Analyse

François Mansy

Table des matières

Première partie

Analyse

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Premières notions

1.1.1 Le concept de fonction

On peut voir une fonction comme une « transformation » de certains objets en d'autres objets. Ainsi, il y a des fonctions qui transforment des nombres en nombres (par exemple les polynômes, les fonctions trigonométriques, ...), des fonctions qui transforment des points en points (par exemple les rotations, translations, homothéties, ...), des fonctions qui transforment des formes géométriques en nombres (par exemple la longueur d'un segment, l'aire délimitée par un polygone, ...).

définition : Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments décrite de façon telle que pour tout objet, on sache sans ambiguïté s'il appartient ou n'appartient pas à l'ensemble

Un ensemble peut être vu comme une sorte de sac virtuel entourant ses éléments. Les éléments peuvent être de n'importe quelle nature : nombres, points géométriques, droites, fonctions, autres ensembles, etc. On donne donc volontiers des exemples d'ensembles en dehors du monde mathématique. Par exemple, lundi est un élément de l'ensemble des jours de la semaine, et 4 est un élément de l'ensemble des nombres entiers, ainsi que de l'ensemble des nombres pairs (forcément entiers). Ces deux derniers ensembles sont infinis, ils ont une infinité d'éléments.

définition : Soient A et B deux ensembles. Une fonction de A dans B est un ensemble de couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$, parmi lesquels on ne trouve pas deux couples ayant la même origine et des extrémités différentes.

Autrement dit, une fonction est une règle qui, à tout élément d'un ensemble de départ A fait correspondre un et un seul élément d'un ensemble d'arrivée B.

Les couples d'une fonction sont représentés, dans un graphe, par des flèches.

notation : Soit f une fonction de A dans B. On note $f(x)$ ou, plus formellement

$$f : A \to B : x \to f(x)$$

Si $(a, b) \in f$, alors $b =$ image de a par $f = f(a)$. $f(a)$ est l'élément de B que f associe à l'élément $a \in A$.

1.1.2 Graphiques

définition : Le graphique $graph(f)$ de la fonction f est l'ensemble des points du plan π, muni du repère $(O, \vec{1_x}, \vec{1_y})$, de coordonnée $(x, f(x))$

Soit $F = graph(f)$ le graphique de f. On a

$$P(x, y) \in F \Leftrightarrow y = f(x)$$

Si le graphique d'une fonction est une ligne ou la réunion de plusieurs lignes courbes, ce graphique est la courbe d'équation y telle que $F \equiv y = f(x)$

Remarquons que dans le plan π, toute verticale rencontre le graphique d'une fonction en 1 point au plus.

1.1.3 Zéros d'une fonction

définition : Le zéro (ou racine) d'une fonction est tout réel dont l'image par cette fonction est 0.

$$\begin{array}{rcc} x_0 = \text{zéro de } f & \Leftrightarrow & f(x_0) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x_0 \text{ est solution de } f(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x_0 = \text{abscisse de } F \cap O_x = \{P(x_0, 0)\} \end{array}$$

1.1.4 Domaine d'une fonction

$$\begin{array}{rccc} f(x) : x \rightarrow & x^3 - 3x - 1 & \text{définie} & \forall x \in R \\ g(x) : x \rightarrow & \frac{x+1}{x-3} & \text{définie} & \forall x \in R \setminus \{3\} \\ h(x) : x \rightarrow & \sqrt{x+4} & \text{définie} & \forall x \in [-4, +\infty[\end{array}$$

définition : Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x qui admettent une image $f(x)$.

définition $\Leftrightarrow$: Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est un réel.

On note $dom\ f = \{x \in R : f(x) \in R\}$

La notion de domaine introduit les conditions d'existence.

$$\begin{array}{rcll} f(x) : x \rightarrow & N(x)/D(x) & \text{possède la condition d'existence} & D(x) \neq 0 \\ g(x) : x \rightarrow & \sqrt{R(x)} & \text{possède la condition d'existence} & R(x) \geq 0 \end{array}$$

par conséquent

$$\begin{array}{rcll} h(x) : x \rightarrow & 1/\sqrt{R'(x)} & \text{possède la condition d'existence} & R'(x) > 0 \end{array}$$

1.1.5 Ensemble image d'une fonction

définition : L'ensemble-image d'une fonction f de R dans R est l'ensemble des images $f(x)$ générées par cette fonction lorsque x en parcourt le domaine de définition.

On note $Im\ f = \{f(x) : x \in dom\ f\}$

$$\begin{aligned} r \in Im\ f \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, x_0 \in dom\ f : f(x_0) = r \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe au moins un point de } graph(f) \text{ ayant } r \text{ comme ordonnée} \end{aligned}$$

1.1.6 Parité d'une fonction

Une fonction f est paire si et seulement si

$$\forall x \in dom\ f,\ f(-x) = f(x)$$

Autrement dit, le graphique de f est symétrique par rapport à l'axe Oy.

Une fonction f est impaire si et seulement si

$$\forall x \in dom\ f,\ f(-x) = -f(x)$$

Autrement dit, le graphique de f est symétrique par rapport à l'origine O.

1.1.7 Autres éléments de symétrie d'un graphique de fonction

Soit f_p une fonction et C_p^f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

C_p^f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si et seulement si quel que soit x tel que $a + x$ et $a - x$ appartiennent au domaine de f, $f_p(a + x) = f_p(a - x)$.

Ceci équivaut à dire que $f_p(a + x)$ est une fonction paire.

Soit f_i une fonction et C_i^f sa courbe représentative dans un repère quelconque.

C_i^f admet le point $P(a, b)$ comme centre de symétrie si et seulement si quel que soit x tel que $a + x$ et $a - x$ appartiennent au domaine de f, $f_i(a + x) + f_i(a - x) = 2b$.

Ceci traduit le fait que b est la moyenne de $f_i(a + x)$ et de $f_i(a - x)$.

Démononstration : soit $a = \frac{x+x'}{2}$ et $b = \frac{f(x)-f(x')}{2}$. On a que $x' = 2a - x$ et donc $b = \frac{f(x)-f(2a-x)}{2}$.

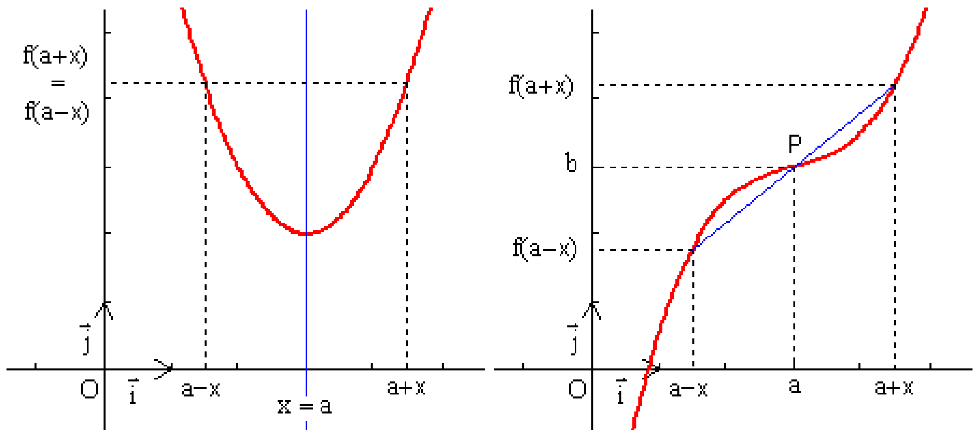


FIGURE 1.1 – Elements de symétrie d'une fonction. A gauche, fonction paire. A droite, fonction impaire

1.1.8 Translations de fonctions élémentaires

$$y = f(x - a) + b$$

est la fonction $y_0 = f(x)$ translatée d'un vecteur (a, b).

1.1.9 Affinités de fonctions élémentaires

$$y = k\, f(k'x)$$

est la fonction $y_0 = f(x)$ étirée respectivement d'un facteur $\frac{1}{k'}$ selon Ox et k selon Oy.

1.1.10 Fonctions périodiques

Soit f une fonction, $dom\ f$ son ensemble de définition, T un réel. f est T-périodique si et seulement si $\forall x \in dom\ f$, $f(x + T) = f(x)$.

Si f est T-périodique, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, f est nT-périodique. La réciproque est fausse.

1.2 Classification de fonctions

1.2.1 Fonctions constantes

Une fonction constante est de la forme $x \to C$ $(C \in \mathbb{R})$. Son graphique est la droite horizontale d d'équation

$$d \equiv y = C$$

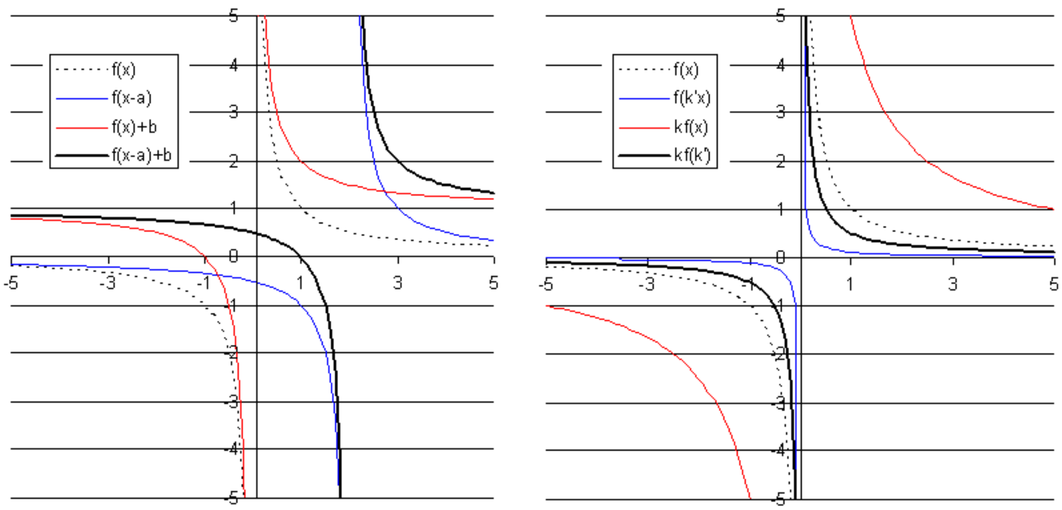


FIGURE 1.2 – Translations (à gauche) pour $(a, b) = (2, 1)$ et affinités (à droite) pour $(k, k') = (5, 10)$ de la fonction $y = \frac{1}{x}$

La fonction nulle, qui est la fonction constante particulière $x \to 0$ ($C = 0$), a comme graphique la droite qui supporte l'axe des abscisses :

$$Ox \equiv y = 0$$

1.2.2 Fonctions puissances à exposant naturel

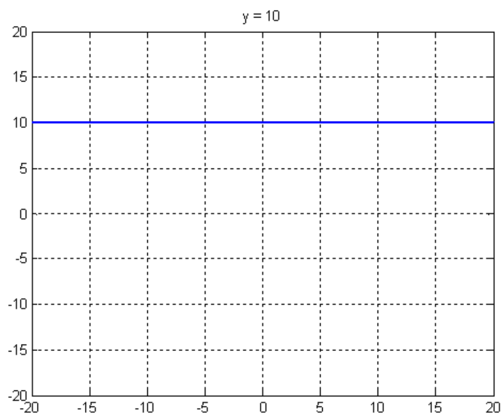
Une fonction puissance à exposant naturel est de la forme $x \to x^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$. Son graphique est la courbe d'équation

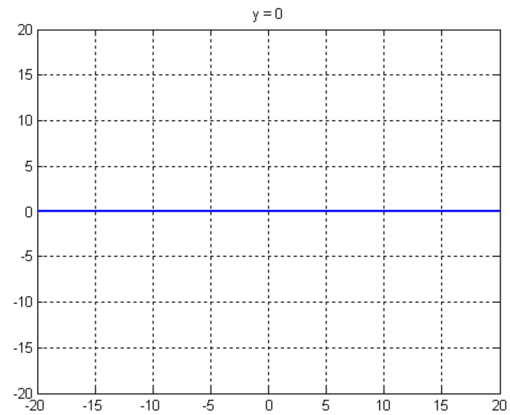
$$y = x^n$$

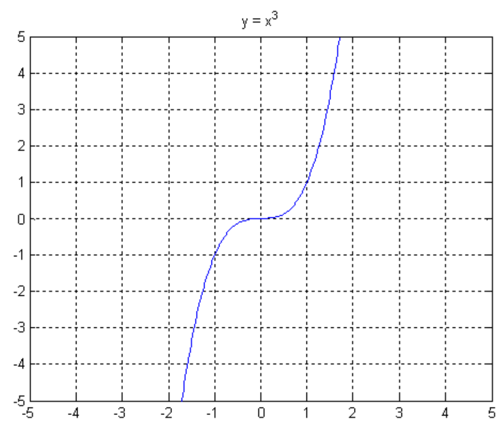
La fonction identique est définie pour $n = 1$. Il s'agit de la fonction $x \to x$ dont le graphique $y = x$ est la bissectrice des axes Ox et Oy passant par les $1^e r$ et $3^e me$ quadrants.

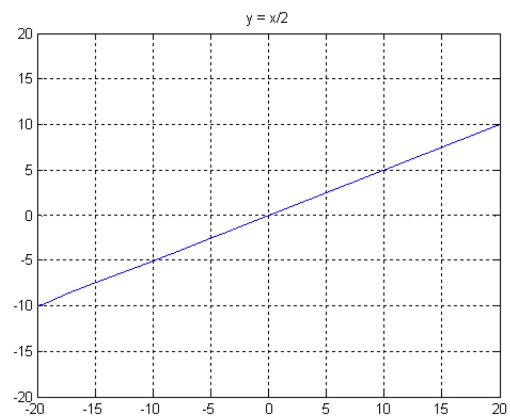
La fonction carré est définie pour $n = 2$. Il s'agit de la fonction $x \to x^2$ dont le graphique $y = x^2$ est une parabole d'axe Oy et de sommet O.

La fonction cube est définie pour $n = 3$. Il s'agit de la fonction $x \to x^3$ dont le graphique $y = x^3$ est une cubique passant par 0.









1.2.3 Fonctions linéaires

Une fonction linéaire est de la forme $x \to mx$ où $m \in \mathbb{R}$ est le coefficient angulaire de la fonction. Son graphique est la droite d'équation

$$y = mx$$

qui comprend l'origine O du repère et m comme coefficient angulaire. Remarquons que les fonctions $x \to 0$ et $x \to x$ correspondent respectivement à des coefficients angulaires $m = 0$ et $m = 1$.

Selon que m est < 0 ou > 0, la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proriétés : On a $f(kx + k'x') = m(kx + k'x') = mkx + mk'x' = k(mx) + k'(mx') = kf(x) + k'f(x')$, donc

$$f(kx + k'x') = kf(x) + k'f(x')$$

1.2.4 Fonctions du 1^{er} degré (affines)

Une fonction du 1^er degré (ou fonction affine) est de la forme $x \to mx + p$ où $m \in \mathbb{R}_0$ est le coefficient angulaire de la fonction et $p \in \mathbb{R}$ le terme indépendant. Son graphique est la droite non parallèle à Ox ou Oy, de coefficient angulaire m et passant par le point $(0, p)$, d'équation

$$y = mx + p$$

Ici aussi, selon que m est < 0 ou > 0, la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante.

1.2.5 Fonctions du 2^e degré

Une fonction du 2^eme degré est de la forme $x \to ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R}_0$, $b, c \in \mathbb{R}$). Son graphique est la parabole d'équation

$$y = ax^2 + bx + c$$

l'axe de cette parabole a pour équation $x = \frac{-b}{2a}$ et son sommet est le point

$$S \equiv \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

L'extremum en S est respectivement un minimum ou un maximum selon que a est > 0 ou < 0. (On peut démontrer que $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$, où $\Delta = b^2 - 4ac$.

1.2.6 Fonctions polynômes

Une fonction polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}$) est de la forme $x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, avec $a_n \in \mathbb{R}_0$ et $a_{n-1}, ...a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Son graphique est la courbe d'équation

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Les fonctions précédentes sont toutes des fonctions polynômes. Les fonctions constantes sont de degré zéro. La fonction nulle est intégrée dans les fonctions polynômes, mais son degré n'est pas défini.

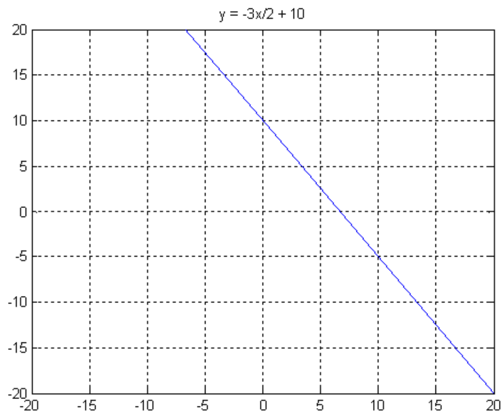
1.2.7 Fonctions puissance à exposant entier ≤ 0

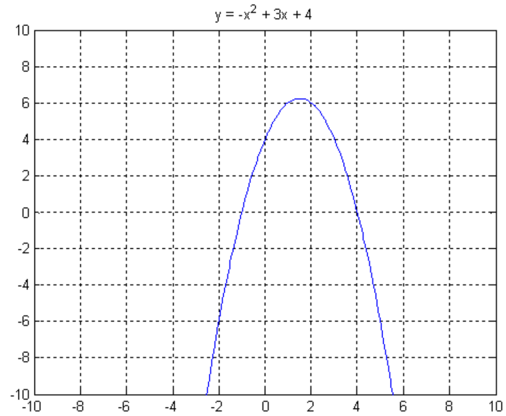
Une fonction puissance à exposant naturel strictement négatif est de la forme $x \to x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}_0$. Son graphique est la courbe d'équation

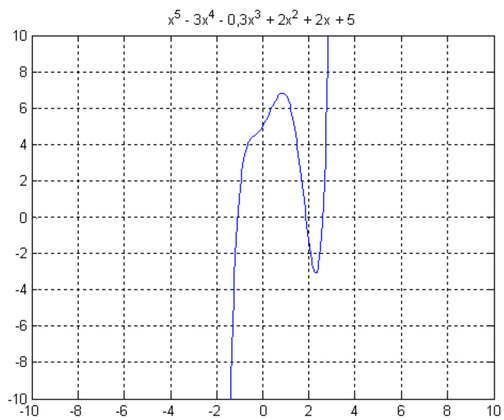
$$y = \frac{1}{x^n}$$

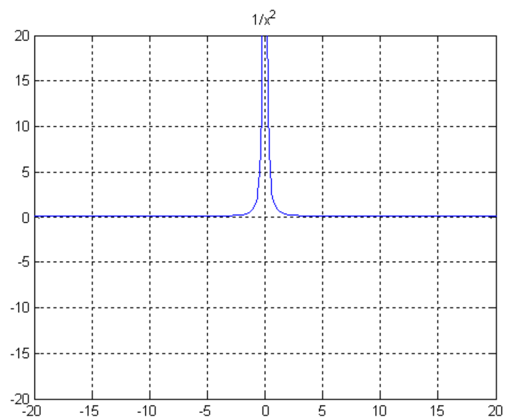
La fonction inverse est définie pour $n = 1$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{-1}$ dont le graphique $y = \frac{1}{x}$ est l'hyperbole équilatère d'asymptotes Ox et Oy et de centre O.

La fonction inverse carré est définie pour $n = 2$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{-2}$ dont le graphique est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^2}$.









La fonction inverse cube est définie pour $n = 3$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{-3}$ dont le graphique est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^3}$.

1.2.8 Fonctions homographiques

Une fonction homographique est de la forme $x \to \frac{ax+b}{a'x+b'}$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R},\ ab' - a'b \neq 0)$. Son graphique est une hyperbole équilatère d'équation

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

On peut toujours transformer une fonction homomorphe en une transformation de la fonction $y = \frac{1}{x}$. On a $\frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{A}{a'x+b'} + B = \frac{A+B(a'x+b')}{a'x+b'} = \frac{Ba'x+Bb'+A}{a'x+b'}$ d'où,

$$\begin{array}{ll} Ba' = a & \quad B = \frac{a}{a'} \\ Bb' + A = b & \quad A = \frac{a'b-ab'}{a'} \end{array}$$

donc,

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{\frac{ab'-a'b}{a'}}{a'x+b} + \frac{a}{a'}$$

Par exemple, $\frac{x+2}{2x-3} = \frac{7/2}{2x-3} + \frac{1}{2}$.

