hg} est la masse volumique du mercure et h la hauteur de la colonne de mercure.

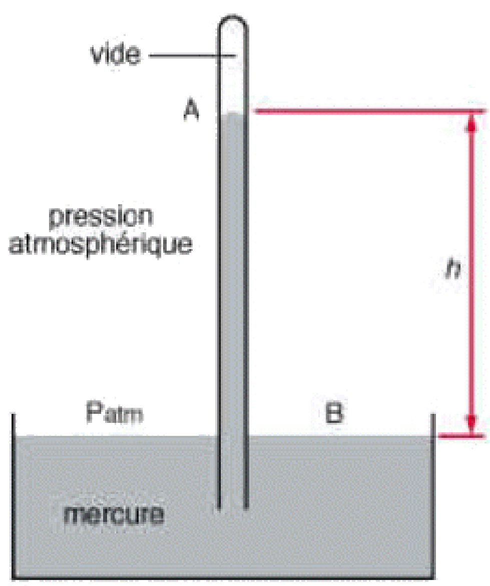


FIGURE 1.14 – Baromètre à colonne de mercure

1.5.2 Conséqueces dynamiques de l'équation de Bernoulli

Nous avons tous observé au cours de notre vie de nombreuses conséquences dynamiques de la loi de Bernoulli, peut-être sans le savoir. Le rideau de douche attiré par le jet d'eau, les feuilles soulevées par le vent, la pression d'eau qui chute le matin lorsque tous les voisins prennent une douche en même temps, etc.

En guise d'exemple, considérons deux feuilles de papier parallèles et suspendues verticalement. Supposons qu'un courant d'air passe entre les deux feuilles (on souffle). Nous allons donc imposer une vitesse v_i à l'air situé entre les deux feuilles alors que la vitesse de l'air extérieur v_e est nulle. Dès lors, on a, entre l'extérieur et l'intérieur, l'équation de Bernoulli suivante :

$$p_i + \rho \frac{v_i^2}{2} = p_e$$

Dès lors, on peut écrire $p_i = p_e - \rho \frac{v_i^2}{2} \Rightarrow p_i < p_e$. La pression entre les feuilles étant inférieure à la pression de l'extérieur de celles-ci, les deux feuilles auront tendance à se rapprocher (quand on souffle entre elles).

L'effet de Venturi est une application directe de cette conséquence de l'équation de Bernoulli.

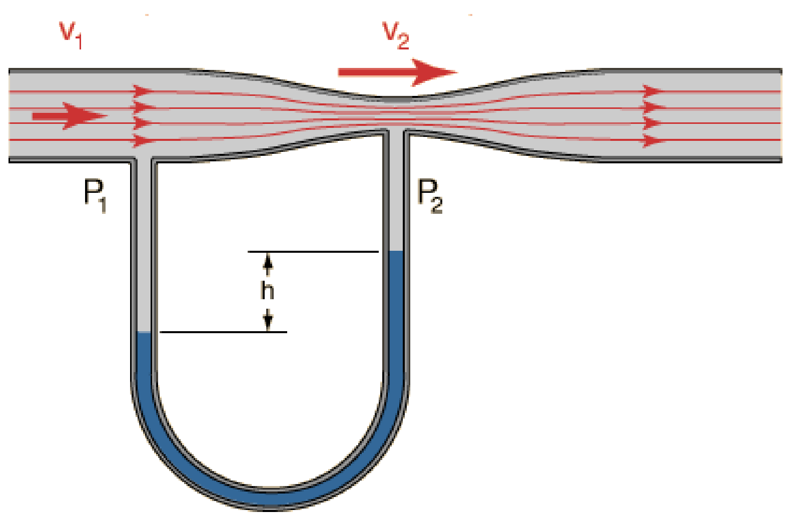


FIGURE 1.15 – Effet Venturi

L'effet Venturi (du nom du physicien italien Giovanni Battista Venturi) est le nom donné à un phénomène de la dynamique des fluides où les particules gazeuses ou liquides se retrouvent accélérées à cause d'un rétrécissement de leur zone de circulation.

Il est également à noter que l'accélération du vent occasionne une chute de la température (décompression adiabatique) et favorise la condensation dans un milieu gazeux (que nous négligerons).

On peut comprendre cet effet avec le théorème de Bernoulli : si le débit de fluide est constant et que le diamètre diminue, la vitesse augmente nécessairement. Du fait de la conservation de l'énergie, l'augmentation d'énergie cinétique se traduit par une diminution d'énergie élastique, c'est-à-dire une dépression.

Dans les zones montagneuses, l'effet Venturi est tout le temps présent. Si les particules d'air rencontrent une montagne (ou tout terrain surélevé), elles se retrouvent obligées pour la franchir de passer par-dessus (si elles ne peuvent passer sur les côtés). La zone de circulation étant moindre, les particules se retrouvent accélérées, de manière à conserver le même débit qu'avant. C'est pour cette raison que le vent au sommet des montagnes est toujours plus rapide que celui à sa base.

Le raisonnement mathématique est simple. Le débit se conserve, donc $A_1v_1 = A_2v_2$ et si $A_2 < A_1$ alors $v_2 > v_1$. Or, l'équation de Bernoulli nous donne

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2}$$

et on a finalement que $A_2 < A_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$.

Notons que l'effet Venturi ne concerne que les vitesses d'écoulement subsoniques.

Chapitre 2

Ecoulement des fluides visqueux

2.1 Viscosité

La viscosité (du latin viscum) désigne la capacité d'un fluide à s'écouler, en mécanique des fluides. En langage courant, on utilise aussi le terme de fluidité.

Lorsqu'un fluide s'écoule, il existe des forces de frottement entre le fluide et la paroi, mais aussi dans le fluide lui-même. Lorsque le travail nécessaire pour vaincre ces forces dissipatives devient comparable au travail des forces appliquées au fluide, l'équation de Bernoulli n'est plus valable.

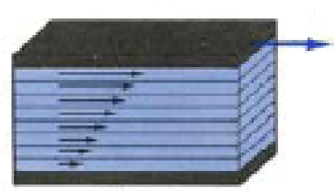


FIGURE 2.1 – Ecoulement laminaire pour un fluide visqueux : déplacement d'un élément de fluide.

Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue. La viscosité tend à diminuer lorsque la température augmente. Par contre, on pourrait croire que la viscosité d'un fluide s'accroît avec sa densité mais ce n'est pas nécessairement le cas.

On classe notamment les huiles mécaniques selon leur viscosité, en fonction des besoins de lubrification du moteur et des températures auxquelles l'huile sera soumise lors du fonctionnement du moteur.

Il existe deux types de viscosité :

1. La viscosité dynamique η (ou encore μ) se mesure en pascal-seconde ($Pa.s$), cette unité ayant remplacé le poiseuille (Pl) qui a la même valeur. On trouve encore parfois l'ancienne unité : la poise (Po) ; 1 $Pa.s = 10$ Po.

Une façon de définir la viscosité dynamique est de considérer deux couches d'un fluide notées $abcd$ et $a'b'c'd'$, la couche $abcd$ étant animée d'une vitesse relative à $a'b'c'd'$ notée dv et dirigée suivant x. Sous l'effet de la viscosité, une force F s'exerce sur la couche $a'b'c'd'$. La viscosité dynamique η est définie par la relation entre la norme de cette force et la vitesse relative dv :

$$F = \eta S \frac{dv}{dy}$$

S étant la surface de chaque couche, et dy l'épaisseur de fluide séparant les deux couches.

2. la viscosité cinématique ν qui s'obtient en divisant la viscosité dynamique η par la masse volumique ρ. Elle s'exprime en m^2/s. Cette unité est très grande. Dans le système CGS la viscosité cinématique était exprimée en stokes (St) ou en centistokes (cSt). La conversion est immédiate, puisque $1St = 1cm^2/s = 10 - 4m^2/s$ et $1cSt = 1mm^2/s = 10 - 6m^2/s$.

Remarquons que la viscosité (dynamique) η d'un fluide varie en fonction de sa température ou des actions mécaniques auxquelles il est soumis. Voir par exemple à ce propos le phénomène de thixotropie [1].

Concernant un gaz, il est courant d'utiliser la loi de Sutherland définie de la façon suivante :

$$\frac{\eta(T)}{\eta_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S}$$

$\eta_0 = \eta(T_0)$ est la viscosité à la température T_0, T_S est la température de Sutherland. Pour l'air par exemple on prend habituellement les valeurs suivantes $\mu_0 = 1.711e{-}5\ Pa.s$, $T_0 = 273,15\ K$ et $T_S = 110,4\ K$, ce qui donne une bonne approximation sur une plage de température de l'ordre de 170 K à 1900 K environ.

