Cours de mathématiques et statistiques - 1ère biologie médicale
HEPCUT

François Mansy

Table des matières

I Introduction **5**

II Statistiques **8**

1 Introduction et vocabulaire **9**

2 Séries statistiques simples (à une dimension) **12**

2.1 Tabulation 12
2.2 Classes 14
2.3 Représentation graphique des séries quantitatives 14
2.3.1 Diagramme en bâtons 14
2.3.2 Histogramme 15
2.3.3 Polygone des fréquences 15
2.3.4 Diagramme cumulatif 15
2.3.5 Polygone cumulatif 16
2.4 Paramètres de position 16
2.4.1 Extrema 17
2.4.2 Médiane 17
2.4.3 Mode 18
2.4.4 Quartiles 18
2.4.5 Déciles et percentiles 20
2.4.6 Moyenne 20
2.4.7 Propriétés de la moyenne 23
2.5 Paramètres de dispersion 24
2.5.1 Intervalle de variation 24
2.5.2 Intervalle interquartile 24
2.5.3 Dérivation moyenne 24
2.5.4 Variance 24
2.5.5 Ecart-type et déviation standart 25
2.5.6 Propriétés de la variance 26

3 Séries statistiques à deux dimensions **27**

3.1 Introduction 27
3.2 Ajustement d'une droite à des données 27
3.2.1 Méthode des moindres carrés 28

3.2.2 Propriété des droites de régression . . . 31
3.3 Corrélation linéaire . . . 31
3.3.1 Parfaite corrélation . . . 32
3.3.2 Indépendance . . . 32
3.3.3 Corrélation partielle . . . 32
3.3.4 Récapitulatif . . . 33
3.4 Ajustement d'une courbe à des données . . . 34
3.4.1 Exponentielle, logarithme et puissance . . . 34
3.4.2 Courbe parabolique . . . 35
3.4.3 Courbe polynomiale . . . 35

III Trigonométrie 36

4 Rappels sur les angles 37

5 Formules trigonométriques 39

6 Equations et inéquations trigonométriques 41
6.1 Fonctions réciproques . . . 41

IV Analyse 42

7 Préliminaires 43
7.1 Premières notions . . . 43
7.1.1 Le concept de fonction . . . 43
7.1.2 Graphiques . . . 44
7.1.3 Zéros d'une fonction . . . 44
7.1.4 Domaine d'une fonction . . . 44
7.1.5 Ensemble image d'une fonction . . . 45
7.1.6 Parité d'une fonction . . . 45
7.1.7 Autres éléments de symétrie d'un graphique de fonction . . . 45
7.1.8 Translations de fonctions élémentaires . . . 46
7.1.9 Affinités de fonctions élémentaires . . . 46
7.1.10 Fonctions périodiques . . . 46
7.2 Classification de fonctions . . . 46
7.2.1 Fonctions constantes . . . 46
7.2.2 Fonctions puissances à exposant naturel . . . 47
7.2.3 Fonctions linéaires . . . 48
7.2.4 Fonctions du 1^{er} degré (affines) . . . 49
7.2.5 Fonctions du 2^{e} degré . . . 49
7.2.6 Fonctions polynômes . . . 49
7.2.7 Fonctions puissance à exposant entier ≤ 0 . . . 49
7.2.8 Fonctions homographiques . . . 50
7.2.9 Fonctions rationnelles . . . 51

7.2.10 Fonctions puissance à exposant rationnel non entier . . . 51
7.2.11 Fonctions irrationnelles . . . 51
7.2.12 Fonctions valeur absolue . . . 51
7.2.13 Fonctions algébriques . . . 53
7.2.14 Fonctions partie entière et partie décimale . . . 53
7.2.15 Fonctions définies par intervalles . . . 53
7.2.16 Fonctions trigonométriques . . . 55
7.2.17 Fonctions trigonométriques inverses . . . 56
7.2.18 Fonctions mixtes . . . 57
7.2.19 Fonctions exponentielles . . . 57
7.2.20 Fonctions logarithmiques . . . 57
7.2.21 Fonction signature . . . 59

8 Coniques 60
8.1 Lieux géométriques . . . 60
8.2 Parabole . . . 61
8.3 Ellipse . . . 62
8.4 Hyperbole . . . 63
8.5 Sections d'un cône par un plan . . . 64
8.6 Translations et rotations . . . 65

9 Exponentielles et logarithmes 67
9.1 Fonctions exponentielle a^x . . . 67
9.2 La fonction exponentielle e^x . . . 67
9.3 Propriétés des exponentielles . . . 69
9.4 La fonction logarithme népérien $\ln x$ . . . 70
9.5 Fonctions logarithme $\log_a x$ . . . 71
9.6 Propriétés des logarithmes . . . 71
9.7 Echelle logarithmique . . . 72
9.8 Equations logarithmiques et exponentielles . . . 73