1.2.9 Fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle est un quotient de polynômes. Son graphique est la courbe d'équation

$$y = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}$$

avec $a_n, a_m \in \mathbb{R}_0$, $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \neq n, m$.

Toutes les fonctions précédentes sont des fonctions rationnelles.

1.2.10 Fonctions puissance à exposant rationnel non entier

Une fonction puissance à exposant rationnel non entier est de la forme $x \to x^r$ ($r \in \mathbb{Q}_0 \backslash \mathbb{Z}$. Son graphique est la courbe d'équation

$$y = x^{\frac{n}{m}}$$

avec $n, m \in \mathbb{Z}_0$ et $\frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}$

La fonction racine carrée est définie pour $n = 2$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{\frac{1}{2}}$ dont le graphique est la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.

La fonction racine cubique est définie pour $n = 3$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{\frac{1}{3}}$ dont le graphique est la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{x}$.

Remarquons que, bien que nous ne fassions pas la différence dans ce cours, de manière rigoureuse, les fonctions $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$ et $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ sont différentes car $x^{\frac{1}{n}}$ ne sont définies que pour des $x > 0$. Autrement dit, $dom\ f_1 = \mathbb{R}_0 \neq dom\ f_2 = \mathbb{R}$.

1.2.11 Fonctions irrationnelles

Les fonctions irrationnelles sont des fonctions construites avec des fonctions polynômes, lesquelles se trouvent sous des radicaux.

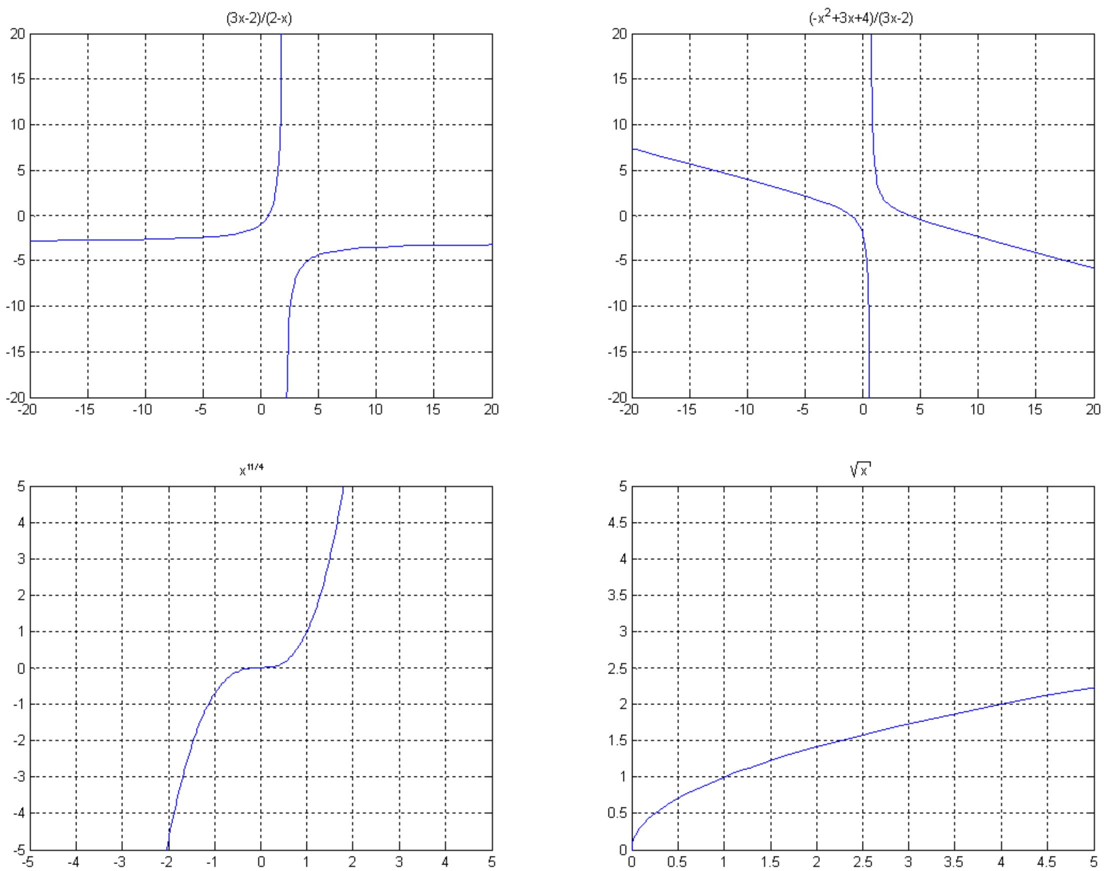
Exemple : $x \to \sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)} + 3\frac{\sqrt{(x-3)(x+1)(x+2)(x+4)}}{x^2+1}$

1.2.12 Fonctions valeur absolue

Une fonction valeur absolue est de la forme $x \to |x|$. Son graphique est représenté par la courbe d'équation

$$y = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

qui est composée des deux demi-droites d'équation $y = -x$ pour $x < 0$ et $y = x$ pour $x > 0$.


(3x-2)/(2-x)
(-x^2+3x+4)/(3x-2)
x^{11/4}
√x

Remarquons qu'il s'agit d'une fonction irrationnelle car on a $|x| = \sqrt{x^2}$.

1.2.13 Fonctions algébriques

Une fonction algébrique est une fonction rationnnelle ou irrationnelle, c'est-à-dire toutes les fonctions précédentes.

1.2.14 Fonctions partie entière et partie décimale

La fonction partie entière est la fonction qui, à tout réel x, associe le plus grand des nombres entiers $\geq x : x \to [x]$. Autrement dit, pour $x \in [k, k+1[$ $(k \in \mathbb{Z})$, on a $[x] = k$.

Son graphique est la courbe d'équation

$$y = [x]$$

qui est une courbe en escalier.

La fonction partie décimale est la fonction $x \to x - [x] = \lfloor x \rfloor$. Autrement dit, pour $x \in [k, k+1[$ $(k \in \mathbb{Z})$, on a $\lfloor x \rfloor = x - k$.

Son graphique est la courbe d'équation

$$y = \lfloor x \rfloor$$

qui est une courbe en dents de peigne.

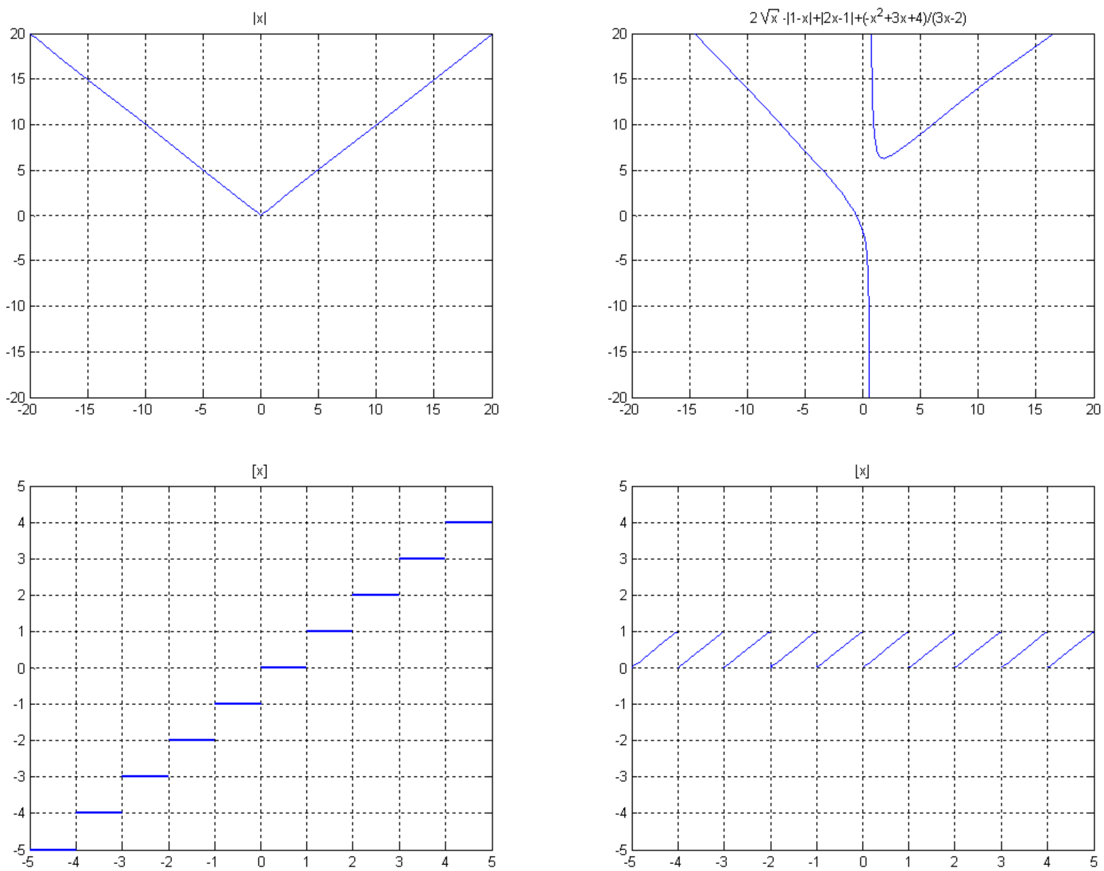
1.2.15 Fonctions définies par intervalles

$$y = \begin{cases} f_1(x) \text{ avec } x_1 \leq x < x'_1 \\ f_2(x) \text{ avec } x_2 \leq x < x'_2 \\ \quad\quad\quad ... \\ f_n(x) \text{ avec } x_n \leq x < x'_n \end{cases} \quad \text{avec } x_1 \leq x'_1 \leq x_2 \leq x'_2 \leq ... \leq x_n \leq x'_n$$

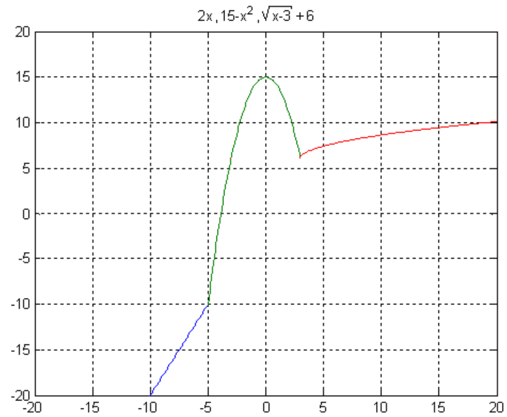
Exemple :

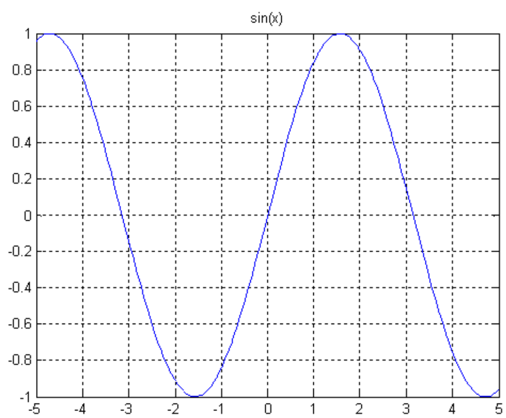
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -5 \\ 15 - x^2 & \text{si} \quad -5 \geq x \geq 3 \\ \sqrt{x-3} + 6 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

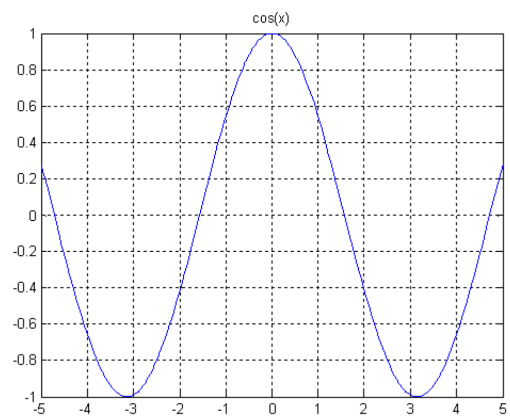
Le calcul sera différent selon que $x \in]-\infty, -5[$, $x \in [-5, 3]$ ou $x \in]3, +\infty[$.



|x|
2 √x -|1-x|+|2x-1|+(-x^2+3x+4)/(3x-2)
[x]
⌊x]







1.2.16 Fonctions trigonométriques

La fonction sinus est la fonction $x \to \sin x$. Sa courbe est une sinusoïde de période 2π et d'équation

$$y = \sin x$$

La fonction cosinus est la fonction $x \to \cos x$. Sa courbe est une sinusoïde de période 2π, traanslatée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche par rapport au sinus et d'équation

$$y = \cos x$$

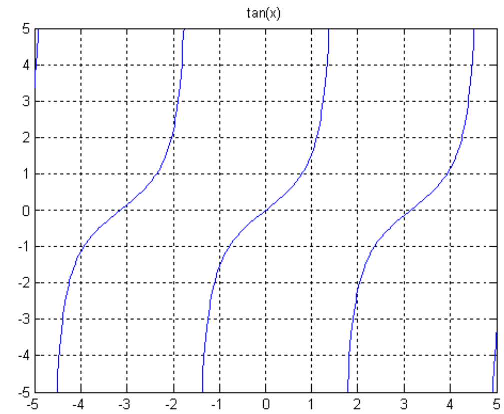
La fonction tangente est la fonction $x \to \tan x$. Sa courbe présente une période π, des asymptotes en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et l'équation

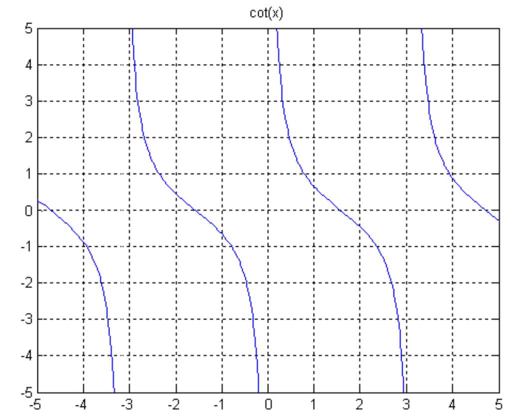
$$y = \tan x$$

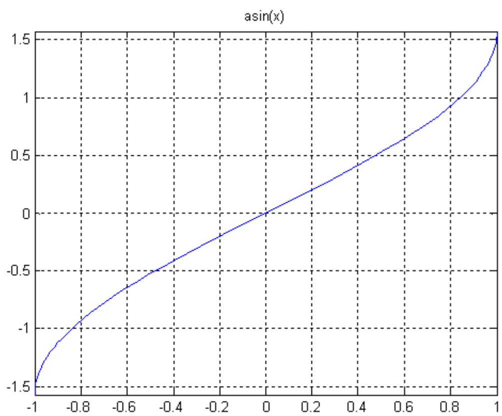
La fonction cotangente est la fonction $x \to \cot x$. Sa courbe présente une période π, des asymptotes en $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et l'équation

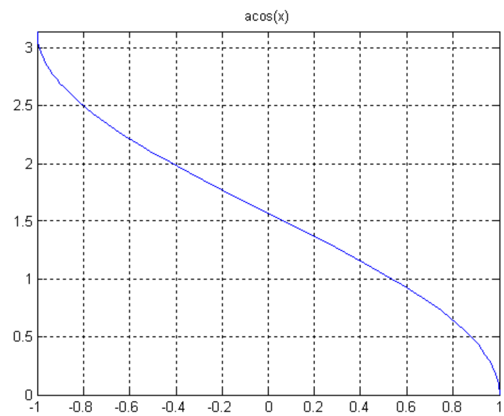
$$y = \cot x$$

La fonction sécante est l'inverse du cosinus : $x \to \frac{1}{\cos x}$ (période 2π, asymptotes en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$).









La fonction cosécante est l'inverse du sinus : $x \to \frac{1}{\sin x}$ (période 2π, asymptotes en $x = k\pi$).

Les autres fonctions trigonométriques sont une composition de fonctions trigonométriques élémentaires.

1.2.17 Fonctions trigonométriques inverses

La fonction arcsinus est la fonction réciproque de la fonction sinus. Sa courbe a comme équation

$$y = \arcsin x$$

Elle est définie pour $x \in [0, \pi] = dom$ arcsin et $y \in [-1, 1] = Im$ arcsin.

La fonction arccosinus est la fonction réciproque de la fonction cosinus. Sa courbe a comme équation

$$y = \arccos x$$

Elle est définie pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = dom$ arccos et $y \in [-1, 1] = Im$ arccos.

La fonction arctangente est la fonction réciproque de la fonction tangente. Sa courbe a comme équation

$$y = \arctan x$$

Elle est définie pour $x \in [-\infty, +\infty] = dom$ arctan et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = Im$ arctan.

La fonction arccotangente est la fonction réciproque de la fonction cotangente. Sa courbe a comme équation

$$y = \text{arccot } x$$

Elle est définie pour $x \in [-\infty, +\infty] = dom$ arccot et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} = Im$ arccot.

1.2.18 Fonctions mixtes

Une fonction mixte est une fonction composée d'une fonctions trigonométrique et algébrique.

Exemple : la fonction sinus cardinal $x \to \text{sinc}(x)$. Sa courbe a comme équation

$$x = \frac{\sin x}{x}$$

Cette fonction très connue est utilisée en optique, notamment.

La fonction $y = x \cos x$ est un autre exemple de fonction mixte.