1. La thixotropie ou thixiotropie est la propriété réversible que possèdent certains matériaux de se fluidifier progressivement lorsqu'ils sont soumis à des actions mécaniques ou plus précisément de passer d'un état visqueux à un état fluide. On peut dire aussi qu'un corps thixotrope est un corps dont la viscosité diminue en fonction de la contrainte appliquée. On peut citer les peintures que l'on doit remuer énergiquement avant de les utiliser. Un exemple classique (et dangereux) de corps thixotrope est les sables mouvants.

corps, à la pression atmosphérique	température (^oC)	viscosité η $(Pa.s)$
Fluide parfaitement défini		
hydrogène	0	$8,4.10^{-6}$
	50	$9,3.10^{-6}$
	100	$10,3.10^{-6}$
air	0	$17,1.10^{-6}$
	50	$19,4.10^{-6}$
	100	$22,0.10^{-6}$
xénon	0	$21,2.10^{-6}$
eau	0	$1,79.10^{-3}$
	$20,2$	10^{-3}
	50	$0,55.10^{-3}$
	100	$0,28.10^{-3}$
glace	-13	15.10^{12}
mercure	20	$17,0.10^{-3}$
acétone	20	$0,326.10^{-3}$
éthanol	20	$0,248.10^{-3}$
méthanol	20	$0,59.10^{-3}$
benzène	20	$0,64.10^{-3}$
nitrobenzène	20	$2,0.10^{-3}$

Fluide de la vie courante		
bitume	20	10^8
mélasse	20	10^2
miel	20	10
huile de ricin	20	0.985
huile d'olive	20	$[81.10^{-2}, 100.10^{-2}]$
café crème	20	10.10^{-3}
sang	37	$[4.10^{-3}, 25.10^{-3}]$
jus de raisin	20	$[2.10^{-3}, 5.10^{-3}]$
pétrole	20	$0,65.10^{-3}$

Remarquons que la viscosité d'un liquide diminue quand la température augmente et que pour les gaz, la viscosité augmente lorsque la température augmente.

Malgré leur viscosité, les liquides (pricipalement l'eau) sont utilisés comme lubrifiants parce que ces forces sont plus petites que les forces de frottement sec.

Lorsque la décroissance de la vitesse est linéaire (ou parabolique) vis-à-vis de l'éloignement par rapport à la paroi, nous considérerons l'écoulement comme laminaire.

2.2 Ecoulement laminaire dans un tube : loi de Poiseuille

Un fluide visqueux, s'il est en écoulement lent dans un tuyau de petit diamètre ou entre deux plaques proches, est en écoulement de Stokes (laminaire).

En première approximation, si le tuyau est cylindrique ou que les plaques sont parallèles, l'écoulement du fluide est partout parallèle aux parois (approximation de lubrification).

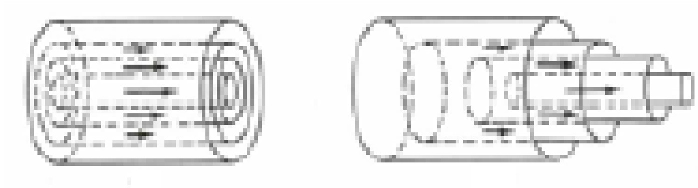


FIGURE 2.2 – Ecoulement laminaire dans un tube : le fluide en contact avec la paroi est au repos et les couches cylindriques successives se déplacent avec des vitesses de plus en plus grandes. La vitesse du fluide est maximum au centre.

Le frottement aux parois implique qu'aux échelles macroscopiques, la vitesse du fluide y est nulle (condition de non-glissement).

Par ailleurs, la pression ne varie pas dans l'épaisseur de l'écoulement (approximation de lubrification).

Ces trois conditions impliquent que l'écoulement s'organise selon un champ de vitesse parabolique : vitesse nulle aux parois et maximale à mi-hauteur (au centre du tube de rayon R ou à égale distance des deux plaques distantes de h). On a, comme profil de vitesse,

$$v(r) = v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

dans le cadre d'un tube cylindrique, et

$$v(y) = v_{max}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

dans le cas de deux plaques parallèles.

Pour un fluide non-visqueux ($\eta = 0$), l'équation de Bernoulli implique que la vitesse moyenne $\bar{v}$ est constante.

Cependant, pour un fluide visqueux, on observe une chute de pression $p_1 - p_2$ correspondant au travail des forces de viscosité (frottements) entre les sections 1 et 2. Cette chute de pression $\Delta P = p_1 - p_2$ est appelée perte de charge.

Dans un tube cylindrique (tuyau), la perte de charge est proportionnelle à la longueur L du tuyau ainsi qu'à la vitesse moyenne $\bar{v}$ de l'écoulement.

La perte de charge par unité de longueur est la perte de charge linéïque $\frac{\partial p}{\partial x}$ Si cette perte de charge est constante (la section du tube ne varie pas), $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta P}{L}$.

[2]La vitesse moyenne $\bar{v}$ dépend de la dimension du tuyau (rayon R) et de la viscosité η du liquide. Nous avons donc que $\bar{v} = k\frac{\Delta P}{L}$ où k est un coefficient de proportionnalité sans dimensions. Or, on sait que $F = \eta S \frac{dv}{dr}$ où r est la distance où se trouve un élément de fluide par rapport au centre du tube et S la surface de la section droite du tube. Donc, $p = \frac{F}{S} = \eta\frac{\bar{v}}{k(R-r)}$ et il vient $\frac{\Delta p}{L} = \frac{\partial p}{\partial r} = \eta\frac{\bar{v}}{k(R-r)^2}$. Dès lors, on peut écrire le débit, avec $k = 8$,

$$Q = \bar{v}S = \frac{R^2\Delta P}{8\eta L}\pi R^2 = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$$

qui est l'expression de la loi de Poiseuille dans le cas d'un tube cylindrique de rayon R.

On considère donc deux problèmes différents qui donnent lieu à un écoulement de Poiseuille :

- L'écoulement dans un tube de section circulaire et de rayon constant R, que nous venons de résoudre.
- L'écoulement entre deux plaques planes et parallèles, distantes de h. Ce calcul permet notamment d'évaluer la force entre deux objets (par exemple deux disques) immergés dans un fluide visqueux et s'approchant à une vitesse donnée. On a

  $$\bar{v} = \frac{h^2\Delta P}{4\eta L}$$

  Ce cas est plus complexe et ne sera pas traité ici.

2.3 Nombre de Reynolds

L'expérience [3] indique qu'il existe une combinaison de quatre facteurs déterminant si un écoulement est laminaire ou turbulent. Ces facteurs sont résumés par le nombre de Reynolds Re.

Le nombre de Reynolds caractérise un écoulement, et en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent etc. ...). Il représente le rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses ou le rapport (qualitatif) du transfert par convection par le transfert par diffusion de la quantité de mouvement. Il est le plus important nombre sans dimension en dynamique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il s'énonce généralement de la façon suivante :

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta}$$

ou bien

2. Ce paragraphe manque cruellement de rigueur (il s'agit plus de mathémagie que d'autre chose), mais une analyse dimensionnelle et une démonstration rigoureuse seraient plus longues et nécessiteraient des outils plus puissants non adaptés au cours (de plus, pensons à nos amis les arbres). En outre, une expression exacte de $\bar{v}$ peut être obtenue de façon rigoureuse, en considérant les forces appliquées à chaque couche cylindrique du fluide. Cette approche implique le calcul de quelques intégrales et nous amène d'ailleurs à déterminer la valeur de la constante $k = 8$.

3. Jusqu'à présent, rien d'autre à ma connaissance.

$$Re = \frac{\bar{v}D}{\nu}$$

où
- $\bar{v}$ = vitesse moyenne du fluide (m/s),
- D = dimension caractéristique (m) du phénomène :
  - diamètre pour une conduite (de section circulaire le plus souvent), diamètre hydraulique.
  - dimension jugée la plus pertinente pour une conduite ou un obstacle de forme quelconque,
  - abscisse depuis le bord d'attaque pour une plaque plane ou un profil d'aile.
- ρ = (rho) masse volumique du fluide (kg/m^3),
- η = (êta) viscosité dynamique du fluide ($Pa.s$),
- ν = (nu) viscosité cinématique du fluide : $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (m^2/s).

Le nombre de Reynolds peut s'écrire de la manière suivante :

$$Re = \frac{\frac{\rho\bar{v}^2}{D}}{\frac{\eta\bar{v}}{D^2}}$$

Il s'interprète alors comme le rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses. Il s'agit donc d'un nombre sans dimensions.

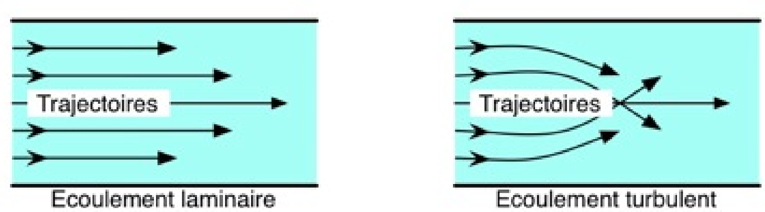


FIGURE 2.3 – Illustration d'un écoulement laminaire et turbulent.