V Exercices 74

10 Statistiques 75
10.1 Rappels fondamentaux . . . 75
10.1.1 Signe sommatoire . . . 75
10.1.2 Moyennes . . . 76
10.2 Statistiques à 1 dimension . . . 77
10.3 Statistiques à 2 dimensions . . . 79

11 Analyse 82
11.1 Préliminaires . . . 82
11.1.1 Fonctions : domaine, ensemble image, zéros, parité, période . . . 82
11.1.2 Eléments de symétrie d'une fonction . . . 84

11.1.3 Translations et affinités 84
11.2 Coniques 86
11.2.1 Lieux géométriques 86
11.2.2 Paraboles, ellipses, hyperboles 87
11.2.3 Translations et rotations de coniques - coniques dégénérées 90
11.3 Exponentielles et logarithmes 91
11.3.1 exercices fondamentaux 91

12 Compléments **98**
12.1 Aires et volumes 98
12.2 Trigonométrie 98
12.2.1 Fonctions trigonométriques 98
12.2.2 Fonctions trigonométriques inverses 99
12.3 Equations et inéquations 100
12.4 Fonctions du 1^{er} degré 101
12.5 Fonctions réciproques 102
12.6 Problèmes 103

Première partie

Introduction

Les chiffres ont toujours fasciné les hommes. De nos jours, on a tendance à penser que les nombres sont nés d'une nécessité : celle de compter. Les bons comptes font les bons amis, c'est pourquoi, l'homme a commencé, très tôt, à compter les pommes, les poires, les voitures, les marchandises, etc. Bref, indirectement ou directement, l'homme a appris à compter l'argent et les quantités.

Du système binaire, inventé par Boole, utilisé par les ordinateurs lors de virements électroniques, au dénombrement restreint du 1-2-3-beaucoup à partir de 4, en usage chez les civilisations plus primitives, les hommes ont utilisé des systèmes numériques qui indiquent le degré de culture ou de vigilance des peuples auprès desquels ils étaient en application. Voici donc, présentés ci-dessous, quelques systèmes numériques utilisés de jadis à nos jours.

– Les Sumériens utilisaient le système sexagésimal encore utilisé de nos jours pour mesurer l'heure qui compte 60 minutes divisées en 60 secondes. Il fut repris par les Grecs pour leurs calculs astronomiques, dans le calcul des angles et du temps.

– Les Romains se servaient de leurs 10 doigts et pratiquaient le système décimal pour constituer des centuries de légionnaires. Ils marquaient les milliers par un cercle barré verticalement. Déformé ce signe a donné le « M » pour désigner 1 000 et la moitié de ce symbole pour le « D » pour désigner 500. Le système décimal en application chez les Romains sans la connaissance des chiffres arabes, ne facilitait pas la tâche arithmétique des intendants chargés de faire les comptes.

– Les Celtes pour leur part allaient jusqu'à utiliser en plus les dix doigts de pieds, ce qui élargissait leur système numérique à 20. Les derniers Celtes sur le continent, de nos jours, utilisent encore ce système pour apprécier toutes les valeurs quantitatives de la vie courante.

– Les Mayas utilisaient, pour la gestion des stocks de nourriture, un système numérique à base 20, alors que leur système de représentation de la population (pyramidal) était à base 10 : 10 paysans avaient 1 chef, 10 chefs avaient 1 chef de village et ainsi de suite jusqu'aux 10 gouverneurs qui étaient en communication avec l'empereur. Ils connaissaient le zéro.

– Au Sénégal, on peut découvrir le système quincal utilisé par les Sérères. Aux Sérères incombaient traditionnellement le rôle de pourvoyeurs de gibier à l'égard des autres ethnies, elles de culture agricole et pastorale. Par hordes, les Sérères effectuaient des déplacements en chassant de village en village armé de courts bâtons, d'arcs et de lances. Le système numérique originel des Sérères est quincal. Il est aisé de deviner le pourquoi de cette pratique. Dans l'exécution de leur activité, l'une des mains seulement était disponible pour des occupations annexes, comme compter. L'autre restait à serrer toujours une arme, le bâton, la sagaie, la lance, etc.

– Les Juifs pratiquaient le système numéral le plus élaboré. En exploitant les 12 phalanges des huit doigts décomptés à l'aide des pouces. Ils ont institué la grosse, une unité de mesure encore en vigueur pour certaines marchandises. On y arrive en se servant par exemple du pouce de la main gauche pour décompter les phalanges. Arrivé à la dernière phalange du petit doigt, 4×3, permettent d'enregistrer la première douzaine à l'aide du pouce de la main droite qui pointe sur la première phalange de l'index de la main droite. Ce système permet ainsi de compter jusqu'à 144.

– George Boole, mathématicien anglais (1815-1864), fut l'inventeur du système binaire. Sans son système, il n'y aurait pas d'ordinateurs transistorisés qui fonctionnent grosso-modo grâce à des 0, des 1 et un peu d'électricité.