1.2.19 Fonctions exponentielles

La fonction exponentielle (népérienne) est la fonction telle que $x \to e^x$ où $e \approx 2,71828$. Sa courbe a comme équation

$$y = e^x$$

Une fonction exponentielle est une fonction telle que $x \to a^x$ avec $a \in \mathbb{R}_0^+$. Sa courbe a comme équation

$$y = a^x$$

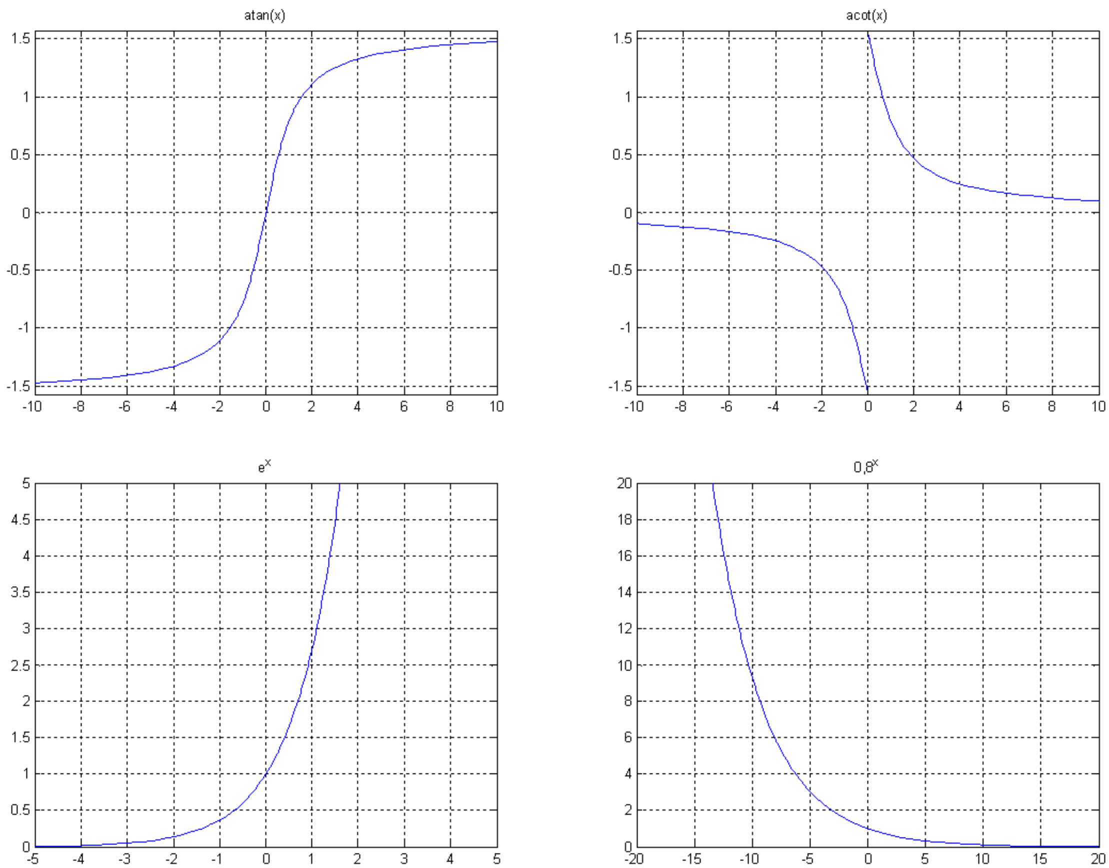
1.2.20 Fonctions logarithmiques

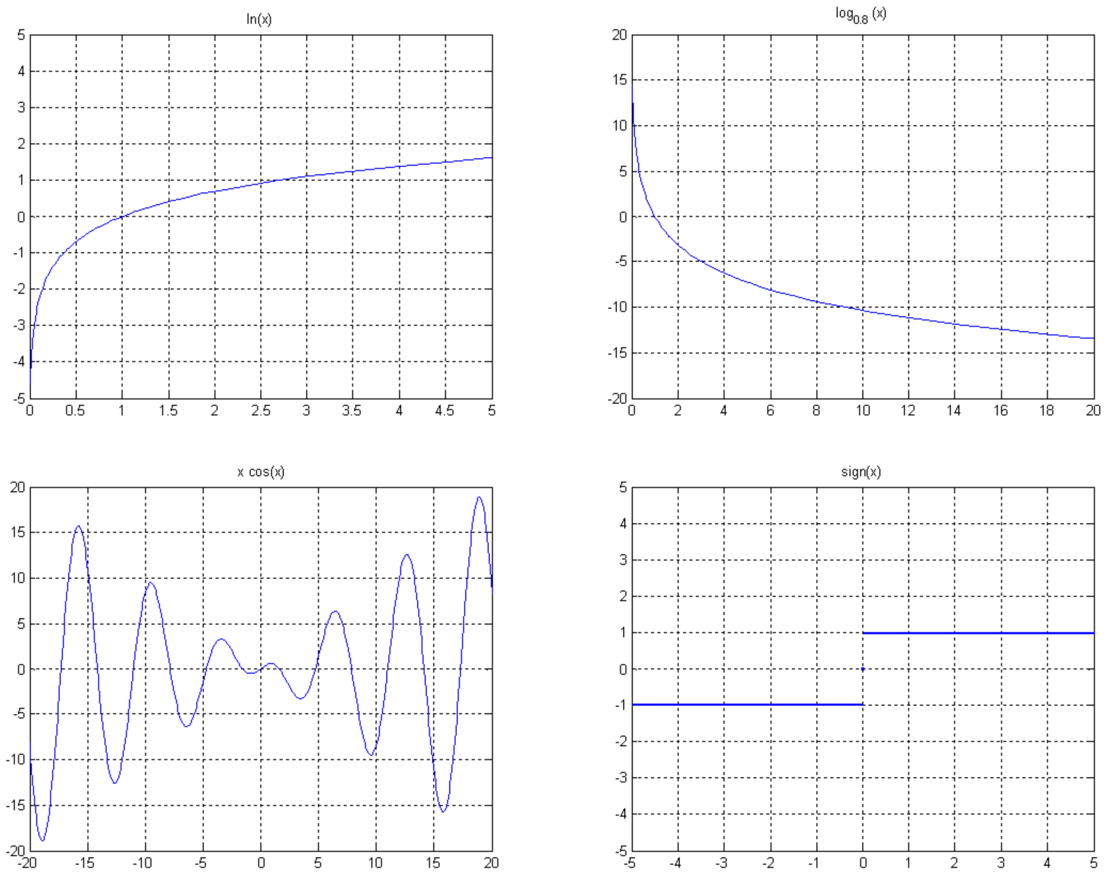
La fonction logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle (népérienne). Elle est telle que $x \to \ln x$. Sa courbe a comme équation

$$y = \ln x$$

Une fonction logarithme est la réciproque de la fonction exponentielle a^x. Elle est telle que $x \to \ln x$. Sa courbe a comme équation

$$y = \log_a x$$


atan(x)
acot(x)
e^x
0,8^x



1.2.21 Fonction signature

La fonction signature est la fonction qui, à un réel, lui associe son signe. Elle est telle que $x \to \text{sign}(x)$. Sa courbe a comme équation

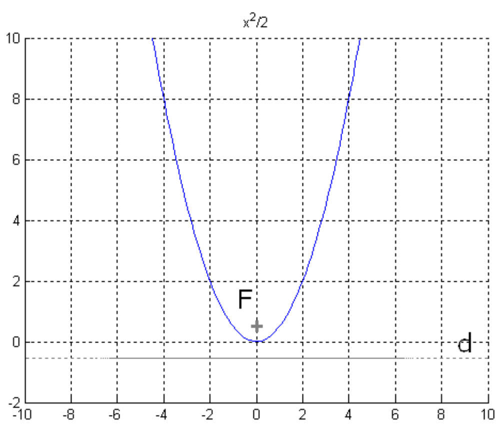
$$y = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

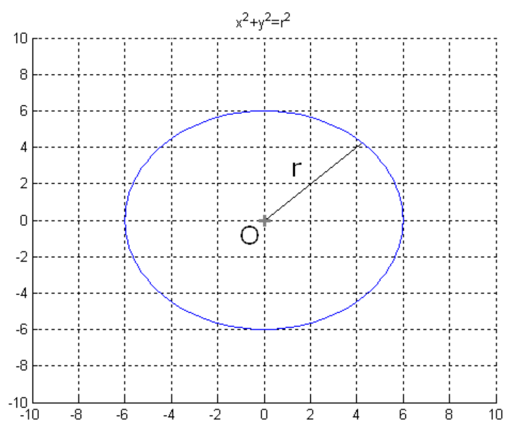
Chapitre 2

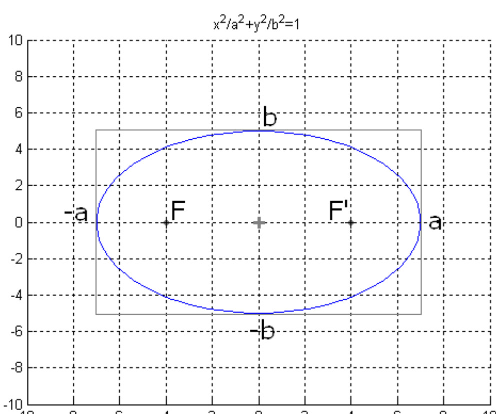
Coniques

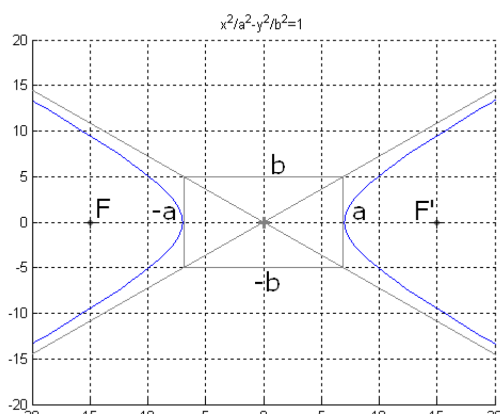
2.1 Lieux géométriques

Lors de ce chapitre, nous allons voir qu'un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole correspondent à des problèmes géométriques bien concrets, traduits mathématiquement en une équation.









La mise en équation d'un problème géométrique nécessite d'introduire les lieux géométriques.

En guise d'introduction, recherchons le lieu géométrique des points situés à la même distance de deux points.

Exprimer ce lieu géométrique (c'est-à-dire un ensemble de points de l'espace ou du plan) sous forme d'une équation se fait en considérant la définition de la norme d'un vecteur $\vec{AB}$ (ou la distance entre 2 points A et B) dans un repère cartésien. On a

$$|AB| = ||\vec{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Plaçons l'axe Ox selon la droite AB joignant les deux points considérés. Plaçons l'axe Oy selon une perpendiculaire à cette droite AB. Soit le point O, le milieu du segment $[AB]$. (Nous pouvons déjà dire que le point O appartient au lieu géométrique car ce point est situé à la même distance de A et de B.)

Les coordonnées des points A et B s'expriment respectivement, avec ce système d'axes, selon $A \equiv (-\frac{d}{2}, 0)$ et $B \equiv (\frac{d}{2}, 0)$.

Soit un point $P \equiv (x, y)$ quelconque. Si P appartient au lieu géométrique, on a que

$$|PA| = |PB|$$

Autrement dit,

$$\begin{array}{ccc} ||\vec{AP}|| & = & ||\vec{BP}|| \\ \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} & = & \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \\ \sqrt{(x + \frac{d}{2})^2 + y^2} & = & \sqrt{(x - \frac{d}{2})^2 + y^2} \\ (x + \frac{d}{2})^2 + y^2 & = & (x - \frac{d}{2})^2 + y^2 \\ dx & = & -dx \\ x & = & 0 \end{array}$$

Le lieu géométrique a donc la droite $d \equiv x = 0$ comme équation. Il s'agit bel et bien de la médiatrice du segment $[AB]$ qui est, par définition, le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés A et B.

2.2 Parabole

La parabole est le lieu géométrique des points équidistants d'une droite d et d'un point F (foyer) donnés.

On a $|F, d| = f$. Donc, si Oy est la perpendiculaire à d passant par F et Ox est la parallèle à d telle que $|Ox, d| = \frac{f}{2}$, la droite d a comme équation $d \equiv y = -\frac{f}{2}$ et le foyer F a comme coordonnée $F \equiv (0, \frac{f}{2})$.

Soit un point $P \equiv (x, y)$ quelconque. Sous les conditions ci-dessus, si P appartient au lieu géométrique, on peut écrire

$$\begin{array}{ccc}
|P,d| & = & |PF| \\
|y_P - y_d| & = & \sqrt{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2} \\
y-(-\frac{f}{2}) & = & \sqrt{x^2+(y-\frac{f}{2})^2} \\
(y+\frac{f}{2})^2 & = & x^2+(y-\frac{f}{2})^2 \\
y^2+fy+\frac{f^2}{4} & = & x^2+y^2-fy+\frac{f^2}{4} \\
fy & = & x^2-fy \\
y & = & \frac{x^2}{2f}
\end{array}$$

Dès lors, de manière plus générale, une parabole peut être représentée par la courbe d'équation

$$P \equiv y = ax^2+bx+c$$

Nous avons vu au chapitre précédent que la concavité était donnée par a (vers le haut si $a>0$, vers le bas si $a<0$), que l'axe s de symétrie nous était donné par $s \equiv x = -\frac{b}{2a}$ et que le sommet avait comme coordonnées $S \equiv (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

2.3 Ellipse

L'ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des distances par rapport à deux points F et F' donnés est constante.

On a $|FF'| = f$. L'axe Ox est placé selon la droite FF' joignant les deux foyers. L'axe Oy est la médiatrice du segment $[FF']$. Soit le point O, le milieu du segment $[FF']$. Le foyers F et F' ont donc comme coordonnées respectives $F \equiv (-\frac{f}{2}, 0)$ et $F' \equiv (\frac{f}{2}, 0)$.

Soit un point $P \equiv (x,y)$ quelconque. Sous les conditions ci-dessus, si P appartient au lieu géométrique, on peut écrire

$$|PF| + |PF'| = k$$

avec $k>f>0$, il vient

$$\begin{array}{ccc}
|PF| & = & k-|PF'| \\
\sqrt{(x+\frac{f}{2})^2+y^2} & = & k-\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2+y^2} \\
(x+\frac{f}{2})^2+y^2 & = & k^2-2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2+y^2}+(x-\frac{f}{2})^2+y^2 \\
2xf-k^2 & = & -2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2+y^2} \\
2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2+y^2} & = & k^2-2xf \\
4k^2((x-\frac{f}{2})^2+y^2) & = & (k^2-2xf)^2 \\
4k^2x^2-4k^2xf+4k^2f^2+4k^2y^2 & = & k^4-4k^2xf+4x^2f^2 \\
4(k^2-f^2)x^2+4k^2y^2 & = & k^4-4k^2f^2 \\
(k^2-f^2)x^2+k^2y^2 & = & \frac{k^2}{4}(k^2-f^2) \\
\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-f^2} & = & \frac{1}{4}
\end{array}$$

On a bien $k^2 > f^2$. Dès lors, de manière plus générale, une ellipse peut être représentée par la relation

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les constantes a et b sont les demi-grands axes de l'ellipse. Celle-ci, placée dans un repère cartésien, s'inscrit dans un rectangle compris entre les abscisses $x = -a$ et a et les ordonnées $y = -b$ et b.

Cercle

Le cercle est le lieu géométrique des points situés à une distance r d'un point O donné.

Nous pouvons assimiler ce lieu géométrique à une ellipse pour laquelle $F = F'$ (donc $f = 0$) et $k = r$. Nous obtenons donc la relation

$$x^2 + y^2 = r^2$$

qui n'est autre que l'équation d'une ellipse pour laquelle $a = b = r$.

2.4 Hyperbole

L'hyperbole est le lieu géométrique des points dont la différence des distances par rapport à deux points F et F' donnés est constante (et positive).

On a $|FF'| = f$. L'axe Ox est placé selon la droite FF' joignant les deux foyers. L'axe Oy est la médiatrice du segment $[FF']$. Soit le point O, le milieu du segment $[FF']$. Le foyers F et F' ont donc comme coordonnées respectives $F \equiv (-\frac{f}{2}, 0)$ et $F' \equiv (\frac{f}{2}, 0)$.

Soit un point $P \equiv (x, y)$ quelconque. Sous les conditions ci-dessus, si P appartient au lieu géométrique, on peut écrire

$$|PF| - |PF'| = k$$

avec $f > k > 0$, il vient

$$\begin{array}{ccc}
|PF| & = & k + |PF'| \\
\sqrt{(x+\frac{f}{2})^2 + y^2} & = & k + \sqrt{(x-\frac{f}{2})^2 + y^2} \\
(x+\frac{f}{2})^2 + y^2 & = & k^2 + 2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2 + y^2} + (x-\frac{f}{2})^2 + y^2 \\
2xf - k^2 & = & +2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2 + y^2} \\
2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2 + y^2} & = & 2xf - k^2 \\
4k^2((x-\frac{f}{2})^2 + y^2) & = & (2xf - k^2)^2 \\
4k^2x^2 - 4k^2xf + 4k^2f^2 + 4k^2y^2 & = & k^4 - 4k^2xf + 4x^2f^2 \\
4(k^2 - f^2)x^2 + 4k^2y^2 & = & k^4 - 4k^2f^2 \\
(k^2 - f^2)x^2 + k^2y^2 & = & \frac{k^2}{4}(k^2 - f^2) \\
(f^2 - k^2)x^2 - k^2y^2 & = & \frac{k^2}{4}(f^2 - k^2) \\
\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{f^2 - k^2} & = & \frac{1}{4}
\end{array}$$

On a bien $f^2 > k^2$. Dès lors, de manière plus générale, une hyperbole peut être représentée par la relation

$$H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les constantes a et b nous permettent de tracer l'hyperbole. Les deux asymptotes obliques de celle-ci nous sont données par les droites d'équation $y = \pm\frac{b}{a}$. Les deux branches de l'hyperbole sont respectivement tangentes aux droites verticales d'abscisse $x = -a$ et a.

2.5 Sections d'un cône par un plan

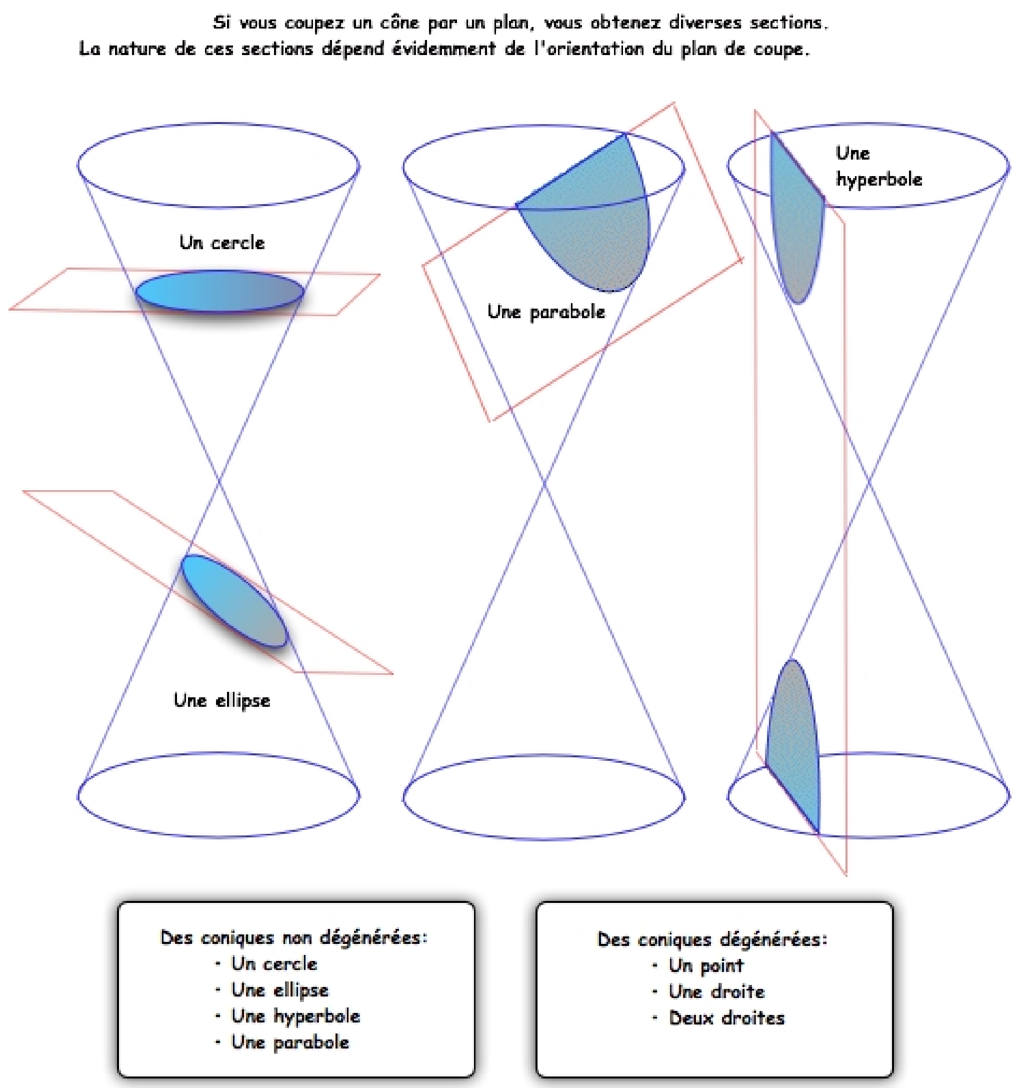


Figure 2.1 – Section d'un cone par un plan.

2.6 Translations et rotations

La translation de vecteur (x_0, y_0) d'une fonction s'effectue simplement en considérant le changement de coordonnées $x \to x - x_0$ et $y \to y - y_0$ (on peut facilement démontrer cette propriété à l'aide du calcul vectoriel).

Les coniques ne font pas exception, aussi, par exemple, un cercle centré en (x_0, y_0) aura comme équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Les translations des paraboles, ellipses et hyperboles s'effectuent de la même façon.