On distingue quatre principaux régimes.
- Laminaire (Stokes) : Aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1), les forces de viscosité sont prépondérantes, l'accélération convective étant négligée. On parle d'écoulement de Stokes. L'écoulement est laminaire (des éléments de fluide voisins demeurent voisins). De plus, comme l'inertie est négligeable, l'écoulement du fluide est réversible. Cela donne lieu à des comportements surprenants : si les forces extérieures sont soudainement stoppées, le fluide s'arrête immédiatement. Qui plus est, si les forces extérieures sont inversées, le fluide repart en sens inverse [4].
- Laminaire : Aux faibles valeurs du Reynolds (entre 1 et 2000 environ), les forces d'inertie sont prépondérantes, mais l'écoulement reste laminaire. Cependant, il n'est plus réversible : si l'on stoppe les forces extérieures, le fluide continue partiellement sur sa lancée.
- Instable : Aux valeurs intermédiaires du Reynolds (entre 2000 et 3000), les forces d'inertie deviennent importantes. Entre les régimes laminaire et turbulent, on parle dont de régime transitoire (instable).

4. Dans une célèbre expérience de G. I. Taylor, une goutte d'encre, intialement mélangée dans un fluide visqueux, se reconstitue lorsqu'on a inversé le mouvement.

– Turbulent : Aux fortes valeurs du Reynolds (au-delà d'environ 3000, voir plus haut), les forces d'inertie sont si importantes que l'écoulement devient turbulent. Entre les régimes laminaire et turbulent, on parle de régime transitoire.

2.3.1 Exemples

– Dans une conduite, l'écoulement est laminaire lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur critique pour laquelle se produit une transition assez brutale vers le turbulent. 2300 est la valeur généralement retenue pour cette transition mais, dans des conditions soignées (paroi particulièrement lisse, stabilité de la vitesse), la transition peut se produire pour une valeur plus élevée. On considère souvent que la transition peut se produire entre 2000 et 3000.

– Sur un cylindre à section circulaire placé dans un écoulement, on obtient un écoulement proprement laminaire qui s'ajuste parfaitement à l'obstacle jusqu'à un nombre de Reynolds de l'ordre de 1. Un sillage turbulent apparaît à l'aval aux environs de 10^5. Entre les deux, la transition se fait à travers diverses formes de sillages tourbillonnaires.

– Avec une plaque plane située dans le lit de l'écoulement, la dimension caractéristique n'est plus l'épaisseur de celle-ci mais la distance d'un point au bord d'attaque. En effet une couche limite, dans laquelle interviennent la viscosité ou la turbulence, se développe à partir du bord d'attaque. Si celui-ci présente une arête émoussée, la couche limite est turbulente dès le début. Dans le cas d'un bord effilé, la couche limite est laminaire sur une certaine longueur, plus turbulente ensuite. Ce caractère laminaire se maintient jusqu'à la distance qui correspond au Reynolds critique de l'ordre de 5.10^5, la zone située au delà développant une couche limite turbulente.

– Pour un profil d'aile, la distribution d'épaisseur le long de la corde (et le gradient de pression négative associé) de certains profils dits « laminaires » stabilise la laminarité et permet de reculer le point de transition bien au delà de 5.10^5 : des valeurs de 7.10^6 sont possibles dans des conditions aérologiques non turbulentes (difficiles à obtenir en soufflerie) sur une surface parfaitement lisse (ailes de planeurs).

– Un corps profilé comme un fuselage (Piaggio P180 Avanti) peut avoir une transition reculée jusqu'à 5.10^7, dans des conditions idéales également.

– Les modifications de régime d'écoulement entraînées par la compression d'une artère, en règle l'artère humérale, lors de la prise de la pression artérielle sont responsables d'un bruit (« bruits de Korotkoff ») et permettent, par l'auscultation de l'artère en aval de la compression, de connaitre la pression systolique -apparition du bruit-, et la pression diastolique -disparition du bruit.

2.3.2 Remarque : la similitude des fluides

Deux écoulements à géométrie équivalente pour lesquels les nombres de Reynolds sont égaux sont dits semblables. Pour qu'une expérience de modèle réduit d'un écoulement donne bien un écoulement semblable (c'est-à-dire identique à changements d'échelles de temps, de distance et de masse près) à l'écoulement en grandeur nature, il faut que :

$$Re^\star = Re \quad \text{et} \quad \frac{p^\star}{\rho^\star \bar{v}^{\star 2}} = \frac{p}{\rho \bar{v}^2}$$

Les valeurs marquées d'une astérisque « * » font référence à l'écoulement dans le modèle réduit et les autres valeurs à l'écoulement en grandeur nature. Ceci est utile pour les expériences sur les modèles réduits en veine liquide ou en tunnel aérodynamique où on récupère les données pour les écoulements en grandeur réelle. Il est à noter que, pour les fluides compressibles, les nombres de Mach doivent aussi être égaux pour les deux fluides afin qu'ils puissent être considérés comme équivalents. De manière générale, il faut que les nombres sans dimension caractéristiques de l'écoulement soient identiques dans les deux écoulements.

2.4 Ecoulement dans un tuyau : facteur de friction - Équation de Darcy-Weisbach

Ecrivons tout d'abord l'équation de Bernoulli :

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2$$

Si la viscosité du fluide n'est pas négligeable, l'équation comporte un terme supplémentaire de perte de charge P_{charge} proportionnelle au facteur de friction f du fluide :

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = z_2 - z_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + P_{charge}$$

Si l'on considère un fluide s'écoulant dans un tuyau cylindrique de longueur L et de diamètre constant D, les vitesses v_1 et v_2 sont égales et, expérimentalement, la perte de charge vaut

$$P_{charge} = f \frac{L\bar{v}^2}{2Dg}$$

Donc, dans ce cas, l'équation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = z_2 - z_1 + f \frac{L\bar{v}^2}{2Dg}$$

Il s'agit de l'équation de Darcy-Weisbach qui est une importante équation très utilisée en hydraulique. Elle permet de calculer la perte de charge due à la friction dans une conduite.

Si l'écoulement est laminaire, le facteur de friction vaut $f = \frac{64}{Re}$ et dans le cas d'un écoulement turbulent, il vaut $f = \frac{1}{Re^{\frac{1}{4}}}$.

2.5 Loi de Stokes et sédimentation

Lorsqu'un fluide visqueux s'écoule lentement en un lieu étroit ou autour d'un petit objet, les effets visqueux dominent sur les effets inertiels. Son écoulement est alors appelé écoulement de Stokes (et on parle parfois de fluide de Stokes par opposition à fluide parfait). Il est en effet régi par une version simplifiée des équations de Navier-Stokes : les équations de Stokes, dans laquelle les termes inertiels sont absents. Le nombre de Reynolds mesure le poids relatif des termes visqueux et inertiel dans les équations de Navier-Stokes. L'écoulement de Stokes correspond ainsi à un faible nombre de Reynolds (beaucoup plus petit que 1).

Donc, pour résumer, considérons un fluide visqueux s'écoulant, à la vitesse v autour d'une sphère (de rayon R) au repos dans des conditions telles que $Re < 1$ (ou que ce soit la sphère qui se déplace lentement, à la vitesse v dans le fluide au repos). Cette sphère subit une force résistante F_R (de freinage, si c'est elle qui se déplace dans le fluide) due à la friction du liquide.

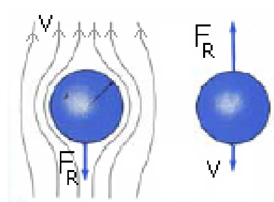


FIGURE 2.4 – Force résistante ; à gauche, le fluide se déplace autour de la sphère au repos et à droite, la sphère se déplace dans le fluide au repos.

L'expression de cette force F_R n'est simple que dans le cas d'une sphère, aussi, nous n'étudierons que ce cas particulier.

En utilisant l'analyse dimentionnelle et en se basant sur l'expérience (loi empirique), la loi de Stokes donne l'expression de la force résistante :

$$F_R = 6\pi R\eta v$$

où R est le rayon de la sphère, v sa vitesse et η la viscosité (dynamique) du fluide.

Prenons l'exemple d'une petite bille que l'on lâche dans un seau d'eau. Quelles sont les forces agissant sur la bille ?

- Gravité (poids) : $G = mg$ où m est la masse de la bille.
- Poussée d'Archimède : $P_A = \rho_l g \frac{4\pi}{3} R^3$ où ρ_l est la masse volumique du liquide.
- Force résistante : $F_R = 6\pi R\eta v$. (Dans un cas plus général que la sphère, on emploie $F_R = \phi R\eta v$ et on définit ϕ.)

On lâche la bille sans vitesse initiale, donc $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, $r_0 = 0$. La bille tombe vers le bas (dans le fluide). La résultante des forces s'appliquant à la bille vaut donc $R = G - P_A - F_R$ si celle-ci coule.