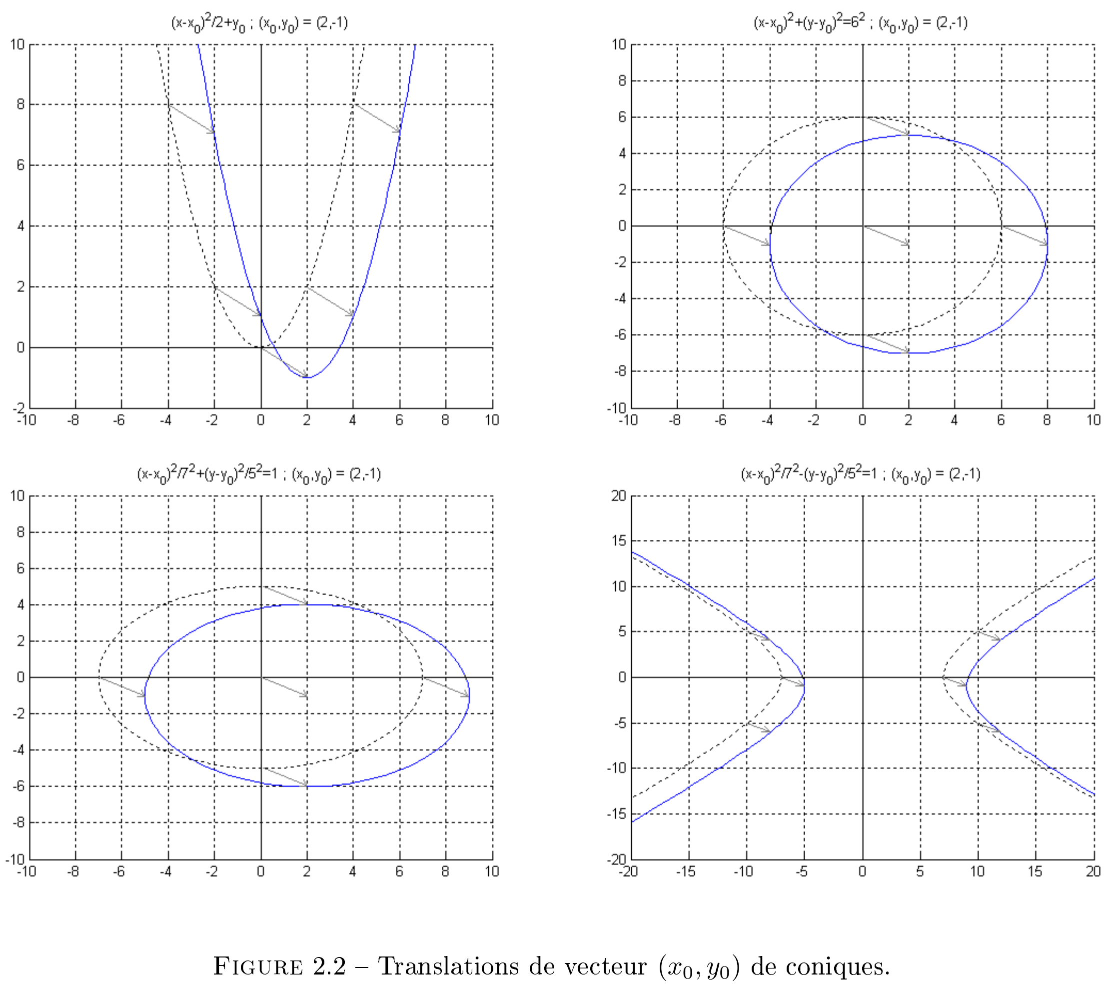


FIGURE 2.2 – Translations de vecteur (x_0, y_0) de coniques.

Le cas des rotations est plus complexe. Cependant, avec une rotation de 45^o, une hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ peut devenir une fonction de la forme $yx = k$, donc,

$$y = \frac{k}{x}$$

De même, on rencontre parfois des équations du type

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy\cos\phi}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\phi$$

qui est l'équation d'une ellipse comprise entre les abscisses $-a$ et a, les ordonnées $-b$ et b, centrée en O, mais dont les axes de symétrie sont orientés à ϕ par rapport aux axes Ox et Oy.

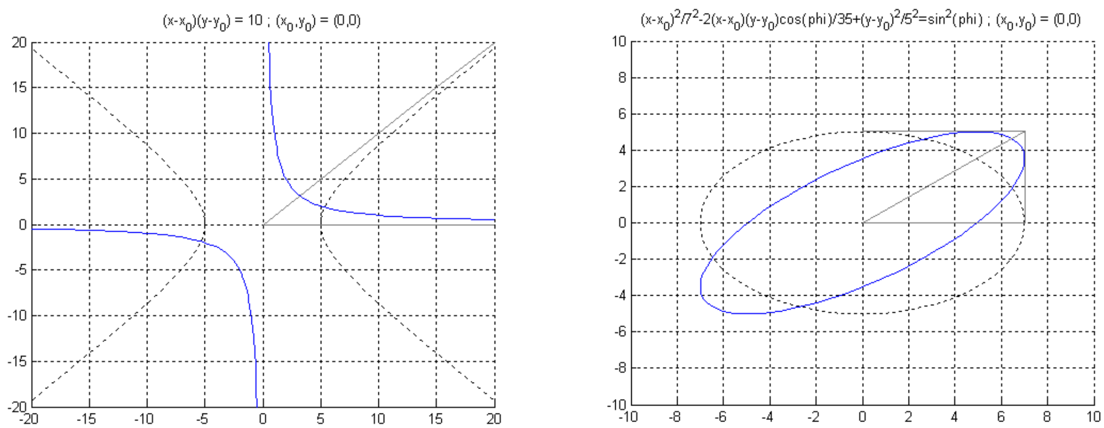


Figure 2.3 – Rotation d'une hyperbole et d'une ellipse.

Chapitre 3

Exponentielles et logarithmes

3.1 Fonctions exponentielle a^x

Si a est un nombre réel positif et n est un nombre entier, alors l'« exponentielle de n en base a » est égale à « a puissance n » soit :

$$\exp_a(n) = a \times a \times ... \times a \quad \text{(n fois)}$$

On peut étendre cette fonction aux nombres non entiers. Cette fonction correspond à la courbe d'équation

$$y = a^x$$

La courbe sera monotone respectivement croissante ou décroissante selon que la base est $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

3.2 La fonction exponentielle e^x

Il existe une base e telle que dans cette base, la dérivée de la fonction exponentielle est égale à elle-même soit $(e^x)' = e^x$. C'est cette base qui est la plus utilisée, et c'est à elle que l'on se réfère généralement si on n'en précise pas une autre.

$$y = e^x$$

En mathématiques, on appelle fonctions hyperboliques les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique. Les nom de sinus, cosinus et tangente proviennent de leur ressemblance avec les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et le terme de hyperbolique provient de leur relation avec l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

Les fonctions hyperboliques sont analogues aux fonctions trigonométriques ou fonctions circulaires. Ce sont les fonctions :

– sinus hyperbolique définie comme étant la partie impaire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
sinh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante, et impaire. Sa dérivée est cosh. Son application réciproque s'appelle argument sinus hyperbolique et est notée argsh.

– cosinus hyperbolique définie comme étant la partie paire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
cosh est une application de $\mathbb{R}$ dans $[1; +\infty[$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et paire. Sa dérivée est sinh. Sa restriction à $\mathbb{R}^+$ est une bijection dont l'application réciproque, argument cosinus hyperbolique, est notée argch.

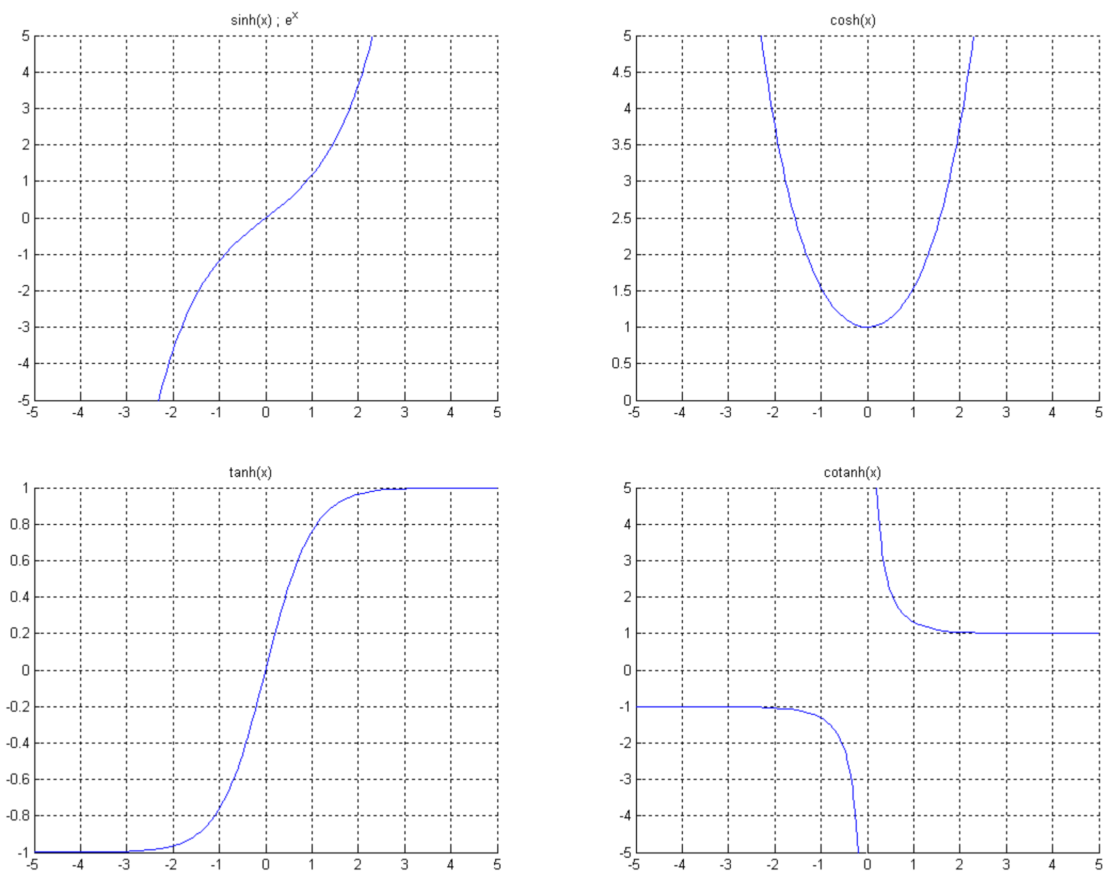


FIGURE 3.1 – Fonctions hyperboliques.

– tangente hyperbolique définie par :

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$, strictement croissante, et impaire. Sa dérivée est $\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$. Son application réciproque s'appelle argument tangente hyperbolique et est notée argth.

– cotangente hyperbolique définie par :

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

coth est une bijection de $\mathbb{R}_0$ dans $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. Sa dérivée est $\frac{-1}{sh^2} = 1-\coth^2$. Son application réciproque, argument cotangente hyperbolique, est notée argcoth.

Par construction, on obtient

$$\begin{aligned} e^x &= \cosh(x) + \sinh(x) \\ e^{-x} &= \cosh(x) - \sinh(x) \end{aligned}$$

Ainsi, la formule suivante est vraie pour tout réel x :

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

De même que les points $(cosx, sinx)$ décrivent un cercle lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, les points $(\cosh x, \sinh x)$ décrivent une branche d'hyperbole.

Le paramètre x ne peut pas être interprété comme un angle, ni comme une longueur d'arc, les fonctions hyperboliques ne sont pas des fonctions périodiques.

3.3 Propriétés des exponentielles

pour tous réels strictement positifs $a \neq 1$ et b, pour tout réel x,

$$\begin{array}{ccc} a^0 = 1 & a^1 = a & a^{-1} = \frac{1}{a} \\ a^{x+y} = a^x a^y & a^{xy} = (a^x)^y & a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} \\ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} & (ab)^x = a^x b^x & \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \end{array}$$

$$(a+b)^x \neq a^x + b^x$$

$$\sqrt{a} = a^{1/2} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

3.4 La fonction logarithme népérien $\ln x$

En mathématiques le logarithme naturel ou logarithme népérien, est le logarithme de base e. C'est la réciproque de la fonction exponentielle de base e.

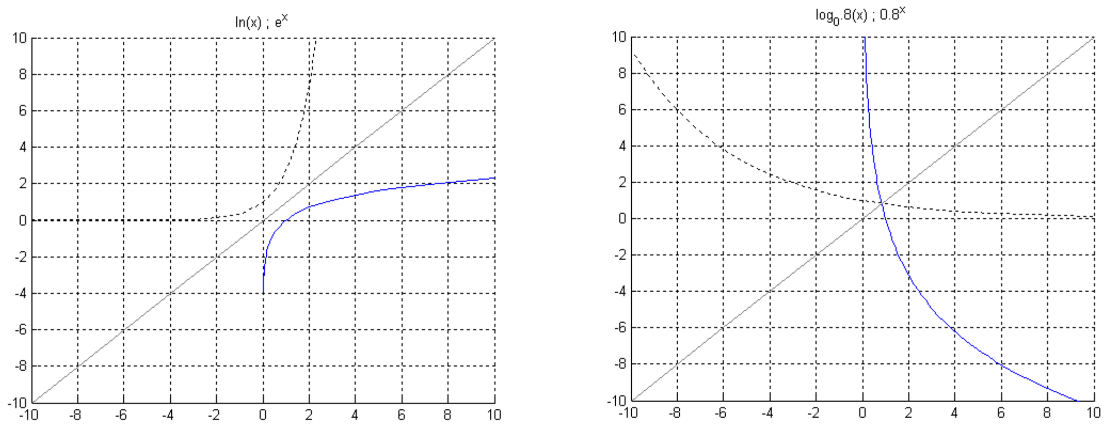


FIGURE 3.2 – On démontre que les fonctions logarithmes sont les réciproques des fonctions exponentielles.

Le logarithme de x est la puissance à laquelle il faut élever e pour trouver x.

Cette fonction a été longtemps notée *Log* pour la différencier de la fonction log (logarithme décimal). On préfère de nos jours la notation ln.

Ce logarithme est appelé logarithme népérien en hommage au mathématicien écossais John Napier qui est à l'origine des premières tables logarithmiques. Celles-ci ne furent cependant pas des tables de logarithmes népériens. On date en général la naissance des logarithmes népériens de 1647, date à laquelle Grégoire de Saint-Vincent travaille sur la quadrature de l'hyperbole et démontre que la fonction obtenue vérifie la propriété des fonctions logarithmes (transformation d'un produit en somme). La fonction ln s'est d'ailleurs appelée un certain temps fonction logarithme hyperbolique compte tenu de sa découverte comme aire sous l'hyperbole. Le terme de logarithme naturel apparaît pour la première fois dans une note de Nicolaus Mercator en 1668, quand celui-ci met en place sa série de Mercator. Sa série exploitée par Newton (méthode des fluxions et des suites infinies 1671), permet de calculer assez simplement les valeurs du logarithme de Grégoire de Saint-Vincent. Le calcul des autres logarithmes apparaît alors bien compliqué. Le logarithme de Grégoire de Saint-Vincent devient alors le logarithme le plus « simple » et le plus naturel.

Des égalités

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ e^{\ln(x)} = x$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$$

on déduit l'équivalence $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$ pour tout réel x et tour réel y positif, qui permet de résoudre des équations dans lesquelles l'inconnue apparaît en exposant.

Sa relation avec la fonction exponentielle permet d'exprimer toutes les autres fonctions exponentielles de base a ($a > 0$) par

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

Plus généralement , elle permet de définir x^y pour tout réel x strictement positif et tout réel y comme

$$x^y = e^{y \ln(x)}$$

Cette définition coïncide évidemment avec celle de x^r pour r rationnel.

3.5 Fonctions logarithme $\log_a x$

En 1588, pour faciliter ses calculs, l'astronome suisse Jost Bürgi développa le premier système logarithmique connu.

Lorsqu'en 1614, John Napier ou Neper publie son traité *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, il ne songe pas qu'il est en train de créer de nouvelles fonctions, mais seulement des tables de correspondances (logos = rapport, relation, arithmeticos = nombre) entre deux séries de valeurs possédant la propriété suivante : à un produit dans une colonne, correspond une somme dans une autre. Ces tables de correspondances ont été créées initialement pour simplifier les calculs trigonométriques apparaissant dans les calculs astronomiques et seront utilisées quelques années plus tard par Kepler. En 1619, apparaît une oeuvre posthume de Neper *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, où il explique comment construire une table logarithmique. Son travail sera poursuivi et prolongé par le mathématicien anglais Henry Briggs qui publie les tables de logarithmes décimaux et précise les méthodes d'utilisation des tables pour calculer des sinus, retrouver des angles de tangentes... Le logarithme décimal est parfois appelé logarithme de Briggs en son honneur.

En mathématiques, une fonction logarithme est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et transformant un produit en somme. Le logarithme de base a où a est un réel strictement positif différent de 1 est une fonction de ce type qui vérifie en outre $\log_a(a) = 1$.

3.6 Propriétés des logarithmes

Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, le logarithme de base a : $\log_a$, est la fonction continue définie sur $]0; +\infty[$ vérifiant, pour tous x et y réels strictement positifs

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Cette définition permet de déduire rapidement les propriétés suivantes

$$\begin{array}{ccc} \log_a 1 = 0 & \log_a a = 1 & \log_a \frac{1}{a} = -1 \\ \log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y) & \log_a(x^n) = n\log_a(x) & \log_a(a^r) = r, \forall r \in \mathbb{R} \end{array}$$

Deux fonctions logarithmes ne diffèrent que d'une constante multiplicative près :

$$\begin{array}{rcl} \log_b(x) & = & \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \\ \log_a(b)\log_b(x) & = & \log_a(x) \end{array}$$

En effet log_b est la fonction continue qui transforme un produit en somme et qui vaut 1 en b, mais la fonction $\frac{\log_a}{\log_a(b)}$ est aussi une fonction continue qui transforme un produit en somme et qui vaut 1 en b. Les deux fonctions sont donc identiques.

Toutes les fonctions logarithmes peuvent donc s'exprimer à l'aide d'une seule : $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

3.7 Echelle logarithmique

Une échelle logarithmique est un système de graduation sur une demi-droite [Ox), particulièrement adapté pour rendre compte des ordres de grandeur dans les applications. De plus elle permet de rendre accessible une large gamme de valeurs.

Un repère semi-logarithmique est un repère dans lequel l'un des axes, par exemple celui des abscisses (x), est gradué selon un échelle linéaire, comme les graduations d'un mètre courant, alors que l'autre axe, ici celui des ordonnées (y), est gradué selon une échelle logarithmique.

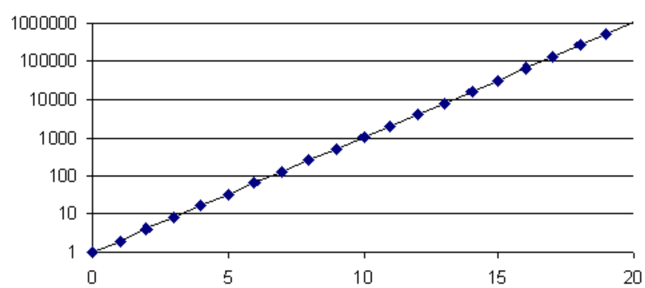


FIGURE 3.3 – Représentation graphique des termes de la suite (2^n) dans un repère semi-logarithmique.

Le repère semi-logarithmique permet de représenter des phénomènes exponentiels (ou, plus généralement, elles permettent d'amplifier les variations des valeurs proches de 0 et de rendre moins importantes les variation pour les grands nombres, en mettant en évidence plutôt les variations relatives). On peut donc considérer un phénomène comme exponentiel lorsqu'il forme une droite dans un graphique semi-logarithmique.

Ce type de repère permet aussi d'évaluer les taux de croissance d'une variable évoluant avec le temps. Quel que soit le niveau de la variable, des taux de croissance identiques seront représentés par des segments ayant la même pente. On peut ainsi comparer des taux de croissance en faisant abstraction des effets d'échelle.

Un repère log-log est un repère dans lequel les deux axes sont gradués selon une échelle logarithmique.

Le repère log-log permet de représenter des phénomènes où y est une fonction puissance de x ou, plus généralement, elles permettent d'amplifier les variations des valeurs proches de 0 et de rendre moins importantes les variation pour les grands nombres, en mettant en évidence plutôt les variations relatives.

3.8 Equations logarithmiques et exponentielles

Si $a^n = b$, alors a est la racine n^{eme} de b. Donc, $a = \sqrt[n]{b}$ et

$$n = \log_a b$$

De même, si $\log_a n = b$, alors $a^{\log_a n} = a^b$. Donc,

$$n = a^b$$

Ces propriétés s'étendent à $x \in \mathbb{R}$. On a

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y \quad \text{et} \quad \log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x$$

avec $a, y \in \mathbb{R}_0^+$ et $x \in \mathbb{R}$.

Remarquons que, lors de la résolution d'une équation, si a, x ou y ne satisfont pas aux conditions ci-dessus, nous supposerons que l'équation n'a pas de solution.

Par exemple, l'équation $E \equiv \ln(x^2 - 3x - 4) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car son domaine $dom\ E =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$, qui se déduit de

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3 + \sqrt{3^2 - 4.(-4)}}{2} = 4 \text{ ou } x < \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4.(-4)}}{2} = -1$$

ne contient pas la solution de $x^2 - 3x - 4 = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 4,6}{2}$.

Deuxième partie

Calcul différentiel

Limites - asymptotes

Dérivées - dérivée numérique - extrema - études de fonctions

Primitives et intégrales - techniques de primitivation - aire sous une courbe - volumes de révolution

Troisième partie

Exercices

Chapitre 4

Analyse

4.1 Préliminaires

4.1.1 Fonctions : domaine, ensemble image, zéros, parité, période

Exercice 1 : les bases

Identifier les zéros, le domaine, l'ensemble image, la parité et la période des fonctions représentées graphiquement dans le cours théorique.

Exercice 2 : les bases

Identifier les zéros, le domaine, l'ensemble image, la parité et la période des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{array}{ccc} -2x^2+3x & x^2+4x+2 & 3x^2+5x+1 \\ -x^2+2 & -2\sqrt{2-x} & x^3-8 \\ \sin 2x & 2\cos\frac{x}{2} & \tan(\pi-x) \end{array}$$

Exercice 3 : domaine

Identifier le domaine des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{array}{ccc} x^3-2x+1 & (x-3)^3(x^2-x-1) & \frac{1-x}{2x-1} \\ \frac{x}{3x-2)^2} & \frac{x^3}{x^3-9} & \frac{x-1}{5x^2+3x} \\ \frac{x^2+1}{2x^2-3x+1} & \frac{7}{x^2-5} & \frac{7x-3}{x^2+1} \\ \frac{x^3}{x^3-3x^2} & \frac{x-2}{x^2+2x+4} & \frac{1}{2x+3}-\frac{2}{x} \\ \frac{3x}{x^3-3x^2+x-3}-\frac{1}{4x^2-1} & \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-4}} & \frac{1}{1-\frac{3}{1-\frac{1}{x}}} \end{array}$$

Exercice 4 : domaine

Identifier le domaine des fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{cccc}
f(x) = & \sqrt{2x-1} & \sqrt{3-2x} & \sqrt{3-x^2} \\
& \sqrt{9x^2-16} & \sqrt{6x^2-5x-1} & \sqrt{x^3-x} \\
& \sqrt{x^2+x+1} & \sqrt{(x-2)^3(x+1)^2} & \sqrt{x^3-x^2} \\
& \frac{2}{\sqrt{2x^3-6x^2}} & \frac{\sqrt{3x-2}}{x+1} & \frac{3x-2}{\sqrt{x+1}} \\
& \frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+1}} & \sqrt{\frac{3x-2}{x+1}} & \sqrt{x^2-2x} - \sqrt{1-x^2} \\
& \sqrt{x-\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{\sqrt{x-1}} & \frac{1}{2x-1-\sqrt{x+1}} \\
& \frac{3x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3-x}} & \sqrt{1-\frac{x+2}{x^2-10}} & \sqrt{1+\frac{4-\sqrt{x+3}}{\sqrt{9-\frac{1}{\sqrt{4x-1}}}}}
\end{array}
$$

Exercice 5 : domaine

Identifier le domaine des fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{cccc}
f(x) = & \frac{1}{\cos x} & \frac{1}{\sin x} & \tan 2x \\
& \cot(\frac{\pi}{6}-x) & \frac{\sin^3 x}{1-\cos x} & \frac{1}{1-2\sin x} \\
& \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} & \sqrt{\sin x} & \sqrt{\cos \frac{x}{2}} \\
& \sqrt{1-\sin x} & \sqrt{\tan x} & \frac{1}{\sqrt{\sin(x+\frac{\pi}{4}}} \\
& \sqrt{\frac{\sin x}{2\cos x-1}} & \sqrt{\sin x+\cos x} & \sqrt{\frac{\sin x}{1-\sqrt{1-\cos x}}}
\end{array}
$$

Exercice 6 : domaine

Trouver une fonction ayant pour domaine de définition l'ensemble suivant :

$$
\begin{array}{cccc}
dom\ f = & \mathbb{R} & \mathbb{R}\backslash\{2\} & \mathbb{R}_0 \\
& \mathbb{R}\backslash\{-1,2\} & [1,+\infty[&]-\infty,3] \\
&]-2,+\infty[&]-\infty,\frac{5}{2}[& \mathbb{R}^+ \\
& [-2,3] & [-2,3[&]-2,3] \\
&]-2,3[& [-4,4]\backslash\{1\} & [-3,-1]\cup\{0\} \\
& \mathbb{R}^-\cup[2,5[& \mathbb{R}^-\cup[2,5] & \mathbb{R}^-\cup]2,5[
\end{array}
$$

Exercice 7 : ensemble image

Identifier l'ensemble image des fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{cccc}
Im\ f & 2x+3 & x^2+1 & 4-x^2 \\
& x^2-3x+2 & x^3+2 & |2x+1| \\
& 2|x|+1 & \frac{1}{x+1} & \frac{x-1}{x+2} \\
& \frac{x-1}{2x} & \sqrt{x-3} & \sqrt{x}-3 \\
& 1-3\sqrt{x} & \sin x & \frac{1}{\cos x} \\
& |\sin 2x| & 3-\cos x & 5-2\sin x
\end{array}
$$

Exercice 8 : zéros

Identifier les zéros des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{cccc}
f(x) = & 4x+1 & x^2-5x & x^3+8 \\
& 4x^3-9x & \frac{x-2}{x+3} & \frac{1}{x-5} \\
& \frac{1}{x}+\frac{1}{x+2} & \sqrt{x+1}-2 & x-\sqrt{2x-3} \\
& \sqrt{x+1}-\sqrt{2x} & \frac{x^3-x}{\sqrt{x+1}} & \sin x \\
& \tan 3x & 1-\frac{1}{2\sin x} & \sin\frac{1}{x}
\end{array}$$

Exercice 9 : parité

Identifier la parité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{cccc}
f(x) = & x^3-3x & x\tan x & x^4-2x^3+1 \\
& \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3 & \sqrt{4x^2-1} & \sqrt{2x} \\
& \frac{1}{x^3-5x} & \sqrt{1-\cos x} & \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \\
& |\sin x| & \sin^2 x & (x^3-x)^2
\end{array}$$

4.1.2 Eléments de symétrie d'une fonction

Exercice 1 : les bases

Identifier les éléments de symétrie des fonctions représentées dans le cours théorique.

Exercice 2 : les bases

Identifier les éléments de symétrie des fonctions suivantes (centre, axe(s) vertical) :

$$\begin{array}{cccc}
f(x) = & x^3-1 & x^2-4x-3 & \frac{1}{x^2+4x+4} \\
& \cos x & \frac{x-1}{x+2} & \sqrt{x^2-2x} \\
& \tan\frac{\pi x}{2} & \tan(\frac{\pi}{2}x-\pi) & \frac{1-x}{x+2} \\
& |x^2-6x+9|+1 & \frac{2-x}{x+1} & \frac{\sin\frac{x}{2}}{x}
\end{array}$$

4.1.3 Translations et affinités

Exercice 1 : les bases

Déterminer le type des fonctions (classification) représentées sur les graphiques de la figure 4.1.

Exercice 2 : les bases

Représenter sur un même graphique
- $y=x^2$, $y=x^2+4$, $y=x^2-2$.
- $y=x^2$, $y=(x-4)^2$, $y=(x+2)^2$.
- $y=x^2$, $y=-x^2$, $y=4x^2$, $y=\frac{x^2}{4}$.

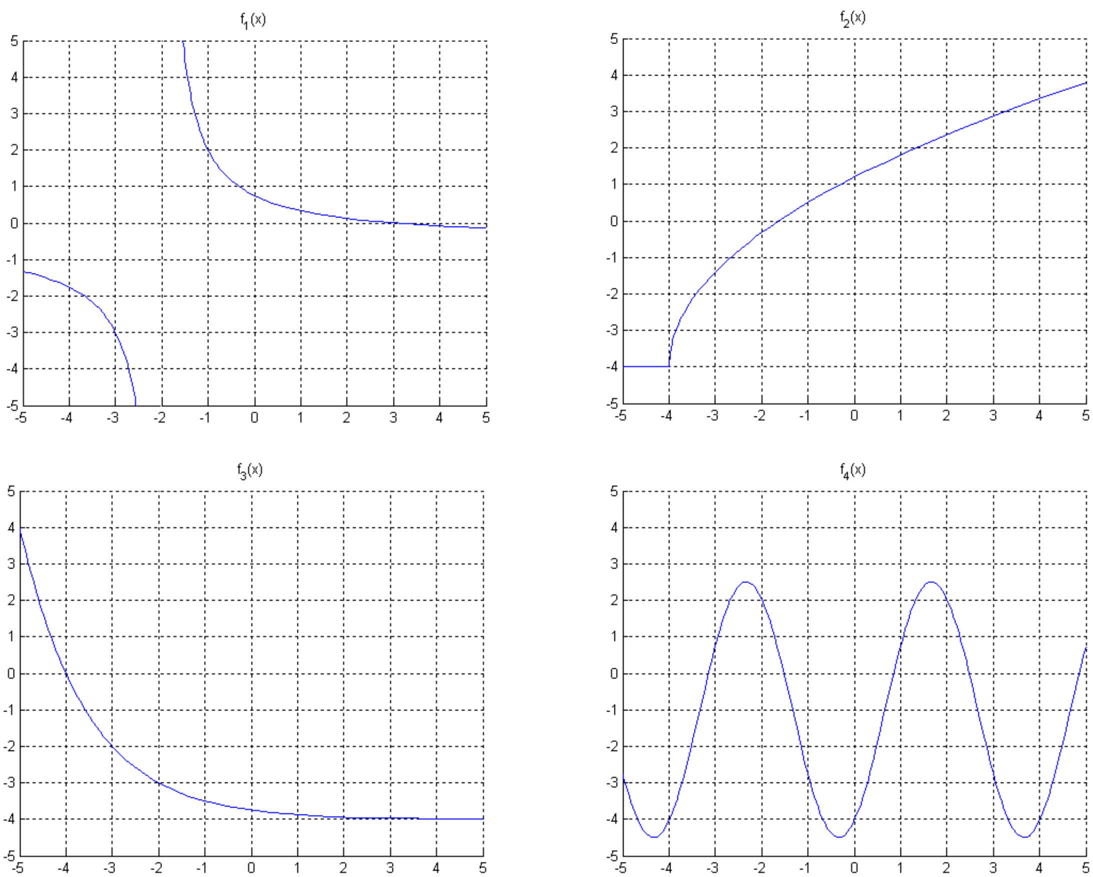


FIGURE 4.1 – Exercice 1

Exercice 3 : translations et affinités

Dessiner les graphiques des fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{cccc}
f(x) = & x-3 & x+4 & x+\frac{1}{2} \\
 & x^2-6 & x^2-4x+4 & x^2+x \\
 & 2x-3 & -3x & 4 \\
 & \frac{x}{2}+1 & 4-x^2 & 2x^2 \\
 & \frac{1}{2x} & |(x-2)^2|+4 & \sin\frac{\pi x}{2} \\
 & 35+2x-x^2 & \frac{x^3}{3}-8 & \sqrt{x-9}-2 \\
 & \frac{x+1}{x-2} & \frac{2x+3}{1-x} & -\frac{1}{2}\ln(-3e^{-2}x+e^{-2}) \\
 & e^{x+2} & 4\sin\frac{\pi x}{4} & \pi[\cos\pi x]
\end{array}
$$

Exercice 4 : translations et affinités

Dessiner les graphiques correspondant aux équations suivantes :

$$
\begin{array}{ccc}
y = 2x-5 & 2x-3y=0 & x=3(y-1) \\
4x-3y-6=0 & 2y+7=0 & x^2+2y-x-6=0 \\
y=(x-2)(x+4) & y=(x+2)^2-3 & y=4-(2x+3)^2 \\
(2x-3)(2x+3)-4y=0 & (x-2)(y+3)=4 & 3-2x=\sqrt{3y-2}
\end{array}
$$

4.2 Coniques

4.2.1 Lieux géométriques

Exercice 1

Déterminer le lieu géométrique des points situés à égale distance de deux sommets opposés d'un carré.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré. Déterminer le lieu géométrique des points P tels que $(\vec{PA}+\vec{PB})\cdot(\vec{PC}-\vec{PB}) = |AB|^2$.

Exercice 3

Déterminer le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés de leur distance au sommets d'un triangle équilatéral est égale au carré de la longueur d'un côté de ce triangle. (Indice : placer le système d'axes sur le centre de gravité du triangle.)

4.2.2 Paraboles, ellipses, hyperboles

Parabole

Exercice 1

Tracer une parabole pour laquelle la distance du foyer à la directrice mesure 6 cm.

Exercice 2

Déterminer la coordonnée du foyer et l'équation de la directrice de la parabole P.

$$P \equiv \quad y^2 = 12x \quad y^2 = 3x \quad y = 2x^2$$

Exercice 3

Déterminer le réel a pour que la parabole $P \equiv y = 2x^2$ vérifie la condition suivante :
- P comprend le point $A(6,2)$,
- P admet $F(0,1)$ comme foyer,
- P admet $d \equiv 4y + 1 = 0$ comme directrice,
- La distance du foyer à la directrice vaut 6.

Exercice 4

Déterminer la coordonnée des éventuels points communs à la droite d et à la parabole P. Spécifier la position de d par rapport à P.
- $P \equiv y = \frac{x^2}{6}$ et $d \equiv x = 2$,
- $P \equiv y = \frac{x^2}{2}$ et $d \equiv y - 3 = 0$,
- $P \equiv y = \frac{x^2}{2}$ et $d \equiv y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$,
- $P \equiv y = \frac{x^2}{8}$ et $d \equiv y - x + 3 = 0$,
- $P \equiv y^2 = x$ et $d \equiv y = 2x - 3$.

Exercice 5

Déterminer le lieu géométrique des points situés à égale distance d'une droite $d \equiv x = -4$ et d'un point $F \equiv (2,0)$.

Exercice 6

Déterminer le sommet de la parabole d'équation $y = x^2 + (m+5)x + (m+8)$ pour $m = -5$, -8 et 0.

Exercice 7

Trouiver l'équation de la parabole passant par les points $A(0,1)$, $B(2,3)$ et $C(3,10)$.

Exercice 8

Trouver l'équation de la parabole d'axe parallèle à Oy, de sommet $S(1,3)$ et coupant l'ordonnée en $y=4$.

Exercice 9

Un train de marchandises roule à la vitesse constante de 54 km/h. Un second train, lancé à 126 km/h, roule sur la même voie et dans le même sens. À un certain moment, le conducteur du second train voit 150 m devant lui le premier train. Il actionne aussitôt les freins, ce qui provoque une décélération constante de 1 m/s^2.

Y aura-t-il collision entre les deux trains ? Si oui, combien de temps aura duré le freinage et quelle distance aura parcourue le second train pendant ce temps ?

Ellipse

Exercice 1

Tracer une ellipse dont le demi-grand axe mesure 5 cm et le demi-petit axe 3 cm.

Exercice 2

Trouver les coordonnées des sommets et des foyers de l'ellipse E.

$$E \equiv \begin{array}{ccc} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 & \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 & \frac{x^2}{4}+y^2=1 \\ \frac{36x^2}{25}+\frac{9y^2}{4}=1 & x^2+5y^2=1 & 3x^2+4y^2=1 \\ x^2+8y^2=2 & 4x^2+16y^2=9 & 2x^2+4y^2=8 \end{array}$$

Exercice 3

Dessiner à main levée les ellipses suivantes et situer leurs foyers :

$$E \equiv \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad 4x^2+9y^2=16 \quad 4x^2+9y^2=1$$

Exercice 4

Déterminer les réels a et b pour que l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1$ vérifie les conditions suivantes :
- E comprend les points $P(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3})$ et $Q(2\sqrt{6}, \frac{4}{5})$,
- E admet les points $A(6,0)$ et $B(0,4)$ pour sommets,
- E admet le point $A(13,0)$ pour sommet et le point $F(12,0)$ pour foyer,

- E admet le point $B(3,0)$ pour sommet et le point $F(4,0)$ pour foyer,
- E admet le point $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$ et admet le point $F(2,0)$ comme foyer.

Exercice 5

Déterminer la coordonnée des éventuels points communs à la droite d et à l'ellipse E. Spécifier la position de d par rapport à E.

- $E \equiv \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$ et $d \equiv y+4=0$,
- $E \equiv \frac{x^2}{20}+y^2=1$ et $d \equiv x-2=0$,
- $E \equiv \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ et $d \equiv y-2x=0$,
- $E \equiv \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ et $d \equiv x+y=4$,
- $E \equiv \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ et $d \equiv x+y+5=0$,
- $E \equiv x^2+3y^2=1$ et $d \equiv 2x-4y+1=0$.

Exercice 6

Déterminer l'équation de l'ellipse qui a pour foyers $F \equiv (0,3)$ et $F' \equiv (0,-3)$ et pour demi-grand axe $a=6$.

Exercice 7

Dessiner un cercle, centré à l'origine, de rayon $r=5$ et le point $P(-3,-4)$. Déterminer graphiquement le sinus de l'angle θ formé avec l'axe Ox et la droite OP.

Exercice 8

Sachant que l'accélération gravitationnelle dans le champ de la Terre vaut $G\frac{m_T}{r^2}=\frac{398600}{r^2}\ m/s^2$ où r est la distance, calculer à quelle distance de la surface de la Terre doit se trouver un satellite géostationnaire. (Le rayon de la terre vaut environ 6400 km. Indice : il faut que l'accélération centripète et l'accélération gravitationnelle soient égales.)

Exercice 9

Trouver une équation du cercle satisfaisant aux conditions suivantes :

- De centre $C(2,-3)$ et de rayon $r=5$,
- De centre $C(-4,6)$ et passant par $P(1,2)$,
- Tangent aux deux axes, le centre se trouve dans le 2^e quadrant et le rayon vaut $r=4$,
- Les points $A(4,-3)$ et $B(-2,7)$ sont les extrémités d'un diamètre.

Hyperbole

Exercice 1

Tracer l'hyperbole pour laquelle la distance entre les sommets mesure 4 cm et la distance entre les foyers mesure 6 cm.

Exercice 2

On donne l'hyperbole $H \equiv \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$. La distance d'un point P de cette hyperbole au foyer F est égale à 5. À quelle distance se trouve P par rapport au foyer F' ?

Exercice 3

On donne l'hyperbole $H \equiv \frac{9x^2}{49} - \frac{y^2}{4} = 1$. La distance d'un point P de cette hyperbole au foyer F est égale à $\frac{22}{3}$. À quelle distance peut-il être de l'autre foyer ?

Exercice 4

Déterminer les éléments caractéristiques de l'hyperbole H : coordonnées des sommets et des foyers et équations cartésiennes des asymptotes.

$$H \equiv \begin{array}{lll} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 & \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 & \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 & x^2 - y^2 = 1 & 2x^2 - y^2 = 2 \end{array}$$

Exercice 5

Déterminer les réels a et b pour que l'hyperbole $H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1$ vérifie les conditions suivantes :
- H admet le point $A(2,0)$ pour sommet et la droite $d \equiv y = 3x$ pour asymptote,
- H admet le point $A(3,0)$ pour sommet et le point $F(5,0)$ comme foyer,
- H admet le point $F(\sqrt{5},0)$ pour foyer et la droite $d \equiv y = 2x$ pour asymptote,
- H comprend le point $P(3,\frac{5}{2})$ et admet le point $A(2,0)$ pour sommet,
- H comprend le point $P(\frac{5}{2},1)$ et admet le point $F(\sqrt{30},0)$ pour foyer,
- H comprend les points $P(4,\sqrt{3})$ et $Q(6,3\sqrt{2})$.