La bille subit donc une accélération croissante jusqu'à ce que la force résistante, qui est proportionnelle à la vitesse, et la poussée d'Archimède compensent la gravitation. Après un certain temps, l'accélération

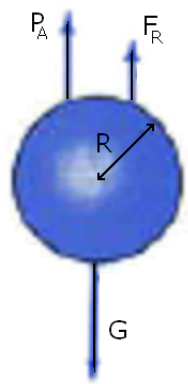


FIGURE 2.5 – Sédimentation : illustration

résultante subie par la bille étant nulle (les forces dirigées vers le haut, P_A et F_R, sont égales à la gravitation G), celle-ci atteint une vitesse constante appelée *vitesse limite de chute* ou *vitesse de sédimentation.*

2.5.1 Calcul de la vitesse de sédimentation

Si l'on suppose que les forces de gravitation, de la poussée d'Archimède et de résistance s'égalisent, on a, dans le cas d'une bille, de rayon R et de masse volumique ρ_b, lâchée avec une vitesse initiale dans un fluide de masse volumique ρ_f, l'équation

$$\begin{aligned} F_R + P_A = G \quad &\Leftrightarrow \quad 6\pi R\eta v_{lim} + \rho_f g \tfrac{4\pi}{3} R^3 = \rho_b g \tfrac{4\pi}{3} R^3 \\ &\Leftrightarrow \quad 6\eta v_{lim} = \rho_b g \tfrac{4}{3} R^2 - \rho_f g \tfrac{4}{3} R^2 \\ &\Leftrightarrow \quad v_{lim} = (\rho_b - \rho_f) \tfrac{2}{9} R^2 \end{aligned}$$

Donc, la vitesse limite vaut $v_{lim} = (\rho_b - \rho_f)\frac{2}{9}R^2$

Lorsque la loi de Stokes est applicable, la détermination expérimentale de la viscosité η se fait en mesurant le temps nécessaire à un mobile pour parcourir une certaine distance dans un mouvement rectiligne uniforme (une fois sa vitesse limite atteinte). (Le rayon de la sphère se mesure avec un palmer et les masses volumiques de la bille et du liquide se mesurent avec un picnomètre.)

Si la sédimentation se fait sous une autre accélération a que la pesanteur g (exemple : force électromagnétique), la vitesse de sédimentation s'écrit

$$v = \frac{2}{9} a \frac{R^2(\rho_b - \rho_l)}{\eta}$$

Le rapport $s = \frac{v}{a} = \frac{\text{vitesse de sédimentation}}{\text{accélération}} = \frac{2}{9}\frac{R^2(\rho_b - \rho_l)}{\eta}$ est appelé *constante de sédimentation* s et s'exprime en s (cette constante a les dimensions d'un temps).

Dans le cas de sédimentation de macromolécules, les valeurs de la constante s sont faibles et on l'exprime par l'intermédiaire d'une unité appelée SVEDBERG (S) et $1S = 10^{-13}$ secondes.

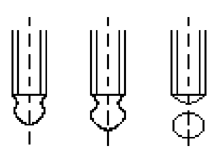
Chapitre 3

Propriétés dues aux interactions moléculaires

3.1 Tension superficielle

3.1.1 Existence d'une tension superficielle

Une goutte d'eau à l'extrémité d'un compte-gouttes se déforme de façon continue, adhère au compte-goutte jusqu'à ce qu'elle atteingne une certaine masse, puis elle tombe.



Des gouttelettes de mercure qui tombent sur du verre rebondissent et se comportent comme des petites billes.

Tout se passe comme si les liquides étaient entourés d'une gaine ayant les propriétés d'une membrane élastique tendue. Cette propriété se traduit par l'existence d'une tension superficielle.

La tension superficielle, ou énergie d'interface, ou énergie de surface, est la tension qui existe à la surface de séparation de deux milieux.

Cet effet permet par exemple aux insectes de marcher sur l'eau, à la rosée de ne pas s'étaler sur les pétales de fleurs, et explique la capillarité. La tension superficielle explique aussi la formation des bulles de savon.

FIGURE 3.1 – Formation d'une goutte d'eau.

3.1.2 Interprétation moléculaire

Si l'huile et l'eau ne se mélangent pas, c'est qu'une molécule d'huile est mal à l'aise d'ans l'eau, et une molécule d'eau est mal à l'aise dans l'huile. Mal à l'aise, ça veut dire que la molécule d'huile a tendance à être attirée par d'autre molécules d'huile et à être repoussée par les molécules d'eau, et vice-versa. Ou, pour parler en termes physiques et chimiques, l'énergie chimique d'une molécule d'huile est plus grande dans l'eau que dans l'huile, et vice-versa.

Les molécules d'un liquide sont donc soumises à des forces de cohésion attractives qui tiennent les molécules au voisinage les unes des autres. (force de Van der Waals (attraction), force électrostatique (attraction ou répulsion).) [1]

Ces forces de cohésion décroissent avec la distance et on peut admettre qu'elles deviennent négligeables quand la distance entre les deux molécules devient de l'ordre de 10^{-2} μm.

La distance à laquelle les forces de cohésion deviennent négligeables est appelé *rayon d'action moléculaire*.

Dans le vide, une molécule n'est, par contre attirée par rien. Donc, à la frontière liquide-vide, les molécules sont attirées côté liquide mais pas côté vide. La résultante des forces s'exerçant sur les molécules de la surface est donc dirigée vers l'intérieur du liquide. Ceci tend la surface du liquide.

Mais on sait que soumis au vide, une partie du liquide s'évapore. Si cette pression de gaz est faible, le liquide est soumis à une faible compression, et les molécules de la surface sont également soumises à une faible attraction de la part de leurs paires de la phase gazeuse. Mais la densité du gaz étant très inférieure à celle du liquide, cette attraction est négligeable.

Si maintenant il y a un autre gaz au-dessus (par exemple de l'air), le phénomène est similaire. Le liquide est soumis à la pression du gaz, et les molécules à la surface du liquide sont soumises à l'attraction

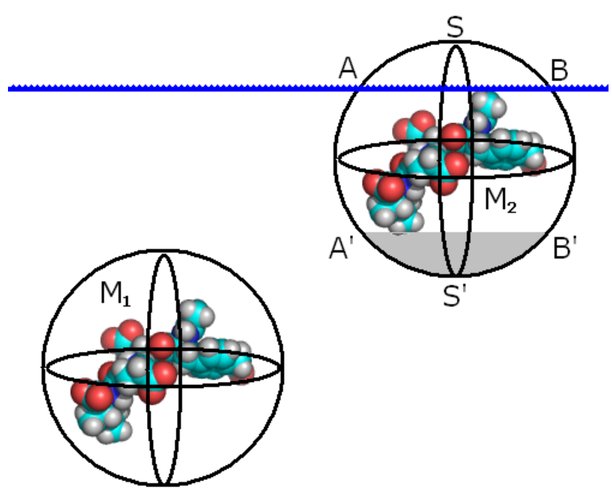
1. Dans les gaz, ces forces sont faibles et tendent à disparaître lorsque la pression diminue (les gaz se comportent alors comme des gaz parfaits).

ou à la répulsion de la part des molécules du gaz. Du fait de la faible densité du gaz par rapport au liquide, on néglige en général cette dernière contribution.

La forme de la surface résulte donc de l'équilibre entre la pression du gaz, l'attraction par l'intérieur du liquide, et le poids si l'on est en présence de pesanteur.

Notons que le liquide peut être sous la forme d'une pellicule. Cette pellicule est alors soumise à la pression du gaz des deux côtés. Si les forces d'attraction au sein du liquide sont faibles, la pellicule ne tient pas. À l'inverse, si ces forces sont fortes, la pellicule tient bien et a un comportement élastique (bulle de savon).

Soit M_1 une molécule et sa sphère d'action.



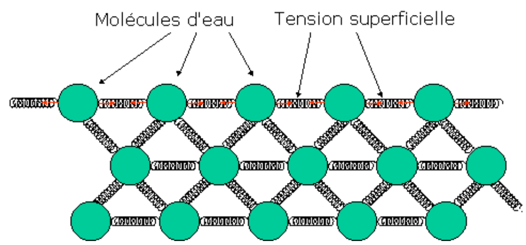
Prenons M_1 telle que la sphère d'action soit entièrement contenue dans le liquide. La molécule est soumise de la part des molécules voisiones à des forces d'attraction ayant toutes les directions et qui s'équilibrent par symétrie.

Par contre, une molécule M_2 située à une distance de la surface inférieure au rayon d'action moléculaire est soumise à des forces d'attraction de résultante non nulle.

Les forces d'attraction dues aux molécules situées dans la partie $A'P'B'$ de la sphère d'action ne sont pas compensées par une force égale et opposée puisque la partie symétrique APB est en dehors du liquide.

Donc, le liquide exerce sur M_2 une force dirigée vers l'intérieur. Si l'on veut amener les molécules de l'intérieur du liquide vers la surface, il faut dépenser du travail. C'est-à-dire que si l'on augmente la surface libre du liquide par l'introduction dans la couche superficielle de molécules, on le fait en dépensant du travail. On exprime cela en disant que la surface du liquide possède une énergie proportionnelle à sa surface.