Exercice 6

Déterminer la coordonnée des éventuels points communs à la droite d et à l'hyperbole H. Spécifier la position de d par rapport à H.
- $H \equiv x^2 - y^2 = 1$ et $d \equiv 2x - y - 4 = 0$,
- $H \equiv 7x^2 - 3y^2 = 1$ et $d \equiv 5x - 3y - 1 = 0$,
- $H \equiv \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ et $d \equiv 6x - 5y - 10 = 0$,
- $H \equiv \frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ et $d \equiv 4x - 5y - 10 = 0$.

4.2.3 Translations et rotations de coniques - coniques dégénérées

Exercice 1 : coniques dégénérées

Soit la forme générale d'une courbe du second degré :

$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0$$

Soit $\delta = aa' - b''^2$. Si
- $\delta > 0$, la courbe est une ellipse,
- $\delta = 0$, la courbe est une parabole,
- $\delta < 0$, la courbe est une hyperbole.

Identifier la nature des courbes Γ telles que

$$\Gamma \equiv \quad (x-y-4)(x+y+3) = 5 \quad (x-y+2)^2 = 0 \quad 2x^2 - 7xy + 3y^2 - 8x - 6y - 24 = 0$$

Quelles sont les particularités de ces courbes ?

Exercice 2 : translations et rotations

Dessiner les coniques suivantes :

$$\Gamma \equiv \begin{array}{ccc} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 & \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 & (x-1)(y-2) \\ 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 = 1 & 4x^2 - 4\sqrt{3}xy + 4y^2 = 1 & 3x + xy - 2y - 6 = 0 \end{array}$$

4.3 Exponentielles et logarithmes

4.3.1 exercices fondamentaux

Résoudre les équations simples

$$\begin{array}{ccc} 2^x = 16 & 5^x = \frac{\sqrt{5}}{5} & 8^x = 2 \\ 5^x = 1 & 2^x = \sqrt[3]{4} & \left(\frac{5}{2}\right)^x = 0,16 \\ 3^x = 243 & \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} & \left(\frac{2}{5}\right)^x = 0,16 \\ 3^x = \sqrt{3} & 10^x = 0,01 & 16^x = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 10^x = 100 & \log x = 2 & \log 1000000 = x \\ 10^x = 0,001 & \log x = -3 & \log 0,01 = x \\ 10^x = 1 & \log x = 0 & \log \frac{10^4}{10^{-3}} = x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \log n = -3 & \frac{1}{2} \log n = 4 & \log(\log n) = 0 \\ 10^{\log n} = 100 & \frac{\log 100}{n} = \frac{3}{2} & \log(\log n) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3^x + 3^{x+1} = 4 & 5^{x+3} - 5^{x+1} = 3000 & 9.22^x = 4.3^x \\ 2^x + 2^{x-2} = \frac{5}{2} & \left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{65}{26} & 30.3^x - 9^x - 81 = 0 \\ 4^{x+3} - 2^{2(x+2)} = 192 & 5.3^{x-1} - 2.3^{1-x} = 3 & 3^x + 3^{1-x} = 4 \end{array}$$

Problèmes d'applications des exponentielles et logarithmes

1. Dans une culture de bactéries, toutes les bactéries se divisent après un certain temps (τ_G) et se transforment en deux bactéries filles. Le temps τ_G qui s'écoule entre 2 divisions est appelé *durée d'une génération*. On suppose que toutes les bactéries présentent dans le milieu de culture se divisent en même temps. Soit N_0 le nombre de bactéries présentes à l'instant $t = 0$ (génération 0).
   - Quel est le nombre N_n de bactéries présentes à la n^{eme} génération ?
   - Si τ_G est la durée d'une génération, quel est le nombre N_t de bactéries présentes à l'instant t ?
   - Si le nombre initial de bactéries vaut $N_0 = 2.10^3$ et $\tau_G = 45\ min$, calculer le nombre de bactéries présentes aux instants $t = 1h$, $2h$, ... $7h$, $8h$.

2. Les noyaux d'une substance radioactive se transforment spontanément en d'autres noyaux. Il s'agit d'un processus aléatoire qui n'est pas prévisible. Cependant, étant donné le très grand nombre d'atomes présents dans la matière, nous pouvons, sous couvert de la régularité statistique, affirmer que le temps mis pour que la moitié des noyaux d'un volume donné de matière se désintègrent ne dépend pas du nombre d'atomes présent (nous ne tiendrons pas en compte les éventuelles réactions en chaîne) et que ce temps est une caractéristique de la substance radioactive considérée. Ce temps est appelé *temps de demi-vie* ($\tau_{1/2}$).
   - Avec la quantité initiale N_0, quel sera le nombre de noyaux présents après un temps égal à 3 demi-vies ?
   - Sous les considérations précédentes, établir la loi exprimant la quantité de noyaux présents à un instant t quelconque.
   - La masse d'un élément radioactif étant proportionnel au nombre de noyaux, établir le graphique de la masse d'un élément radioactif de masse initiale $m_0 = 1\ g$ et de demi-vie $\tau_{1/2} = 0,5\ \mu s$.
   - Cette loi peut aussi s'écrire sous la forme $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$. Déterminer la constante λ.

Calculs et Simplifications

Simplifier

$$\begin{array}{ccc} 10000^{\frac{1}{4}} & \frac{x^2}{64} & (x^4y^4)^{\frac{1}{2}} \\ x^2(x^6)^{-\frac{1}{3}} & (x^4y^{-8})^{\frac{1}{2}} & \sqrt[3]{x^{-9}} \\ 125^{-\frac{1}{3}} & (10^4)^{\frac{3}{4}} & 8^4 \end{array}$$

Sachant que $\log 2 = 0,30103$, calculer

$$\begin{array}{ccc} \log 4 & \log \frac{1}{16} & \log 3,2 \\ \log 0,2 & \log 0,0064 & \log 5 \end{array}$$

Exprimer avec des nombres premiers

$$\begin{array}{ccc} \ln 20 & \log_2 64 & \log_3 41,7 \\ \ln 30 & \log_3 75 & \log_{\frac{1}{2}} 54 \\ \ln 0,16 & \log_7 32,3 & \log_4, 52 \end{array}$$

Simplifier

$$\begin{array}{ccc} e^{2\ln 5} & e^{2\ln x} & e^{2\ln 3x} \\ e^{-\ln 3} & e^{-\ln 3x} & e^{2\ln 5x-\ln 2} \\ \ln e^2 & \ln e^{ex^2} & \ln x^e \\ \ln \sqrt[5]{e} & \ln \sqrt[3]{e^2} & \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)^3 \\ \log_2 16 & \log_8 \sqrt{2} & \log_6 \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \log_2 \sqrt{2} & \log_6 \sqrt[3]{36} & \log \sqrt{\frac{1}{100}} \end{array}$$

Résoudre les équations « moins simples »

1. (a) $e^{2x} = e$
   (b) $e^x = \frac{1}{3}$
   (c) $e^{-\frac{x}{2}}$
   (d) $2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$
   (e) $e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0$
   (f) $10^{6x} - 3.10^{3x} - 4 = 0$
   (g) $3^x + \frac{2}{3^x} = 3$
2. (a) $\ln(x+4) = 0$
   (b) $\ln(2x-3) = \ln 12$
   (c) $\ln(4-x) = 2\ln 2$
   (d) $\ln(3x+1) = \ln 7$
   (e) $\ln(-x) = 1$
   (f) $\ln(7-x) = 3\ln 2$
   (g) $2\ln(-2-x) = \ln 9$
   (h) $\ln(-2-5x) = \ln 13$

3. (a) $\ln(2x-3) + \ln(x-4) = 2\ln 5$
   (b) $\ln(x+2) + \ln(-x) = \ln\frac{3}{4}$
   (c) $\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) = \ln 5x$
   (d) $2\ln 2 + \ln(x^2-1) = \ln(4x-1)$
   (e) $\log(x-2) + \log(x+3) = 2$
   (f) $\log(3-x) + \log(-x-6) = 1$
   (g) $8\log^3 x - 9\log^2 x + \log x = 0$
   (h) $\log^4 x - 34\log^2 x + 225 = 0$
4. (a) $\ln(x^2-4x+3) = \ln 3$
   (b) $\ln\sin x = 0$
   (c) $\ln\cos x = -\frac{1}{2}\ln 2$
   (d) $\ln(x+|x-2|) = \ln 10$
   (e) $2\ln(x+1) - \ln(x+4x+3) = 2\ln 3$

Problèmes

1. Un capital est placé au taux annuel de 10 % à intérêts composés. Au bout de combien de temps le capital aura-t-il doublé ? Triplé ?

2. Une formule empirique permet d'estimer la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si $h(x)$ exprime la taille (en cm) à l'âge x (en années) pour $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$, alors $h(x)$ est définie par :

$$h(x) = 70,228 + 5,104.x + 9,222.\ln x$$

   1. Quelle sera la taille probable d'un enfant qui atteint l'âge de deux ans ?
   2. Quel âge probable a un enfant mesurant 100 cm ?
   3. Quel âge probable a un enfant mesurant 50 cm ?

3. Une substance radioactive se désintègre suivant la loi $q(t) = q_0 e^{-\lambda t}$, où q_0 est la quantité initiale de la substance, λ une constante positive (période radioactive) et $q(t)$ la quantité au moment t.
   1. Par une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité de λ dans le système international.
   2. Montrer que la vitesse de désintégration est proportionnelle à $q(t)$. ($(ke^{ax})' = kae^{ax}$)
   3. La demi-vie du césium 137 est de 30 ans. Si l'on en possède $1g$, combien nous en restera-t-il au bout de 15 ans ? 150 ans ? 1500 ans ?

4. L'équipe du laboratoire d'imagerie médicale doit réaliser 2 examens dans la matinée sur deux patients différents. Deux doses de traceur (glucose) contenant le même nombre N_0 de noyaux radioactifs de « fluor 18 » sont fabriquées en même temps avant leur injection pour réaliser ces examens. Au moment de son injection au patient la dose de traceur doit avoir une activité A de 260.10^6 Bq. Lors du premier examen on injectera la dose notée D_1 à 9 h 00. On rappelle que l'activité A d'une source radioactive peut se mettre sous la forme $A = A_0 e^{-\lambda t}$.
   1. Calculer l'activité du « fluor 18 » présent dans le patient lors d'un examen médical effectué 1 h après la première injection. On donne $\lambda = 10 - 4s^{-1}$.
   2. L'injection de la dose D_2 au deuxième patient a lieu à 9 h 30. Calculer le temps nécessaire après l'injection pour que l'activité soit 100 fois plus faible qu'au moment de l'injection.

5. La dimension M d'une mémoire tampon intervenant dans un réseau téléinformatique est donnée par la formule $M(\tau) = -\frac{30}{\log \tau} - 10$ où τ représente l'intensité du trafic ($0 < \tau < 1$). On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,2 ; 0,8] par $f(x) == -\frac{30}{\log x} - 10$.
   1. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $\ln x$.
   2. Représenter graphiquement la fonction $f(x)$.
   3. Déterminer l'intensité du trafic pour une dimension de mémoire tampon de 64 (par calcul et graphiquement).

6. La fonction de croissance W de von Bertanlanffy donne approximativement le poids $W(t)$ (en kg) en fonction de l'âge t (en années) des éléphants africains femelles. Son expression est

$$W(t) = 2600(1 - 0,51.e^{-0,075.t})^3$$

1. Evaluer le poids et le taux de croissance d'une nouvelle née ?
2. Estimer l'âge et le taux de croissance d'une femelle de 1800 kg.
3. Calculer et interpréter $\lim_{t\to+\infty} W(t)$?

7. Un millier de truites stériles, âgées d'un an, sont jetées en 2007 dans un grand étang. On prévoit qu'après t années , le nombre de truites encore en vie sera $N(t) = 1000.(0,9)^t$.
   1. Combien de truites trouvera-t-on dans l'étang en 2008, 2009, ... 2015 ?
   2. En quelle année le nombre de truites atteindra-t-il 206 individus ?
   3. Le poids $P(t)$ (en grammes) d'une truite devrait augmenter selon la formule $P(t) = 90 + 770.t$. Après combien d'années le poids total des truites de l'étang sera-t-il maximal ? (Indice : maximiser la fonction $f(x)$ revient à trouver les zéros de sa dérivée $f'(x)$ pour lesquels la dérivée seconde $f''(x)$ est négative. On pourra utiliser les formules suivantes : $(f(x).g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $(ax + b)' = (ax)' + (b)' = a + 0$ et $(ke^{ax})' = kae^{ax}$.)

8. Lorsqu'un médicament est injecté dans le sang, sa concentration t minutes plus tard est donnée par $C(t) = \frac{k}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$, où a, b et k sont des constantes positives.
   1. A quel moment la concentration sera-t-elle maximale ? ($(ke^{ax})' = kae^{ax}$)
   2. Que peut-on dire de la concentration après une longue période de temps ?
   3. Pour $k = 6$, $a = 1,2$ et $b = 1,728$, à quel moment la concentration sera-t-elle d'un cinquième de la valeur maximale ?

Exercices complémentaires

Exercice 1

Calculer ou simplifier les expressions suivantes

$$\begin{array}{ccc} 2^4 & 3^2 & 2^2 2^3 \\ x^5 x^3 x & 5^{-2} & 5^{-3} 5^4 \\ x^4 x x^{-3} & \frac{x^4}{x^3} & \frac{x^4}{y^4} \\ (a^2 x^4)^{\frac{1}{2}} & (a^3 x^6)^{\frac{1}{2}} & (x^{-2} y^5)^{\frac{1}{2}} \\ 1000^{\frac{1}{3}} & (a+b)(a^2 - ab + b^2) & (a^2+b^2)^2 - 2a^2 b^2 \end{array}$$

Exercice 2

Sachant que $\log 2 = 0,3$, calculer

$$\begin{array}{ccc} \log 4 & \log 0,2 & \log \frac{1}{16} \\ \log 0,0064 & \log 3,2 & \log 5 \end{array}$$

Exercice 3

Exprimer, en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$, les valeurs

$$\begin{array}{ccc} \ln 20 & \ln 30 & \ln 0,5 \\ \log_2 64 & \log_3 75 & \log_5 0,3 \end{array}$$

Exercice 4

Résoudre les équations

$$\begin{array}{ccc}
e^{2x} = e & e^{x} = \frac{1}{3} & e^{-\frac{x}{2}} = 4 \\
2e^{2x} - 7e^{x} + 3 = 0 & e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0 & 10^{6x} - 3.10^{3x} - 4 = 0 \\
3^{x} + \frac{2}{3^{x}} = 3 & \ln(2x-3) + \ln(x-4) = 2\ln 5 & \ln(x+2) + \ln(-x) = \ln\frac{3}{4} \\
\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) = \ln 5x & 2\ln 2 + \ln(x^2-1) = \ln(4x-1) & \log(x-2) + \log(x+3) = 2 \\
\log(3-x) + \log(-x-6) = 1 & 8\log^3 x - 9\log^2 x + \log x = 0 & \log^4 x - 34\log^2 x + 225 = 0
\end{array}$$

Exercice 5

Au 1^{er} janvier 1999, une ville comptait 3 millions d'habitants. Après enquête, on constate que la population diminue de 4% par an. On suppose que le phénomène continue dans les années suivantes.

- Exprimer le nombre d'habitant en fonction du nombre d'années t qui s'écoule depuis 1999.
- Calculer la population de 2004 à 2009.
- Au cours de quelle année la population de la ville atteindra-t-elle pour la première fois un effectif inférieur à 2 millions d'habitants ?

Exercice 6

La taille d'un séquoïa augmente de 7% par an. Dans combien de temps un séquoïa de 50 cm atteindra-t-il une hauteur de

- 50 m ?
- 140 m ?

Exercice 7

Avant-hier, une population de bactéries était de $4,23.10^5$ individus. Le lundi précédent, elle était de $9,93.10^4$. Estimer la population de bactéries aujourd'hui, lundi et mercredi.

Exercice 8

L'iode 131 (I_{53}^{131}) est utilisé dans le traitement des troubles de la thyroïde. Sa demi-vie dans le traitement est de 8,1 jours. Si un patient ingère une faible quantité d'iode 131, sans tenir compte de l'élimination par le corps, calculer la fraction $\frac{N}{N_0}$ qui subsisterait après

- 8,1 jours,
- 16,2 jours,
- 60 jours.

Exercice 9

En fait, l'iode (y compris l'iode 131) est lentement évacuée par l'organisme (sueur, ...), avec une demi-vie biologique de 180 jours. Corriger les calculs de l'exercice précédent en tenant compte des deux processus d'élimination.

Exercice 10

Afin d'établir un diagnostic, du soufre 35 (emetteur beta de forte energie et de courte durée de vie) est administré à un patient. Déterminer le pourcentage de ce radioisotope qui subsiste dans l'organisme après 116 jours, sachant que la demi-vie biologique du soufre est de 22 jours et que la demi-vie du soufre 35 est de $87,1$ jours.

Exercice 11

Afin d'établir un diagnostic hématologique, du fer 59 (emetteur beta de forte energie et de courte durée de vie) est administré à un patient. Après combien de temps ce radioisotope sera-t-il éliminé jusqu'au seuil de $0,781\%$ de la dose administrée, sachant que la demi-vie biologique du fer est de 65 jours et que la demi-vie du fer 59 est de $46,3$ jours ?

Exercice 12

Un radioélément a une demi-vie de $9,4$ jours. Administré à un patient, il n'en subsiste qu'1% dans son organisme après 50 jours. Calculer la demi-vie biologique de cet élément.

Chapitre 5

Calcul différentiel

5.1 Limites

Exercice 1 : Calculez les limites

$$\begin{array}{r|cccc}
\lim_{x\to -3} & x-2 & \frac{|x+3|}{x-2} & \frac{x-2}{|x+3|} \\
\lim_{x\to 1} & (1-x)^2 & \frac{1}{(x-1)^2} & \frac{1}{(1-x)^2} \\
\lim_{x\to 0} & 1-\cos x & \frac{1}{\cos x} & \frac{1}{1-\cos x} \\
\lim_{x\to \frac{1}{2}} & 4x^2-4x+1 & \frac{1}{4x^2-4x+1} & \frac{2x-3}{4x^2-4x+1} \\
\lim_{x\to 2} & \sqrt{x^2-4} & \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} & \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}
\end{array}$$

Exercice 2 : Calculez les limites à droite et à gauche

$$\begin{array}{ccc}
\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} & \lim_{x\to -2} \frac{2x}{x^2-4} & \lim_{x\to 3} \frac{1}{9-x^2} \\
\lim_{x\to -4} \frac{1}{x^2+3x-4} & \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} & \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\tan x}
\end{array}$$

Exercice 3 : Calculez les limites (à droite et à gauche éventuelles)

$$\begin{array}{cccc}
\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} & \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9} & \lim_{x\to \sqrt{3}} \frac{x^2-1}{x^2-3} & \lim_{x\to \sqrt{3}} \frac{x^4-4x^2+3}{x^4-6x^2+9} \\
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} & \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\tan \frac{x}{2}} & \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin x} & \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}
\end{array}$$

Exercice 4 : Calculez les limites des fonctions suivantes pour $x \to \pm\infty$

$$\begin{array}{cccccc}
x^2-2x+1 & 2x^2-x-5x^4 & (2x^2-x)(5-4x^2) & x^3-3 & 1-x-3x^2 & 1-2x+2x^5 \\
x^4-2x^2+1 & x^2-4x^3-x^4 & (3-x^3)(1-2x-2x^5) & \frac{x^2-2x+1}{x-1} & \frac{x-1}{x^2-2x+1} & \frac{1-x}{x^2-2x+1} \\
\frac{\sqrt{x^2-1}}{3x} & \frac{x(\frac{5}{x}-1)}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}-2}} & \frac{\sqrt{x^3+1}}{x^2-4} & \frac{3-2x}{\sqrt{x^2-x-2}} & \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{6x-5}} & \frac{\sqrt[3]{x^4-1}}{\sqrt{-x^3+6x^2-10x+5}} \\
\frac{5-3x}{4x+7} & \frac{2x+3}{x^2} & \frac{2x^2+3x-2}{x^2-8x+1} & \frac{\sin x}{x} & \frac{|x|}{x^3-1} & \frac{x^3+2x^2}{2-\sin x}
\end{array}$$

Exercice 5 : Calculez les limites

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{3x}{2-x} \quad \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{x-1}{x+2} \quad \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{2x}{x+3} \quad \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{3-x}{x+1} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{2-x}{x+1} \quad \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{2x}{3-x} \quad \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{2x-1}{(x-2)^2} \quad \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{x-2}{x+1} \quad \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{6x}{x+2}$$

Exercice 6 : Etudiez les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}-x\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2x\sqrt{2}+2}{x^2-2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x}{x^3+x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+2}{x^2+2x-3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-3x+2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{5x+2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to-3} \frac{x^3+27}{x+3}$$

Exercice 7 : Continuité

Soient deux fonctions f et g données par leur tableau de signe respectif. On a

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty/-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$			$-\infty$
$g(x)$	-5	$\nearrow$	2			$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

1. Calculez

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad f(g(-1)) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(g(x))$$

2. Choisissez la bonne réponse : la courbe représentative de f a
   (a) une asymptote verticale d'équation $x=-1$
   (b) une asymptote horizontale d'équation $y=2$
   (c) une asymptote verticale d'équation $x=2$

3. Sur quel(s) intervalle(s), déduit(s) du tableau de signes, l'équation $f(x)=0$ admet-elle une et une seule solution ? Qu'en est-il de l'équation $f(x)=4$?