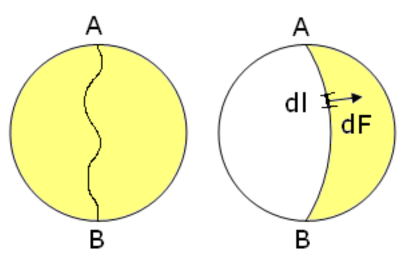
Si l'on veut accroître la surface du liquide en exerçant une traction parallèlement à son plan (force tangentielle à ne pas confondre avec les forces de cohésion), il faut dépenser un travail correspondant



à l'accroissement d'énergie potentielle comme si l'on voulait augmenter la surface d'une membrane en caoutchouc tendue. Ce travail dW est proportionnel à la variation de surface dA. On a $dW = T\ dA$ où T est la *tension superficielle* du liquide. Il s'agit d'une énergie par unité de surface J/m^2.

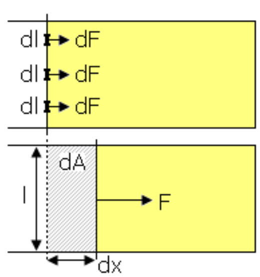
3.1.3 Tension superficielle : définition

Certaines expériences permettent de mettre en évidence la tension superficielle. On peut obtenir une pellicule d'eau savonneuse à l'intérieur d'un anneau métallique auquel on fixe un fil non tendu entre les points A et B. Si on rompt la pellicule d'un côté du fil, on voit l'autre partie de la pellicule tendre le fil pour avoir la plus petite surface possible.



La pellicule d'eau savonneuse exerce sur un petit élément de longueur dl du fil une force tangentielle dF normale à dl.

On peut faire une expérience analogue avec une tige mobile de longueur l pouvant glisser sur deux côtés d'un cadre rectangulaire.



Le rétrécissement de la membrane liquide entraîne un déplacement $d\vec{x}$ de la tige mobile qui effectue un travail $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$.

Il convient de remarquer qu'une membrane liquide est en fait une mince couche de liquide limitée par une face supérieure et une face inférieure et que ce sont ces deux surfaces qui se rétrécissent.

Le travail effectué par chacune des deux surfaces peut s'exprimer par

$$dW = \sigma\ dA = \sigma\ l\ dx$$

La force s'exerçant sur la tige mobile vaut donc $F = \sigma\ l$. D'où

$$\sigma = \frac{F}{l}$$

La tension superficielle σ peut aussi être considérée comme une force tangentielle par unité de longueur. C'est sous cette forme qu'on exprime l'unité de tension superficielle $\frac{N}{m}$ dans le système internationnal.

La tension σ dépend

- de la nature du liquide,
- de la nature du gaz avec lequel le liquide est en contact,
- de la température.

Faisons l'expérience suivante : on place une boucle S de coton dans de l'eau (pure). On dépose ensuite, dans S, une goutte de solution savoneuse. La boucle prend alors une forme circulaire, donc, un élément d'arc dl quelconque de cette boucle est donc soumis à une force dF orientée vers l'extérieur.

Soient σ la tension de l'eau pure et σ' la tension de l'eau savonneuse ($\sigma > \sigma'$). On a les forces $dF = \sigma\ dl$ et $dF' = \sigma'\ dl$. Donc,

$$dF_{tot} = dF - dF' = (\sigma - \sigma')\ dl$$

L'ensemble des forces dF_{tot}, s'exerçant sur chaque élément dl, aura pour effet de tendre la boucle et de lui conférer un aspect circulaire.

Les valeurs suivantes sont tirées du polycopié de Broch :

eau	0^oC	$\sigma = 7,6.10{-}2\ N/m$
	20^oC	$\sigma = 7,3.10{-}2\ N/m$
	37^oC	$\sigma = 7,0.10{-}2\ N/m$
plasma sanguin	37^oC	$\sigma = 7,3.10{-}2\ N/m$
mercure	20^oC	$\sigma = 4,36.10{-}1\ N/m$

Un certain nombre d'autres expériences simples permettent de mettre en évidence la tension superficielle :

- Ménisque de l'eau dans un verre : lorsque l'on met de l'eau dans un verre, l'eau remonte d'environ un millimètre le long de la paroi. Ceci est particulièrement visible dans le cas d'un tube à essai (environ 1 cm de diamètre). À l'inverse, on peut faire dépasser la surface de l'eau du bord du verre sans qu'elle ne s'écoule en dehors de celui-ci.

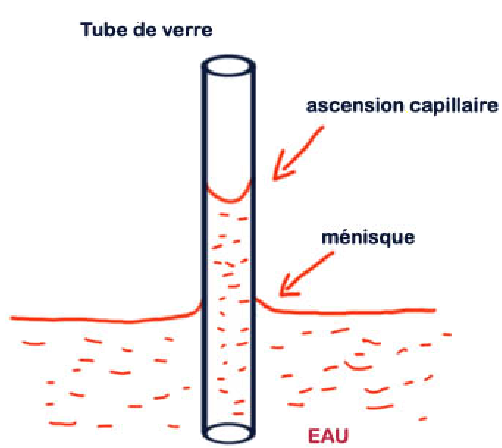
– Goutte qui pend sans tomber : c'est la tension superficielle qui retient la goutte au support. La masse de la goutte qui tombe d'un compte-goutte est donnée par la loi de Tate [2].
– Propulsion à l'huile ou au savon.
– Un liquide peut monter dans un tube fin : loi de Jurin (voir plus loin).
– Fontaine de soda : dans un soda, les molécules du gaz carbonique dissout sont solvatées, les molécules d'eau forment un bouclier autour du CO_2. Si l'on secoue la bouteille, on vainc la tension superficielle du bouclier et les molécules de CO_2 se regroupent pour former des bulles. On peut aussi utiliser une poudre : les petits grains abaissent la tension superficielle, on peut par exemple mettre des chewing-gums ou des mentos.

3.2 Capillarité

3.2.1 Tube capillaire

La capillarité est l'étude des interfaces entre deux liquides non miscibles, entre un liquide et l'air ou entre un liquide et une surface. Elle est mise en oeuvre lorsque les buvards aspirent l'encre, ou quand les éponges s'imbibent d'eau.

Elle est plus connue par l'effet d'un liquide à forte tension superficielle remontant contre la gravité dans un tube très fin, dit tube capillaire. La tension superficielle est proportionnelle à la force de cohésion intermoléculaire du liquide concerné. Plus les molécules du liquide ont une cohésion forte, plus le liquide est susceptible d'être transporté par capillarité.



2. La loi de Tate est la loi permettant de calculer la masse d'une goutte sortant d'un compte-goutte. Cette loi s'exprime par

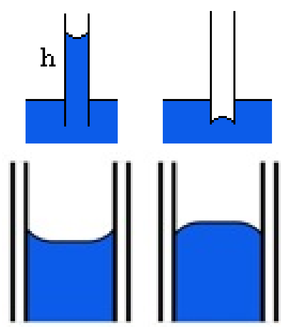
$$m = k\frac{\sigma r}{g}$$

où m est la masse de la goutte, σ est la tension superficielle du liquide, r est le rayon de l'orifice du compte-goutte, g est l'intensité de la pesanteur et k est le coefficient de forme du compte-goutte (coefficient numérique).

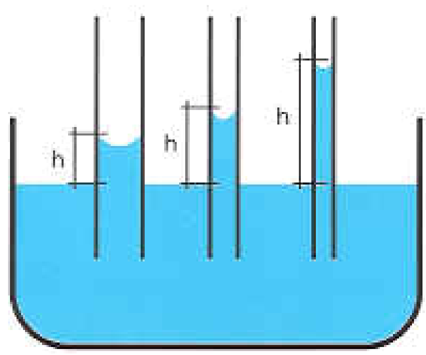
L'eau possède une forte cohésion entre ses molécules : elle adhère aux surfaces du tube, puis ses molécules sont attirées sur la partie de la surface du tube immédiatement au-delà, et par répétition de ce phénomène l'eau monte ainsi le long du tube. L'article tension superficielle décrit comment calculer la hauteur à laquelle monte le liquide dans un tube capillaire grâce à la loi de Jurin.

Sur du verre très propre l'eau forme un film plutôt que des gouttes car les forces d'adhésion entre le verre et l'eau sont plus fortes que celles de cohésion de l'eau.

Dans le cas du mercure, le phénomène est différent. En effet, lorsqu'on dispose un tube capillaire verticalement dans un récipient d'eau, le niveau d'eau est plus grand dans le tube qu'à l'extérieur et le ménisque est concave vers l'intérieur. Lorsqu'on utilise du mercure à la place de l'eau, on constate que le niveau de mercure dans le tube capillaire est inférieur à celui du récipient et que le ménisque est convexe vers l'intérieur.



Lorsqu'on utilise des tubes capillaires de sections différentes, on constate que la différence de niveaux entre le liquide du tube et celui du récipient diminue quand le diamètre du tube augmente.



3.2.2 Forme du ménisque

Soit une molécule M dans le voisinage de la surface du liquide et de la paroi du récipient.

Soit $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ la force résultante à laquelle est soumise la molécule M (en négligeant son poids).

Si $\vec{F}$ est dirigée obliquement vers l'intérieur du liquide, c'est l'effet d'attraction du liquide qui l'emporte sur celui du récipient. C'est le cas du mercure et du verre.