5.2 Dérivées

5.2.1 Dérivées de fonctions

Exercice 1 : Fonctions élémentaires

Dérivez

$$x^2+x+1 \qquad \sqrt{x}+\tan x \qquad \cos x+e^x \qquad \frac{1}{x}-\ln x$$

$$3x^3+\frac{x^2}{2}-5\sqrt{x} \qquad \sin x+7\cos x-\frac{2}{3x^3} \qquad \frac{1}{\sqrt{x^5}}-\ln\sqrt{x^5}$$

Exercice 2 : Produit de fonctions élémentaires

Dérivez

$$x\sin x \qquad \sqrt{x}\ln x \qquad x^2e^x \qquad 2\sin x\cos x$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x}} \qquad (x^2+x+1)(1-x) \qquad \frac{1}{\sqrt{x^5}} \ln \sqrt{x^5}$$

Exercice 3 : Quotient de fonctions élémentaires

Dérivez

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \operatorname{cotan} x \qquad \frac{e^x}{\ln x} \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \qquad \frac{x^3-1}{1-x}$$

$$\frac{2\ln x - \sqrt{x}}{1-x} \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \frac{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{\sin x}$$

Exercice 4 : Fonctions réciproques, hyperboliques et définies par morceaux

Dérivez

$$\operatorname{arccotan} x \qquad \operatorname{arcsec} x \quad (\text{où } \sec x = \frac{1}{\cos x}) \qquad \sinh x \qquad \cosh x$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad x = \pi \\ x - \pi & \text{si} \quad x \neq \pi \end{cases}$$

Exercice 5 : Fonctions composées

Dérivez

$$\ln(-x) \qquad e^{-x} \qquad \sin(-\tfrac{\pi x}{2}) \qquad \tan(2x-1-x^2)$$

$$\sin x^2 \qquad \sin^2 x \qquad e^{-x^2} \qquad \sqrt{x^3-1}$$

$$\ln \cos x \qquad \tan \tfrac{1}{x} + \sin(-2x) \qquad (2x^4 - \sqrt{\tfrac{3}{x}})^{-10}$$

Exercice 6 : Exercices récapitulatifs

Dérivez

$$4e^{3\sin^2 x} \qquad x^2 \sin \tfrac{1}{x} \qquad 1 - e^{-(x^2+x+1)} \qquad \frac{\ln^2 x}{\sqrt{\frac{5}{4}-x}}$$

$$\frac{\sinh \sqrt{x}}{x^2} \qquad \sqrt[3]{\tan \tfrac{1}{x}} \qquad x + x^2 \sin(-\tfrac{1}{x^2})$$

Exercice 7 : Règle de l'Hospital

Pour rappel, si l'on a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ alors, on peut utiliser la règle de l'Hospital qui dit que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Calculez les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{6x^3-2x^2+8}{1-4x^3} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{\sin x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} \qquad \lim_{x\to +\infty} x - \sqrt{x^2-x}$$

5.2.2 Applications

Exercice 1 : Recherche d'extréma

Pour une firme pharmaceutique, le coût total de fabrication d'un produit dérivé d'huile de ricin, exprimé en euros, de x gélules est donné par

$$C(x) = 0,1x^2 + 6x + 1000 \quad \text{pour } x \in [0;600]$$

1. (a) Déterminez les frais fixes de la firme.
   (b) Déterminez le coût total de fabrication de 400 gélules.
   (c) Déterminez le coût de fabrication de la 401^{eme} gélule.
2. On suppose que chaque gélule est vendue 65€.
   (a) Déterminez la recette $R(x)$ réalisée pour la vente des x gélules.
   (b) Vérifiez que le bénéfice lors de la production et de la vente de x gélules est donné par $B(x) = -0,1x^2 + 59x - 1000$.
   (c) Représentez graphiquement $B(x)$ et indiquez sur le graphique le bénéfice maximal.
   (d) Déterminez par calcul le bénéfice maximal que peut faire l'entreprise et le nombre d'appareils fabriqués et vendus correspondant.

Exercice 2 : Recherche d'extréma

Un artisan réalise des terrasses en bois exotique. Il achète le bois soit dans une grande surface spécialisée dans le bricolage, soit dans une scierie où le bois est débité et poncé à la demande.
En grande surface, le prix du bois est de 52€le m^2. Dans la scierie, en raison des frais occasionnés, le prix du bois est donné par la fonction $g(x) = x^3 - 18x^2 + 108x$ où x désigne la quantité de bois achetée, exprimée en mm^2.

Soit $f(x)$ le prix du bois en grande surface, où x désigne la quantité de bois achetée, exprimée en mm^2 et soit h la fonction définie par $h(x) = g(x) - f(x)$.

1. Donnez l'expression de $h(x)$ en fonction de x.
2. Etudiez la fonction $h(x)$ et esquissez son graphique.
3. Déterminez l'intervalle (ou les intervalles) pour le(s)quel(s) il est plus économique pour l'artisan de s'approvisionner à la scierie.

Exercice 3 : Tangente à une courbe

On considère la parabole d'équation $y = x^2$. Déterminez l'équation de la tangente[1] à la parabole aux points d'abscisse $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$.

1. Pour rappel, l'équation de la tangente d_t à une courbe d'équation $y = f(x)$ en un point d'abscisse $x = a$ est donnée, de par la définition de la dérivée, par l'équation $d_t \equiv y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Exercice 4 : Tangente à une courbe

On considère la fonction $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. Calculez la dérivée de $f(x)$ et déterminez l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f(x)$ au point d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 5 : Tangente à une courbe

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire une équation de la tangente au point A d'abscisse $x = a$ de la représentation graphique de la fonction f.

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ pour $a = -1$, $a = 2$ et $a = 3$
2. $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$ pour $a = -4$, $a = 1$ et $a = 2$
3. $f(x) = \tan x$ pour $a = 0$, $a = \frac{\pi}{6}$ et $a = \frac{\pi}{4}$

Exercice 6 : Charge d'un condensateur

Expérimentalement, la charge q d'un condensateur est donnée en fonction du temps t exprimé en secondes par :

$$q(t) = 6(1 - e^{-0,2t})$$

1. Montrez que la fonction q est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Calculez la charge maximale du condensateur.
3. Estimez après combien de temps le condensateur sera-t-il chargé à 67% ?
4. Précisez l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

5.3 Etudes de fonctions

Exercice 1

Etudiez les fonctions suivantes :
$f_1(x) = -x^2+6x-5$; $f_2(x) = x^2-5x+6$; $f_3(x) = f_1(x).f_2(x)$; $f_4(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ et $f_5(x) = f_1(f_2(x))$

Exercice 2

Etudiez les fonctions suivantes :
$g_1(x) = x^2+3x+2$; $g_2(x) = x^2-x-2$; $g_3(x) = g_1(x).g_2(x)$; $g_4(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ et $g_5(x) = g_1(g_2(x))$

Exercice 3

Etudiez les fonctions suivantes :
$h_1(x) = \sin x$; $h_2(x) = \frac{1}{h_1(x)}$; $h_3(x) = (h_1(x))^2$; $h_4(x) = h_1(x^2)$ et $h_5(x) = \frac{h_1(x)}{x}$

Exercice 4

Soient les fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2x^2 - 4$. Définissez les fonctions $f(g(x))$ et $g(f(x))$ pour en faire l'étude (domaine, asymptotes, tableau de signes, ...) et en esquisser le graphique.

Exercice 5

Etudiez les fonctions suivantes :
$\sinh x$; $\cosh x$; $\tanh x$; xe^{-x} et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

5.4 Primitives

Exercice 1 : Déterminez les primitives

$$\begin{array}{ccccc} \int x^3 dx & \int \sqrt{x} dx & \int \sqrt[3]{x^2} dx & \int \frac{1}{x^5} dx & \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx & \int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx & \int x\sqrt{x} dx & \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x} dx & \int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx \end{array}$$

Exercice 2 : Déterminez les primitives

$$\begin{array}{ccccc} \int 3x dx & \int \frac{2}{x} dx & \int (x^2+3x+5) dx & \int (3\sin x + 2\cos x) dx & \int (4x-1)(5-x) dx \\ \int (2x-3)^2 dx & \int (x+2)^3 dx & \int x^2(x-1)(x+2) dx & \int \frac{x^2+3x}{x} dx & \int \frac{x+1}{x} dx \\ \int \frac{x^2+1}{x^2} dx & \int \frac{x^2}{x^2+1} dx & \int \frac{3x-5}{\sqrt{x}} dx & \int 4(e^x - 3x^2) dx & \int (x-\pi) dx \end{array}$$

Exercice 3 : Poser $y = ax + b$ et $dy = a\ dx$ et déterminez les primitives

$$\begin{array}{ccccc} \int \sin 3x dx & \int \cos(x-1) dx & \int \frac{dx}{\cos^2(2x+1)} & \int (3x+2)^{10} dx & \int \sqrt[3]{5x-1} dx \\ \int \frac{dx}{(1-x)^5} & \int e^{5x} dx & \int \frac{1}{e^x} dx & \int \frac{dx}{x-3} & \int \frac{dx}{3x-4} \\ \int \frac{3}{\sqrt{2-x}} dx & \int \frac{dx}{1+4x^2} & \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} & \int \frac{dx}{\sin^2 5x} & \int \frac{3}{\cos^2(3-x)} dx \end{array}$$

Exercice 4 : Déterminez les primitives

$$\begin{array}{ccccc} \int x \ln x dx & \int x \sin x dx & \int 3x^2 \cos x dx & \int xe^{2x} dx & \int (x^3 - 2x + 1)e^x dx \\ \int (x+1)^2 \sin x dx & \int e^x \sin x dx & \int e^{-x} \cos 3x dx & \int \sin 2x \cos 3x dx & \int \cos x \cos 5x dx \\ \int \sin 3x \cos 4x dx & \int \ln x dx & \int x \ln x dx & \int (x^2-3) \ln x dx & \int \ln^2 x dx \end{array}$$

Exercice 5 : Déterminez les primitives

$$
\begin{array}{ccccc}
\int x(x^2-1)^3dx & \int(2x-1)(x^2-x+3)^2dx & \int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}dx & \int \frac{x-3}{(x^2-6x+4)^3}dx & \int(2x+3)\sqrt{x^2+3x-1}dx \\
\int \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}dx & \int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx & \int \frac{e^x}{e^x-2}dx & \int e^x(e^x-1)^3dx & \int \sin^2 x\cos x dx \\
\int \sin x\cos^2 x dx & \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx & \int \tan x dx & \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx & \int(1+2\sin x)^2\cos x dx \\
\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx & \int \frac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}dx & \int \frac{\ln^3 x}{x}dx & \int \frac{dx}{x\ln x} & \int \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x+1}}dx \\
\int \frac{\sqrt{\tan x+2}}{\cos^2 x}dx & \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx & \int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}dx & \int xe^{x^2}dx & \int e^x\frac{1-e^x}{1+e^x}dx
\end{array}
$$

Exercice 6 : Trigonométrie

Déterminez les primitives suivantes, après avoir transformé la fonction à primitiver grâce aux formules de trigonométrie :

$$
\begin{array}{cccc}
\int \sin^2 x dx & \int \cos^2 x dx & \int \tan^2 x dx & \int \text{cotan}^2 x dx \\
\int \sin x\cos 3x dx & \int \cos 2x\cos 5x dx & \int \sin 4x\sin 6x dx & \int \sin 3x\cos 3x dx \\
\int \sin^4 x dx & \int \cos^6 x dx & \int \sin^4 x\cos^2 x dx & \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx \\
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx & \int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx & \int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx & \int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}dx \\
\int \frac{dx}{3+5\cos x} & \int \frac{dx}{1+3\cos^2 2x} & \int \frac{dx}{\sin x+\cos x} & \int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx
\end{array}
$$

Exercice 7 : Déterminez les primitives

$$
\int \arctan x dx \quad \int \arcsin x dx \quad \int x^2\arccos x dx \quad \int \frac{\arctan x}{x^2}dx
$$

Exercice 8 : Déterminez les primitives

$$
\begin{array}{ccccc}
\int \frac{x^2+2x-1}{x-1}dx & \int \frac{x^3+x^2-11x+20}{x-3}dx & \int \frac{x^3-x^2+x}{x^2+1}dx & \int \frac{3x^3-2x^2-8x+6}{x^2-3}dx & \int \frac{x^4-4x^3-3x-3}{x^2-4x-1}dx \\
\int \frac{2x^3-x^2+x-2}{x^2+1}dx & \int \frac{dx}{x^2+4} & \int \frac{dx}{x^2+2} & \int \frac{dx}{9x^2+1} & \int \frac{dx}{8x^2+1} \\
\int \frac{dx}{4x^2+9} & \int \frac{dx}{3x^2+5} & \int \frac{dx}{x^2+2x+2} & \int \frac{dx}{4x^2-4x+1} & \int \frac{dx}{9x^2-12x+16} \\
\int \frac{3x+5}{x^2+9}dx & \int \frac{x-3}{12x^2+25}dx & \int \frac{2x-1}{4x^2+4x+5}dx & \int \frac{x}{9x^2-24x+17}dx & \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx \\
\int \frac{3x-1}{x^2-3x+3}dx & \int \frac{3x}{5x^2-2x+1}dx & \int \frac{dx}{x^2-4} & \int \frac{dx}{x^2-3x+2} & \int \frac{dx}{2x^2-5x-7} \\
\int \frac{x+1}{x^2-9}dx & \int \frac{3x}{4x^2-1}dx & \int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}dx & \int \frac{13x+21}{x^3-7x-6}dx & \int \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2-x+1}dx \\
\int \frac{3x^2-1}{x^4-1}dx & \int \frac{5x-2}{x^3-8}dx & \int \frac{x^3-2}{x^2+x}dx & \int \frac{4x-9}{x^3-4x^2+9x}dx & \int \frac{2x^3}{x^4+x^2+1}dx
\end{array}
$$

5.5 Intégrales

Rappel : $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f.

$$
\boxed{
\begin{array}{ccll}
\int_a^b k.f(x)dx & = & k\int_a^b f(x)dx & \\
\int_a^b(f(x)+g(x))dx & = & \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx & \\
\int_a^a f(x)dx & = & 0 & \\
\int_a^b f(x)dx & = & -\int_b^a f(x)dx & \\
\int_a^b f(x)dx & = & \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx & \text{avec } a\le c\le b \\
\int_a^b f(x)dx & \le & \int_a^b g(x)dx & \text{si } f(x)\le g(x),\ \forall x\in[a,b]
\end{array}
}
$$

Exercice 1

Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant la condition imposée.

1. $f(x) = \ln x$ avec F qui s'annule en $x = 1$
2. $f(x) = \frac{1}{e^{2x}+e^{x}-2}$ avec $F(-\ln 2) = -1$
3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $F(\frac{2\sqrt{2}}{3}) = \frac{1}{3}$
4. $f(x) = \frac{1}{1+\sin x+\cos x}$ avec $F(\frac{\pi}{2}) = \ln 2$

Exercice 2 : Déterminer les intégrales

$$\begin{array}{cccc} \int_0^1 x^2 dx & \int_0^1 (4-9x^2)dx & \int_{-1}^0 (4-9x^2)dx & \int_{-1}^1 (4-9x^2)dx \\ \int_0^\pi \sin^2 x dx & \int_0^\pi \sin^2 x \cos x dx & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx \end{array}$$

Exercice 3 : Déterminer les intégrales

$$\begin{array}{cccc} \int_{-\pi}^\pi \sin x dx & \int_{-\pi}^\pi \cos x dx & \int_0^\pi \sin 2x dx & \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \cos \frac{3\pi x}{2} dx \\ \int_0^\pi \sin x dx & \int_0^{3\pi} |\sin x| dx & \int_{-\pi}^0 |\sin x| dx & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx \end{array}$$

Exercice 4

1. Démontrez que si $i(x)$ est une fonction impaire, définie sur $[-a, a]$ alors
$$\int_{-a}^{a} i(x)dx = 0$$
2. Démontrez que si $p(x)$ est une fonction paire, définie sur $[-a, a]$ alors
$$\int_{-a}^{a} p(x)dx = 2\int_{0}^{a} p(x)dx$$
3. Démontrez que si $f(x)$ est une fonction périodique de période T, définie sur $\mathbb{R}$ alors
$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx \text{ est indépendante de } a$$

5.5.1 Aire sous une courbe

Rappel : Aire limitée par la courbe et l'axe Ox : $A = \int_a^b |f(x)|dx$

Exercice 1

Soit une droite d'équation $y = 2 - \frac{x}{2}$. Esquissez un schéma et calculez l'aire du triangle formé par la droite et les axes orthonormés x et y.

Exercice 2

Soit une parabole d'équation $y = 2x - x^2$. Esquissez un schéma et calculez l'aire formée par la partie positive de la courbe et l'axe x.

Exercice 3

Soit un disque d'équation $x^2 + y^2 = r^2$. L'équation du quart de cercle du 1^{er} quadrant nous sera donnée par $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Dès lors, l'aire comprise entre cet arc de cercle et les axes x et y nous sera donnée par l'intégrale

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

qu'il faudra multiplier par 4 pour obtenir l'aire totale du cercle.

Esquissez un schéma et calculez cette aire par la méthode des intégrales.

Exercice 4

Soit une ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Esquissez un schéma et calculez l'aire de l'ellipse en considérant la méthode ci-dessus.

Exercice 5

Soit la fonction $f(x) = \sin x$. Esquissez un schéma et déterminez l'aire totale comprise entre la sinusoïde et l'axe des abscisses pour $x \in [0; 4\pi]$.

Exercice 6

Soit la fonction définie par morceaux

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \sin \frac{\pi x}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Esquissez un schéma et calculez l'aire totale définie par cette courbe.

Exercice 7

Soient les droites d'équation $d_1 \equiv y = 2x + 1$ et $d_2 \equiv -2x + 5$. Esquissez un schéma et calculez l'aire située simultanément sous ces deux droites et limitée par les axes orthonormés x et y dans le 1^{er} quadrant.

Exercice 8

Pour chacun des exercices suivants, il est conseillé d'esquisser un schéma.

1. Calculez l'aire sous la courbe $y = x^2 + 1$ dans l'intervalle $[0, 3]$.
2. Calculez l'aire au-dessus de l'axe $0x$ mais en dessous de la courbe $y = (1 - x)(x - 2)$.
3. Calculez l'aire du domaine borné par la courbe $y = 3 \sin x$ et l'abscisse dans l'intervalle $[0, \frac{4\pi}{3}]$.
4. Calculez l'aire du domaine borné par la courbe $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ et l'abscisse dans l'intervalle $[0, 3]$.

5.5.2 Aire comprise entre deux courbes

Rappel : Aire comprise entre les deux courbes : $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Exercice 1

Esquissez un schéma et calculez l'aire de la surface limitée par la droite $d \equiv y \leq 4$ et la parabole $P \equiv y \geq \frac{x^2}{4}$.

Exercice 2

Esquissez un schéma et calculez l'aire de la surface limitée par les droites $d_1 \equiv y \leq 4$, $d_2 \equiv x \leq 4$ et la parabole $P \equiv y \geq \frac{x^2}{2} - 3x + 4$.

Exercice 3

Esquissez un schéma et calculez l'aire de la surface limitée par la droite $d \equiv y = -x + 2$ passant au-dessus de la parabole $P \equiv y = x^2 - 4$.

Exercice 4

Dans un plan muni du repère orthonormé Oxy, soit S la surface plane délimité par les 2 courbes d'équations respectives $y = 1 + x^2$ et $y = 9 - x^2$.

Faites un croquis de la surface S et calculez-en l'aire.

Exercice 5

On donne les fonctions f et g. Calculez l'aire du domaine borné délimité par les deux fonctions. (Il est conseillé de faire un croquis)

1. $f(x) = x^2$ et $g(x) = 8 - x^2$
2. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = -x^2 - x + 6$
3. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ et $g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$

4. $f(x) = \frac{x^3}{4}$ et $g(x) = \sqrt{2x}$

Exercice 6

Calculez l'aire du domaine compris entre les courbes des fonctions f et g et les droites verticales $x = a$ et $x = b$. (Il est conseillé de faire un croquis)

1. $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x$ avec $a = -1$ et $b = 2$
2. $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$ avec $a = 0$ et $b = 2$
3. $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -\sin x$ avec $a = -2\pi$ et $b = 2\pi$

Exercice 7

Esquissez un schéma et calculez l'aire du domaine compris entre les courbes $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, et les droites horizontales $y = 1$ et $y = 2$.

5.5.3 Volumes de révolution

Rappel : Volume de révolution autour de l'axe Ox : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

L'idée est la même que lorsque l'on cherchait l'aire sous une courbe. On va découper l'aire comprise dans l'intervalle $[a, b]$ en rectangles. Lorsqu'ils tourneront autour de l'axe Ox, chacun de ces rectangles va definir un cylindre tres fin (presque un disque) de volume $\pi(f(x_i))^2 \Delta x$.

Le volume du corps de revolution sera la somme de tous ces cylindres :

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [\pi(f(x_i))^2 \Delta x] = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Exercice 1

Calculez le volume des solides generes par la revolution autour de l'axe Ox des courbes suivantes et donnez le nom (quand ils en ont un) de ces solides :

$$\begin{array}{ccc} y = 4 & \text{avec} & -1 \leq x \leq 3 \\ y = 3x & \text{avec} & 0 \leq x \leq 2 \\ y = x + 1 & \text{avec} & 0 \leq x \leq 3 \\ y = \sqrt{3 - x} & \text{avec} & x \geq -1 \\ y = x^2 & \text{avec} & 0 \leq x \leq 2 \end{array}$$

Exercice 2

Donnez la formule permettant de trouver le volume engendre par une revolution autour de l'axe Oy, puis calculez le volume du solide genere par la revolution autour de l'axe Oy de la courbe $y = x^3$ avec

$0 \leq y \leq 1$.

Exercice 3 : Volume du cylindre

Soit la droite d d'équation $y = r$. Calculez le volume engendré par la révolution du rectangle formé par la droite d et la droite d'équation $x = h$ autour de l'axe Ox.

Exercice 4 : Volume du cône

Soit la droite d d'équation $y = mx$. Calculez le volume engendré par la révolution du triangle formé par la droite d,l'axe Ox et la droite d'équation $x = h$ autour de l'axe Ox.

Exercice 5 : Volume de la sphère

Soit le cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$. Calculez le volume engendré par la révolution de ce cercle autour de l'axe Ox.

Exercice 6 : Volume du tore

Soit le cercle d'équation $x^2 + (y - R)^2 = r^2$. Calculez le volume engendré par la révolution de ce cercle autour de l'axe Ox.

Exercice 7 : Volume de l'ellipsoïde de révolution

Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calculez le volume engendré par la révolution de cette ellipse autour de l'axe Ox.

Exercice 8

Soient la droite $d \equiv x - 4y + 7 = 0$ et la parabole $P \equiv y^2 - x - 4$. Déterminez le volume de révolution défini par l'aire comprise entre la droite d et la parabole P

1. autour de l'axe Ox,
2. autour de l'axe Oy et

5.5.4 Longueur d'arc

Rappel : $L = \int_a^b \sqrt{1 - (f'(x))^2} dx$

Exercice 1

Calculez la longueur de la courbe $y = 2x$ entre les points $(1, 2)$ et $(2, 4)$ en utilisant la formule ci-dessus, puis vérifiez votre réponse à l'aide du théorème de Pythagore.

Exercice 2

Calculez la longueur de la courbe $y = x^{\frac{3}{2}} - 1$ de $x = 0$ à $x = 1$.

Exercice 3

Calculez la longueur de la courbe $y = \sqrt{1 - x^2}$ de $x = 0$ à $x = 1$.

Chapitre 6

Compléments

6.1 Aires et volumes

Exercice 1

Les dimensions d'un parallélipipède rectange sont $L = 48,2 \pm 0,1$ mm, $l = 3,02 \pm 0,01$ mm et $h = 0,61 \pm 0,01$ mm. Calculer son volume et l'incertitude absolue sur ce volume.

Exercice 2

Le rayon de la base d'un cône est de $4,02 \pm 0,01$ mm et la hauteur $7,16 \pm 0,01$ mm. Calculer son volume et l'incertitude absolue sur ce volume.

Exercice 3

Calculer l'aire d'un disque de rayon $5,32 \pm 0,01$ cm et l'incertitude absolue sur cette aire.

Exercice 4

Le diamètre d'une sphère est de $7,898 \pm 0,017$ mm. Calculer l'aire de cette sphère et l'incertitude absolue sur cette aire.

6.2 Equations, inéquations, systèmes

Exercice 1 : équations, inéquations, systèmes

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
2x+7=1-4x & (x-2)^2=(x-4)(x+5) & 5x<2x^2+3 \\
4-x^2=1 & x\geq x^2 & (7-2x)^2=4 \\
(x-3)^3\leq x(x-1)(x-2) & x>2x & 7x(2x-3)-(3x-2)^2=4x^2+9 \\
(2x-1)^3>(2x+1)^3 & (x+1)^2+(3-x)^2=0 & (x-2)^2-(3-x)^2\leq 0 \\
4x^3+15<20x^2+3x & x^4\geq 16x^2 & (x^2+4)^2-8x^2=x^4+16
\end{array}$$

Exercice 2 : équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=0 & \frac{x+2}{x-5}=2 & \frac{x}{x^2-4}=\frac{x+1}{(x+2)^2} \\
\frac{2x-1}{x+2}=\frac{x-2}{2x+1} & \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=0 & \frac{3x-2}{x-2}=\frac{8}{x^2-2x} \\
\frac{x+2}{x-3}<0 & \frac{5-x^2}{5-x}\geq 0 & \frac{x+1}{x-1}>1 \\
x<\frac{1}{x} & \frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\geq 0 & \frac{2x-x^2}{(2x-1)^2}\leq 2
\end{array}$$

Exercice 3 : systèmes d'inéquations

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} x+1\geq 0 \\ 5-2x\geq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x^2-4\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} 9-4x^2\geq 0 \\ x^2-4x\geq 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x-2\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} 3x\geq 0 \\ 6x^2+5x-1\geq 0 \\ 1-2x^2\geq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x-x^2>0 \\ 1-3x^2\geq 0 \\ 16x^3-8x^2-2x+1>0 \end{array}\right.$$

Exercice 4 : systèmes d'équations

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} 2x=10 \\ 3x+y=4 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+y=10 \\ x-y=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} 2x-y-5=0 \\ x+3y+1=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} 4x-5=0 \\ 8x-3y=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x-y=3x+1 \\ 4(x-1)=3(y+2) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x=5y+3 \\ y=2x-5 \end{array}\right.$$

Exercice 5 : systèmes d'équations

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} x+xy=0 \\ x^2-y^2=4 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x^2+y=32 \\ 3y-2x^2=16 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+2y-3=0 \\ x^2-y^2+3x=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x^2-2xy=0 \\ 4x^2+y^2+4x-9=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x^2+y^2-x+y-2=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2-5x+2y-4=0 \\ x^2+y^2+4x-y+2=0 \end{array}\right.$$

Exercice 5 : équations particulières

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} x^4-3x^2+2=0 & 4x^4+11x^2-3=0 & 5x^2=x^4+6 \\ x^4-20x^2+96=0 & 2x^4+5x^2+4=0 & x^4-6x^2+4=0 \\ x^4+2x^2-1=0 & (x+2)^2+(x-2)^2=44 & x^4-16=0 \end{array}$$

Exercice 6 : équations particulières

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x+5}=x-1 & \sqrt{2x+3}=4 & 2\sqrt{x-1}=3x-4 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{3x+5}=0 & \sqrt{4x-3}+\sqrt{8x+9}=0 & \sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x+3}=0 \\ \sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}=4 & \sqrt{2x-5}+\sqrt{3x}=2 & \sqrt{x^2-9}-\sqrt{1-3x}=x+5 \\ 2\sqrt{-x}=2\sqrt{8x+3}-\sqrt{2(2x+1)} & \sqrt{x}-\sqrt{-x}=\sqrt{2x}+\sqrt{-x}-\sqrt{3x} & \sqrt{-5x-1}+2\sqrt{7x}=0 \end{array}$$

Exercice 7 : équations particulières

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} x^6+19x^3-216=0 & x^8-15x^4-16=0 & (x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0 \\ x^2+\frac{1}{x^2}=3 & \frac{1}{(x+2)^2}+\frac{6}{x+2}+5=0 & x^4-2x^3-x^2+2x+1 \end{array}$$

6.3 Fonctions du 1^{er} degré

Exercice 1

Dessiner la droite qui passe par les points A et B suivants :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A & (-1,4) & (2,5) & (4,3) & (4,-1) & (1,7) \\ B & (3,2) & (-2,-1) & (-2,3) & (4,4) & (-3,2) \end{array}$$

Calculer sa pente et écrire son équation.

Exercice 2

Soit la droite $d \equiv y = mx + p$. Rechercher l'équation des droites $d_\parallel$ et $d_\perp$ passant par le point P et qui soient respectivement parallèle et perpendiculaire à d.

m	p	P
$\frac{2}{5}$	$\frac{-9}{5}$	$(3,-4)$
2	-1	$(1,3)$
$\frac{3}{2}$	0	$(-2,3)$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(-3,2)$
0	-7	$(2,5)$
$-\frac{5}{2}$	3	$(-1,-4)$

Exercice 3

Soit la droite $d \equiv ax + by + c = 0$. Rechercher l'équation des droites $d_\parallel$ et $d_\perp$ passant par le point P et qui soient respectivement parallèle et perpendiculaire à d.

a	b	c	P
2	-5	9	$(1,3)$
2	-3	0	$(-2,3)$
4	3	-6	$(-3,2)$
0	-2	7	$(-1,-4)$
1	0	-1	$(3,-4)$
-2	-5	9	$(2,5)$

Exercice 4

Trouver une équation de la droite d qui satisfasse aux deux conditions suivantes :
- Passer par $A(5,-3)$ et de pente -4.
- Couper l'axe Ox en 4 et l'axe Oy en -3.
- Passer par $A(2,-4)$ et parallèle à la droite $d_\parallel \equiv 5x - 2y = 4$.

Exercice 5

Dessiner les graphiques et rechercher les coordonnées des points d'intersection de
- $d_1 \equiv 4x + 3y = 5$ et $d_2 \equiv 3x - 2y = 8$.
- $d_1 \equiv 2x + 3y = 2$ et $d_2 \equiv x - 2y = 8$.
- $d_1 \equiv 2x + 5y = 16$ et $d_2 \equiv 3x - 7y = 24$.

6.4 Fonctions réciproques

Le problème des fonctions réciproques est le suivant : une fonction f fait correspondre à tout x un élément y. Mais réciproquement, existe-t-il une autre fonction g qui à y fasse correspondre x ? Autrement formulé, existe-t-il une fonction f^{-1} telle que $f^{-1}(f(x)) = x$? Existe-t-il un chemin de retour pour la fonction f ?

La fonction f^{-1} ne peut donc pas être définie lorsqu'il existe des réels y qui ont plus d'un antécédent par f. Autrement dit, f^{-1} ne peut pas être définie si la fonction f n'est pas une injection.

Exercice 1

Définir les fonctions réciproque f^{-1} des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{array}{ccc} 2x & -\frac{5x}{2} & -\frac{x}{3} - \frac{4}{3} \\ \frac{1}{x} & -\frac{5}{2x} & -\frac{1}{3x} - \frac{4}{3} \end{array}$$

Exercice 2

Rendre injectives les fonctions suivantes (ajuster le domaine) :

$$f(x) = \begin{array}{ccc} \sin x & -\cos x & 3\tan\frac{\pi x}{2} \\ x^2 & \sqrt{x} & -x^2+2x+1 \\ \ln x & e^x & 4e^{3x-2} \end{array}$$

Exercice 3

Définir les fonctions réciproque f^{-1} des fonctions rendues injectives dans l'exercice précédent.

6.5 Problèmes

Exercice 1

La vitesse à laquelle se dissout un comprimé de vitamine C dépend de son aire. Une marque présente des comprimés cylindriques de 2 cm de hauteur, terminés à chaque bout par un hémisphère de $0,5$ cm de diamètre. Une seconde marque fabrique des comprimés qui ont la forme d'un cylindre circulaire droit (pastille) de $0,5$ cm de hauteur.

– Quel diamètre doit avoir la pastille pour que son aire soit égale à celle du premier comprimé ?
– Calculer le volume de chaque comprimé.

Exercice 2

On doit fabriquer une boîte ouverte à partir d'un carton rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en ôtant à chaque coin un même carré de côté x et en pliant les bords restants. Rechercher l'expression du volume de la boîte en fonction de x.

Exercice 3

Un aquarium ouvert au-dessus de 15 cm de hauteur doit avoir un volume de 600 cm^3. On appelle x la longueur et y la largeur de la base de l'aquarium.

– Exprimer y en fonction de x.
– Exprimer l'aire de la surface totale de verre nécessaire à sa fabrication en fonction de x.

Exercice 4

La tour de contrôle d'un aéroport mesure 20 m de haut et est située à 100 m du début de la piste d'envol des avions. Si x désigne la distance parcourue par un avion qui décolle, exprimez la distance d entre la tour de contrôle et l'avion, en fonction de x.

Exercice 5

Une mongolfière prend son départ à 13 h et s'élève verticalement avec une vitesse constante de 2 m/s. Le point duquel on l'observe est situé à 100 m de son point de décollage. Si t désigne le temps en secondes à partir de 13 h, exprimer la distance d entre la mongolfière et l'observateur, en fonction du temps t.

Quatrième partie

Formulaire

Règles générales d'intégration

Linéarité :

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

en particulier :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Intégration par parties :

$$\int f(x)\, g'(x)dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, f'(x)dx$$

Intégration par substitution :

$$\int f(u(x))u'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

Primitives de fonctions simples

$$\int dx = x + C$$

Primitives de fonctions rationnelles

$$\begin{array}{ccccc}
\int x^n dx & = & \frac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{si} & n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} dx & = & \ln|x| + C & & \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx & = & \arctan x + C & & \\
\int \frac{1}{a^2+x^2} dx & = & \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C & \text{si} & a \neq 0 \\
\int \frac{1}{1-x^2} dx & = & \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C & = & argth(x) + C \\
\int \frac{1}{(x-a)^n} dx & = & -\frac{1}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}} + C & \text{si} & n \neq 1 \\
\int \frac{1}{x-a} dx & = & \ln|x-a| + C & &
\end{array}$$

Primitives de fonctions logarithmes et exponentielles

$$\begin{array}{ccc}
\int \ln x dx & = & x\ln(x) - x + C \\
\int \log_b x dx & = & x\log_b x - x\log_b e + C
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\int e^x dx & = & e^x + C & & \\
\int a^x dx & = & \frac{a^x}{\ln a} + C & \text{si} & a > 0
\end{array}$$

Primitives de fonctions irrationnelles

$$\begin{array}{ccc}
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & = & \arcsin x + C \\
\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx & = & \arccos x + C \\
\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx & = & \sqrt{x^2-1} + C
\end{array}$$

Primitives de fonctions trigonométriques

$$
\begin{aligned}
\int \cos x dx &= \sin x + C \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C \\
\int \tan x dx &= -\ln|\cos x| + C \\
\int \csc x dx &= -\ln|\csc x + \cot x| + C \\
\int \sec x dx &= \ln|\sec x + \tan x| + C \\
\int \cot x dx &= \ln|\sin x| + C \\
\int \sec^2 x dx &= \tan x + C &&= \int \tfrac{1}{\cos^2 x} dx \\
\int \csc^2 x dx &= -\cot x + C &&= \int \tfrac{1}{\sin^2 x} dx \\
\int \tfrac{1}{\sin x} dx &= \ln\left|\tan \tfrac{x}{2}\right| + C \\
\int \tfrac{1}{\cos x} dx &= \ln\left|\tan\left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right)\right| + C
\end{aligned}
$$

Primitives de fonctions hyperboliques

$$
\begin{aligned}
\int \sinh x dx &= \cosh x + C \\
\int \cosh x dx &= \sinh x + C \\
\int \tanh x dx &= \ln(\cosh x) + C \\
\int \operatorname{csch} x dx &= \ln\left|\tanh \tfrac{x}{2}\right| + C \\
\int \operatorname{sech} x dx &= \arctan(\sinh x) + C \\
\int \coth x dx &= \ln|\sinh x| + C
\end{aligned}
$$

Primitives de fonctions circulaires réciproques

$$
\begin{aligned}
\int \arcsin\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \arcsin\left(\tfrac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + C \\
\int \arccos\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \arccos\left(\tfrac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} + C \\
\int \arctan\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \arctan\left(\tfrac{x}{a}\right) - \tfrac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + C \\
\int \operatorname{arccotan}\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \operatorname{arccotan}\left(\tfrac{x}{a}\right) + \tfrac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + C \\
\int \operatorname{arcsec}\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \operatorname{arcsec}\left(\tfrac{x}{a}\right) - a \ln\left[\tfrac{x}{a}\left(1 + \sqrt{1 - \tfrac{a^2}{x^2}}\right)\right] + C \\
\int \operatorname{arccosec}\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \operatorname{arccosec}\left(\tfrac{x}{a}\right) + a \ln\left[\tfrac{x}{a}\left(1 + \sqrt{1 - \tfrac{a^2}{x^2}}\right)\right] + C
\end{aligned}
$$

Primitives de fonctions hyperboliques réciproques

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{argsh}\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \operatorname{argsh}\left(\tfrac{x}{a}\right) - \sqrt{x^2 + a^2} + C \\
\int \operatorname{argch}\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \operatorname{argch}\left(\tfrac{x}{a}\right) - \sqrt{x^2 - a^2} + C \\
\int \operatorname{argth}\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \operatorname{argth}\left(\tfrac{x}{a}\right) + \tfrac{a}{2}\ln(a^2 - x^2) + C \\
\int \operatorname{argcoth}\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \operatorname{argcoth}\left(\tfrac{x}{a}\right) + \tfrac{a}{2}\ln(x^2 - a^2) + C \\
\int \operatorname{argsech}\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \operatorname{argsech}\left(\tfrac{x}{a}\right) - a \arctan\left(\sqrt{\tfrac{a^2}{x^2} - 1}\right) + C \\
\int \operatorname{argcosech}\left(\tfrac{x}{a}\right) dx &= x \operatorname{argcosech}\left(\tfrac{x}{a}\right) + a \ln\left[\tfrac{x}{a}\left(1 + \sqrt{1 + \tfrac{a^2}{x^2}}\right)\right] + C
\end{aligned}
$$