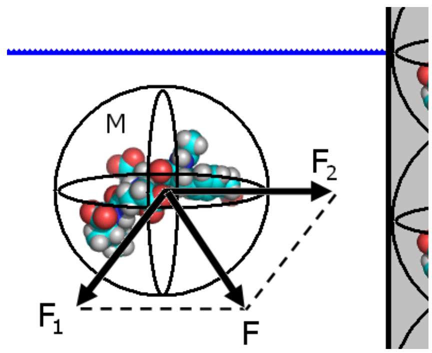
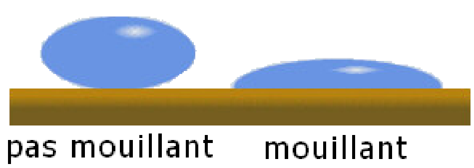


FIGURE 3.2 – Au voisinage de la surface du liquide et de la paroi du récipient, une molécule M est soumise, par le liquide, à une force $\vec{F_1}$ et, par les molécules de la paroi du récipient, une force F_2.

Lorsqu'on vide le récipient, les molécules n'adhèrent pas à la paroi : le liquide ne mouille pas le récipient.

Si $\vec{F}$ est dirigée obliquement vers l'extérieur, c'est l'effet d'attraction de la paroi qui l'emporte sur celui du liquide. C'est le cas de l'eau et du verre.

Lorsqu'on vide le récipient, les molécules adhèrent à la paroi : le liquide mouille le récipient.

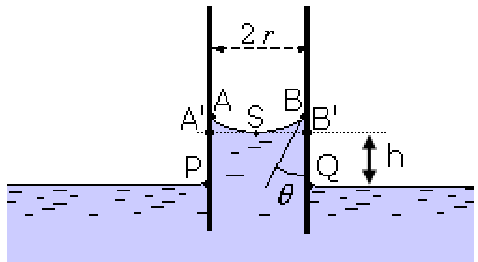


3.2.3 Loi du Jurin

Nous avons vu précédemment que, dans un tube capillaire en verre, la hauteur de la colonne liquide soulevée (eau) ou celle de la dépression du liquide diminuait quand le diamètre du capillaire augmentait.

Cas d'un liquide mouillant le récipient (eau et verre)

Dans le cas d'un liquide mouillant le récipient, considérons un tube capillaire circulaire vertical de rayon r. Appelons h la différence de hauteur entre le sommet S du ménisque ASB et le plan de la surface



libre du liquide dans le récipient.

Exprimons que la colonne de liquide dans le capillaire située au-dessus du plan de la surface libre du liquide est en équilibre.

Les composantes horizontales des forces agissant sur la colonne ont une résultante nulle (par symétrie).

Il suffit donc, pour exprimer l'équilibre de la colonne, d'écrire que la somme des composantes verticales des forces agissant sur la colonne est nulle.

La surface libre du liquide semble se raccorder au tube par un contour circulaire de longueur $2\pi r$. En fait, la surface libre du liquide se prolonge au-dessus de AB par une couche très mince qui exerce sur la colonne une force résultante F verticale orientée vers le haut égale à

$$F = \int \sigma ds = 2\pi r\sigma \cos\theta$$

Si $r << h$, on peut considérer que le poids de la colonne de liquide soulevée est égal au poids de la colonne cylindrique $A'B'CD$.

Soit ρ la masse volumique du liquide. Le poids P de la colonne est donc égal à

$$P = \pi r^2 h\rho g$$

Les pressions sur CD et sur ASB s'équilibrent si on néglige la poussée d'Archimède de l'air sur le liquide soulevé par rapport au poids de ce dernier.

On a donc

$$\begin{array}{rrcl} & F & = & P \\ \Leftrightarrow & 2\pi r\sigma\cos\theta & = & \pi r^2 h\rho g \\ \Rightarrow & h = \frac{2\pi\sigma\cos\theta}{\pi r\rho g} & & \end{array}$$

Il s'agit de l'expression de la loi de Jurin :

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g}$$

qui exprime que la hauteur d'ascension d'un liquide dans un tube cylindrique varie en fonction de l'inverse du rayon du tube. (On a négligé l'angle θ.)

Remarquons que pour mesurer la tension superficielle d'un liquide, on utilise la loi de Jurin sous la forme

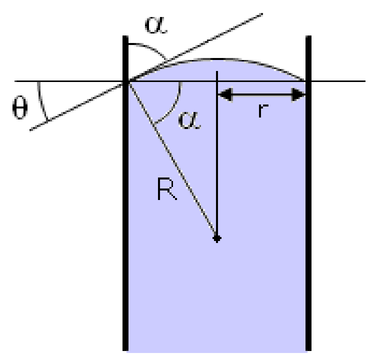
$$\sigma = \frac{1}{2} r\rho g h$$

Cas d'un liquide ne mouillant pas le récipient (mercure et verre)

Lorsque le tube d'un baromètre est fin, le phénomène de capillarité peut être une source d'erreur sur la mesure de la pression.

Quand $r << h$ de telle sorte qu'on peut assimiler le ménisque à une calotte sphérique correspondant à une sphère de rayon R ($r = R\cos\alpha$), sous les mêmes considérations que précédemment, on peut démontrer que

$$h = \frac{2\sigma\cos\alpha}{r\rho g}$$



Lorsque la dénivellation h n'est pas assez grande par rapport au rayon r du tube, le ménisque s'aplatit et l'erreur sur la hauteur barométrique devient négligeable.

3.2.4 Exemples et applications

– Capillarité :

L'effet lotus est un phénomène physique d'interactions entre des gouttelettes d'eau et une surface hydrophobe utilisé par certaines plantes pour nettoyer la surface de leurs feuilles, tout en les maintenant « sèches ». Cette particularité est présente dans la famille du lotus qui, malgré son développement dans des rivières et des lacs boueux, arrive à conserver des feuilles propres.

La structure microscopique de la surface et les propriétés chimiques de la plante font que ses feuilles ne sont jamais mouillées. Au contraire, les gouttes d'eau roulent à la surface de la feuille, emportant avec elles des débris, insectes et des poussières.

Cet effet est observable également chez certains animaux (pattes du gerris, petit insecte marchant sur l'eau grâce à cela).

- Tensio-actifs :

  Si l'énergie d'interface entre un solide et l'eau est forte, alors l'eau ne s'étale pas et reste sous forme de goutelette ; c'est ainsi que, comme le montre une célèbre publicité de lessive, « les synthétiques laissent glisser l'eau ». On peut alors ajouter un produit dans l'eau qui diminue l'énergie d'interface ; la goutte s'étale alors et peut pénétrer dans le tissus. On appelle ces produits des « tensio-actifs ».

  Les émulsifiants sont des tensio-actifs : si vous laissez reposer une vinaigrette, les gouttes d'huile se regroupent (cf. §3) et forment bientôt une couche d'huile. Si l'on veut garder l'huile sous la forme de petites gouttelettes, ou émulsion, il faut diminuer la tension superficielle afin que le gain d'énergie de surface lorsque deux gouttes se réunissent soit faible. C'est ainsi que les vinaigrettes du commerce sont sous forme d'émulsion alors que la vôtre faite maison se sépare en quelques minutes.

  Les tensio-actifs permettent aussi de stabiliser les bulles. Si vous soufflez dans un verre d'eau avec une paille, la bulle, lorsqu'elle atteint la surface, crève. Si maintenant vous mettez du sirop dans l'eau, lorsqu'elle atteint la surface, la bulle reste. L'augmentation de surface due à la présence de la bulle ne provoque pas une grande augmentation d'énergie car le tension superficielle est faible. Donc la bulle est stable. Si vous avez bien suivi, les lessives contenant des tensio-actif, elles forment des bulles facilement, d'où la mousse.

- Le surfactant pulmonaire est une lipoprotéine sécrétée continuellement par les pneumocytes de type 2. Son rôle est de réduire la tension superficielle crée par la fine couche de liquide se trouvant à la surface des alvéoles pulmonaires. La réduction de la tension superficielle facilite l'expansion des alvéoles à l'inspiration. Il est éliminé en permanence, ce qui leur apporte un renouvellement constant. Leur demi-vie est de quelques dizaines d'heures.

  Comme beaucoup de lipoprotéines, elle comporte un pôle hydrophile et un pôle hydrophobe, cela lui permet donc de se comporter comme un film superficiel.

  Le manque de surfactant est la cause du syndrome du syndrome de détresse respiratoire aiguë.

- Surfusion :

  Lorsque l'on réchauffe de la glace à pression atmosphérique, celle-ci fond à 0^oC. Mais lorsque l'on refroidit de l'eau, celle-ci gèle en-dessous de 0^oC. En effet, lorsque l'on forme le premier petit cristal de glace, on crée une interface solide-liquide, donc de l'énergie d'interface. Or, plus on descend en température, plus l'énergie d'interface eau liquide-glace est faible. Ainsi, il est plus facile de créer un premier cristal de glace lorsque la température est plus basse que 0^oC.

  On peut voir aussi cela de la manière suivante : si un petit cristal se forme, il est dissout par l'agitation de l'eau. Plus il fait froid, plus l'eau est calme, donc plus il sera facile de former un cristal.

Lorsque l'on introduit un défaut (poussière, aspérité, ...) ceci permet également d'amorcer la cristallisation plus facilement, et d'annuler l'«effet retardant» de la tension superficielle.

- Pourquoi les bulles de champagne montent toujours du même endroit du verre ? Car le verre présente à cet endroit une aspérité qui diminue l'énergie d'interface gaz-liquide, et permet plus facilement à une bulle de se former.

- Pourquoi aux labos de chimie organique, le fait de gratter le fond du Becher (ou ballon, ou Erlen-Meyer, selon les goûts de chacun) facilite la cristallisation ? Car on crèe des aspérités qui facilitent la formation du premier cristal.

Chapitre 4

Exercices

4.1 Fluides non-visqueux

4.1.1 Poussée d'Archimède

Exercice 1

Un homme de 75 kg flotte dans l'eau douce. La quasi-totalité de son corps se trouve sous la surface. Quel est son volume ?

Exercice 2

Un objet pèse 100 N dans l'air et 75 N dans l'eau. Quelle est la densité de cet objet ?

Exercice 3

Un réservoir d'eau placé sur une balance pèse 200 N. On y introduit un saumon d'un poids de 12 N qui nage dans le réservoir (poids apparent). Quelles sont les mesures relevées sur la balance, sachant que la densité du saumon vaut environ $1,23$?

Exercice 4

Un ballon a une capacité de $0,1$ m^3. Rempli d'hélium, quel poids peut-il soulever ? Utiliser les masses volumiques de l'hélium et de l'air données dans les conditions normales (voir cours).

Exercice 5

On laisse tomber une bûche de 40 kg dans une rivière à 0^oC. Si la bûche a une densité de $0,8$, quelle fraction de son volume émergera-t-il de l'eau ?

Exercice 6

Pour déterminer la densité du sucre soluble dans l'eau, on le plonge dans du benzène. Un morceau de sucre ayant un poids de $0,222\ N$ dans l'air a, dans le benzène, un poids apparent de $0,045\ N$. Calculer la masse volumique et la densité du sucre sachant que la densité du benzène vaut $878\ kg/m^3$.

Exercice 7

Une bille de cuivre est creuse. Son poids est de $5\ N$ dans l'air et son poids apparent est de $4,1\ N$ lorsqu'elle est immergée dans l'eau. Calculer le volume du creux intérieur de la bille, sachant que la masse volumique du cuivre vaut $8,94.10^3\ kg/m^3$.

Exercice 8

Un récipient contient $10\ cm$ d'eau surmonté de $10\ cm$ d'huile de densité $0,6$. Un bloc cubique de $10\ cm$ de côté reste en équilibre au sein du liquide de telle sorte qu'il plonge de $2\ cm$ dans l'eau. Calculer la masse volumique du bloc.

Exercice 9

Un ballon a les caractéristiques suivantes :
- volume $= 500\ m^3$,
- masse de l'enveloppe $= 60\ kg$,
- masse de la nacelle $= 30\ kg$,
- masse du lest $= 50\ kg$,
- masse de l'aéronaute $= 70\ kg$.

Le ballon est gonflé à l'aide d'un gaz de masse volumique $0,4\ kg/m^3$. La masse volumique de l'air est de $1,293\ kg/m^3$. Que vaut la force ascentionnelle du ballon ? Quelle est son accélération de départ ? ($g = 10\ m/s^2$.)

4.1.2 Equation de continuité

Exercice 1

Dans un tuyau de $50\ cm^2$ de section, un liquide s'écoule à la vitesse de $1\ m/s$. Le tuyau se rétrécit et la section tombe à $20\ cm^2$. Quelle est la vitesse du liquide dans la partie étroite et que vaut le débit ?

Exercice 2

De l'eau s'écoule dans un tuyau horizontal et le débit est égal à $2\ l/s$. Calculer la différence de pression entre deux points où les sections du tuyau sont respectivement de 20 et $50\ cm^2$.

Exercice 3

Le rayon d'une conduite d'eau décroît de $0,2$ à $0,1$ m. La vitesse moyenne dans la portion la plus large du tuyau est égale à 3 m/s. Que vaut la vitesse moyenne dans la partie la plus étroite ?

Exercice 4

Un tuyau d'arrosage d'une section de 2 cm^2 a un débit de 200 cm^3/s. Calculer la vitesse moyenne de l'eau.

Exercice 5

Un vaisseau sanguin de rayon r se ramifie en quatre vaisseaux, chacun de rayon $r/3$. Si la vitesse moyenne dans le vaisseau le plus large est égale à v, trouver la vitesse moyenne dans chacun des petits vaisseaux.

4.1.3 Equation de Bernoulli

Exercice 1

Si l'eau monte du rez-de-chaussée au premier étage à travers des tuyaux à section constante, la pression est-elle partout la même ? Expliquer.

Exercice 2 : conséquences statiques

Des photos sous-marines ont été prises à une profondeur de 8000 m. Quelle est la pression à cette profondeur ? Quelle est la force appliquée sur l'objectif, sachant que celui-ci mesure $0,1$ m sur $0,15$ m ?

Exercice 3 : conséquences statiques

Quelle est la différence de pression entre le coeur et le cerveau d'une girafe si le cerveau se trouve à 2 m au-dessus du niveau du coeur ? (Supposer que la vitesse du sang est la même aux deux endroits.)

Exercice 4 : conséquences statiques

Estimer la différence de pression atmosphérique entre le niveau de la mer et le sommet d'une colline haute de 500 m. ($T = 0^oC$.)

Exercice 5 : conséquences statiques

Jusqu'à quelle hauteur l'eau peut-elle s'élever dans les tuyaux d'un immeuble si la pression de jauge au niveau du rez-de-chaussée est égale à 2.10^5 Pa ?

Exercice 6 : conséquences statiques

Un sous-marin plonge à une profondeur de 100 m dans la mer. De quelle pression de jauge devra-t-on disposer afin de chasser l'eau des ballasts ?

Exercice 7 : conséquences statiques

Une certaine pression peut supporter une colonne d'eau pure d'une hauteur de $0,7$ m. La même pression supportera une colonne d'une solution saline de $0,6$ m de haut. Quelle est la masse volumique de la solution saline ?

Exercice 8 : conséquences statiques

On introduit une canule dans une grosse artère. On se sert d'une solution saline de masse volumique de 1300 kg/m^3 comme liquide de manomètre. Quelle est la pression du sang (pression de jauge) si la différence de hauteur dans les tubes du manomètre est de $0,67$ m ?

Exercice 9 : conséquences dynamiques

Un tube de Venturi a un rayon de 1 cm dans sa partie la plus étroite et 2 cm dans sa partie la plus large où la vitesse de l'eau est de $0,1$ m/s. Trouver la vitesse et la chute de pression dans la partie étroite.

Exercice 10 : conséquences dynamiques

Un réservoir d'eau de 10 m de haut est percé d'un petit trou à sa base. En supposant que les dimensions du réservoir soient suffisament importantes pour négliger la perte de liquide, quelle est la vitesse de l'eau sortant par la fuite ?

Exercice 11 : conséquences dynamiques

Dans une expérience de physique, une balle de ping-pong reste en suspension dans un entonnoir tenu à l'envers lorsqu'on souffle de l'air par l'embouchure étroite de cet entonnoir. Expliquer brièvement pourquoi la balle ne tombe pas.

4.1.4 Exercices récapitulatifs

Exercice 1 : Archimède

Un morceau de chêne pèse 90 N dans l'air. Un bloc de plomb pèse 130 N quand il est immergé dans l'eau. Attachés l'un à l'autre, ils pèsent 100 N dans l'eau. Quelle est la masse volumique du bois ?

Exercice 2 : Archimède

Trouver l'accélération initiale d'une bille d'acier ($d_{acier} \approx 8$) placée
– dans l'eau,

– dans le mercure.

Spécifier le sens de l'accélération dans chacun des cas.

Exercice 3 : pression

Un vérin hydraulique a des pistons de section 1500 cm^2 et 75 cm^2. Il est employé pour soulever un fauteuil de dentiste de 1500 N.

– Quelle force faut-il appliquer sur le petit piston pour soulever le fauteuil ?
– Quelle distance le petit piston doit-il parcourir pour que le fauteuil soit levé de $0,1$ m ?

Exercice 4

Un réservoir contient de l'oxygène gazeux à 0^oC. La pression au fond du réservoir vaut 100 atm. Sachant que le réservoir est profond de 1 m, calculer la pression en haut du réservoir. (Supposer que la masse volumique moyenne de l'oxygène est de 143 kg/m^3.)

Exercice 5

Lors d'une transfusion de sang complet, l'aiguille est insérée dans une veine où la pression est de 2000 Pa. À quelle hauteur, par rapport à la veine, faut-iil placer le récipient de sang pour que le sang puisse tout juste entrer dans la veine ?

Exercice 6

Pour vider un réservoir d'eau, on se sert d'un siphon d'une section de 3.10^{-4} m^2. On procède comme suit. On ferme les deux bouts du siphon initialement rempli d'eau. Ensuite on place l'un des bouts à 25 cm au-dessous de la surface du réservoir. L'autre extrémité, on la laisse pendre librement à l'extérieur du récipient, à 50 cm du bout immergé.

– Calculer la vitesse de l'eau à la sortie du siphon, peu de temps après l'ouverture des extrémités du siphon.
– Le débit est-il constant ?
– Quelle est la vitesse de l'eau à la sortie quand la surface libre du réservoir se trouve à 10 cm au-dessus du bout immergé ?

Exercice 7

On veut vider un réservoir d'essence au moyen d'un siphon. L'une des extrémités du siphon est insérée dans le réservoir à une profondeur de $0,3$ m tandis que l'autre est placée à l'extérieur, à $0,2$ m au-dessous du niveau du bout immergé. La section droite interne du siphon est de 4.10^{-4} m^2. Calculer le débit et la vitesse d'écoulement de l'essence.

4.2 Fluides visqueux

4.2.1 Loi de Poiseuille

Exercice 1

Le rayon d'une grosse artère de chien est de 4 mm. Le débit de sang à travers l'artère est de 1 cm^3/s.
- Quelle est la vitesse moyenne du sang ?
- Calculer la chute de pression le long de l'artère sur une longueur de $0,1$ m.

Exercice 2

Le rayon intérieur d'une artère est de 2 mm. La température est de 37^oC et la vitesse moyenne du sang vaut 3 m/s. Trouver le débit et la perte de charge sur $0,05$ m, si l'artère est en position horizontale.

Exercice 3

La perte de charge le long d'une artère horizontale est de 100 Pa. Le rayon de l'artère vaut 1 cm et l'écoulement est laminaire.
- Quelle est la force résultante appliquée au sang ?
- Sachant que la vitesse moyenne du sang est de $1,5.10^{-2}$ m/s, trouver la puissance qu'il faut dépenser pour entretenir l'écoulement.

Exercice 4

Le rayon d'une artère augmente d'un facteur $1,5$.
- Si la perte de charge reste la même, qu'arrive-t-il au débit ?
- Si le débit ne change pas, qu'arrive-t-il à la perte de charge ?

Supposer l'écoulement laminaire.

Exercice 5

Une aiguile à injection hypothermique est longue de 2 cm. Son rayon intérieur vaut $0,3$ mm. Le débit de l'eau forcée à travers l'aiguille est de 10^{-7} m^3/s. La température de l'eau est de 20^oC.
- Calculer la vitesse moyenne de l'eau. Supposer l'écoulement laminaire.
- Quelle est la perte de charge nécessaire pour avoir un tel débit ?

Exercice 6 : viscosité

Une table à coussin d'air, utilisée dans les démonstrations de physique, supporte un chariot qui se déplace sur un mince coussin d'air d'une épaisseur de 1 mm et d'une aire de $0,04$ mm^2. Sachant que la viscosité de l'air est de $1,8.10^{-5}$ $Pa.s$, trouver la force quil faut exercer sur le chariot pour le déplacer avec une vitesse constante de $0,2$ m/s. (Utiliser $F = \eta S \frac{dv}{dy}$.)

4.2.2 Nombre de Reynolds

Exercice 1

Le rayon d'une grosse artère de chien est de 4 mm. La vitesse moyenne du sang est de $1,99$ cm/s et la viscosité vaut $2,084$ $Pa.s$. La masse volumique du sang est de $1,0595.10^3$ kg/m^3. Trouver le nombre de Reynolds et déterminer si l'écoulement est laminaire.

Exercice 2

Dans un conduit d'un rayon de $0,1$ m, la vitesse moyenne de l'eau est de $0,2$ m/s. La température de l'eau est de 20^oC.

- L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?
- Quel est le débit ?

Exercice 3

Le débit d'eau dans un tuyau d'un rayon de $0,02$ m vaut $0,01$ m^3/s à 20^oC.

- Quelle est la vitesse moyenne de l'eau ?
- L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?

Exercice 4

Calculer le nombre de Reynolds de la situation de l'exercice 5 sur la loi de Poiseuille (l'aiguille à injection hypothermique). L'écoulement est-il bien laminaire ?

Exercice 5

Considérer l'écoulement du sang à 37^oC dans une artère de 2 mm de rayon.

- Jusqu'à quelle vitesse moyenne du sang l'écoulement reste-t-il laminaire ?
- Quel est le débit Q correspondant ?

4.2.3 Sédimentation

Exercice 1

Un globule de sang d'une masse volumique de $1,3.10^3$ kg/m^3 et d'un rayon de 5.10^{-6} m se trouve dans l'eau. Calculer sa vitesse de sédimentation à 37^oC. (Supposer la loi de Stokes valable.)

Exercice 2

Une grosse molécule sphérique a un rayon de 2.10^{-8} m et une masse volumique de $1,5.10^3$ kg/m^3.

- Quelle est la vitesse limite de chute de cette molécule dans l'eau ?

– Quelle est la vitesse maximum pour laquelle la loi de Stokes reste valable ($Re < 1$) ?

Exercice 3

Soient des particules de poussière sphériques d'une masse volumique de $3.10^3\ kg/m^3$. Trouver le rayon maximum pour lequel on peut toujours utiliser la loi de Stokes dans le calcul de la vitesse limite

– dans l'air à 20^oC ?
– dans l'eau à 20^oC ?

Exercice 4

La vitesse limite d'une gouttelette d'huile de forme sphérique, lors de sa chute dans l'air à 20^oC, est de $2.10^{-7}\ m/s$. Quel est le rayon de cette gouttelette, si sa masse volumique est de 930 kg/m^3 ? (Supposer la loi de Stokes applicable.)

Exercice 5

– Quelle est la vitesse limite d'une particule de poussière d'un rayon de $10^{-5}\ m$ et d'une masse volumique de 2000 kg/m^3 ? La température de l'air est de 20^oC.
– Que vaut le nombre de Reynolds à cette vitesse ? La loi de Stokes est-elle applicable ?
– Que vaut la force de résistance à l'air à la vitesse limite ?

Exercice 6

Une protéine de masse volumique 1300 kg/m^3 est centrifugée avec une accélération de $10^6\ m/s^2$. Elle acquiert une vitesse de sédimentation de $10^{-6}\ m/s$. À cette vitesse, la résistance visqueuse est de $2,07.10^{-16}\ N$. Trouver la masse de la protéine. [1]

4.3 Propriétés dues aux interactions moléculaires

Exercice 1 : Tension superficielle

Un fil métallique en forme de $\cap$ est plongé dans de l'eau à 20^oC. Un fil mobile peut coulisser sur les deux branches du $\cap$. Le fil mobile est long de $0,1\ m$ et sa masse m_1 est de $1\ g$.

– Si $\sigma_{eau} = 7,28.10^{-2}\ N/m$, quelle est la valeur de la force de tension superficielle ?
– Si l'on suspend une masse m_2 au fil, celui-ci est en équilibre. Que vaut cette masse m_2 ?

Exercice 2 : Tension superficielle

On dépose une boucle de soie sur la lame liquide d'un anneau métallique qui a été plogé dans une solution savonneuse. Pourquoi la boucle prend-elle une forme circulaire après qu'on ait percé le film à

1. Si la masse volumique du fluide dans lequel se trouve la protéine (de masse m) vaut ρ_l, la poussée d'Archimède vaut $P_a = \rho_l g_e V$ où V est le volume de la protéine et $g_e = r\omega^2$ l'accélération effective. À la vitesse limite de sédimentation, les forces en jeu s'équilibrent et on a $6\pi R v \eta = m g_e - \frac{\rho_l}{\rho} m g_e$.

l'intérieur de celle-ci ?

Exercice 3 : Capillarité

La sève des arbres, qui est principalement constituée d'eau pendant l'été, s'élève dans un système de capillaires de rayon $r = 2,5.10^{-5}\ m$. L'angle de contact est nul. La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3. Calculer la hauter d'ascension de l'eau dans un arbre, à une températude de 20^oC. ($\sigma_{eau} = 7,28.10^{-2}\ N/m$.)

Exercice 4 : Capillarité

Calculer la hauteur d'ascention de l'eau à 0^oC dans un tube capillaire de verre de $10^{-3}\ m$ de rayon.

Exercice 5 : Capillarité

Calculer la dépression du ménisque du mercure dans un tube capillaire de $10^{-4}\ m$ de rayon.

Exercice 6 : Capillarité

Calculer la hauteur d'ascension de l'alcool éthylique dans un tube en verre de $0,04\ mm$ de diamètre. La masse volumique de l'éthanol est de 791 kg/m^3.

Exercice 7 : Capillarité

Un tube de verre de 1 mm de rayon est utilisé dans la construction d'un baromètre à mercure.

- De quelle distance la surface du mercure sera-t-elle déplacée par les effets de capillarité ?
- Sachant que la hauteur de la colonne de mercure est de $0,76\ m$, calculer l'erreur relative commise si l'on néglige les effets capillaires.
- Si les effets de capillarité doivent être inférieurs à $0,01\%$ de la hauteur de la colonne, quel doit être le rayon minimum du tube ?