Mais, remarquons qu'on peut aussi compter les gens. En utilisant un langage moderne, nous dirions « faire des statistiques ». Cependant, les statistiques ne sont pas la seule application des nombres dans un cadre humain et non plus pécunier.

En effet, les grecs, les romains, les celtes, comme tous les peuples antiques, associaient un symbôle à chaque mot, chaque lettre, chaque chose, ainsi qu'aux nombres eux-mêmes. L'héritage symbolique des nombres que nos ancêtres nous ont légués persiste tant bien que mal dans, par exemple, la numérologie : science ésotérique qui, de par son caractère prédictif, se rapproche de la météo ou de l'astrologie qui, elle-même, est l'ancêtre de l'achimie. Ces sciences ésotériques (numérologie, astrologie et alchimie) ont finalement donné naissance à l'arithmétique, l'astronomie et à la toute jeune chimie.

La fascination des grecs anciens pour les nombres entiers les a amenés à concevoir le monde comme régit par les nombres entiers. C'est pourquoi, par incompatibilité avec leurs convictions, ils ont, pendant des siècles, volontairement ignoré l'étude des nombres irrationnels. Il faut bien avouer que, malgré leur savoir, estimer la longueur de la diagonale d'un carré est longtemps resté un tabou pour beaucoup de savants de l'époque.

Il ne faut pas non plus croire que, de nos jours, les mathématiques sont sans failles car, pas plus tard qu'au début du XX^{e} siècle, Gödel a démontré son célèbre théorème d'incomplétude, qui implique, grossièrement parlant, qu'on ne pourra jamais réduire les bases des mathématiques en un système qui soit sûr, d'une part, et d'autre part, que quelle que soit les bases choisies, certaines propriétés resteront inaccessibles à la démonstration. Autrement dit, certaines propositions ne seront jamais démontrables, de même que la négation de ces propositions. Gödel a donc réussi a démontrer que dans un système mathématique donné, on ne pourra jamais tout démontrer.

Pour conclure, disons que par leur rapport particulier au réel, les mathématiques se distinguent des autres domaines de recherche. Ce rapport au réel conduit des philosophes des sciences à s'interroger sur l'appellation sciences. En effet, dans les langues européennes, le terme mathématique (*μαθηματικά*) vient du grec *μάθημα* (mathêma) qui signifie « science, connaissance, apprentissage », et de *μαθηματικός* (mathematikos) : « **qui aime apprendre** ». Aussi, avant d'envisager d'étudier un cours de mathématiques, il convient, selon moi, de garder à l'esprit que nous allons apprendre un langage très ancien, rempli de symbôles, de mystères parfois insolubles et que nous allons, par définition, aimer ça.

Remarquez donc que poser « moi, j'aime pas les maths » est, à la limite, une contradiction.

Deuxième partie

Statistiques

Chapitre 1

Introduction et vocabulaire

Bien que le nom de statistique soit relativement récent[1], cette activité semble exister dès la naissance des premières structures sociales. D'ailleurs, les premiers textes écrits retrouvés étaient des recensements du bétail, des informations sur son cours, et des contrats divers. On a ainsi trace de recensements en Chine au XXIII^e siècle av. J.-C. ou en Égypte au XVIII^e siècle av. J.-C.. Ce système de recueil de données se poursuit jusqu'au XVII^e siècle. En Europe, le rôle de collecteur est souvent tenu par des guildes marchandes puis par les intendants de l'État.

Ce n'est qu'au XVIII^e siècle que l'on vit apparaître le rôle prévisionnel des statistiques avec la construction des premières tables de mortalité.

La statistique mathématique s'appuya sur les premiers travaux concernant les probabilités développés par Fermat et Pascal. C'est probablement chez Thomas Bayes que l'on vit apparaître un embryon de statistique inférentielle. Condorcet et Laplace parlaient encore de probabilité là où l'on parlerait aujourd'hui de fréquence. Mais c'est à Adolphe Quételet que l'on doit l'idée que la statistique est une science s'appuyant sur les probabilités.

Le XIX^e siècle vit cette activité prendre son plein essor. Des règles précises sur la collecte et l'interprétation des données sont édictées. La première application industrielle des statistiques eut lieu avec le recensement américain de 1890, qui mit en oeuvre la carte perforée inventée par le statisticien Herman Hollerith. Celui-ci avait déposé un brevet au bureau américain des brevets.

Au XX^e siècle, ces applications industrielles se développèrent d'abord aux États-Unis, qui étaient en avance sur les sciences de gestion, puis seulement après la Première Guerre mondiale en Europe. Le régime nazi employa des méthodes statistiques à partir de 1934 pour le réarmement. En France, on était moins au fait de ces applications.

L'application industrielle des statistiques en France se développa avec la création de l'INSEE, qui remplaça le Service National des Statistiques créé par René Carmille.

[1] On attribue en général l'origine du nom au XVIII^e siècle de l'allemand Staatskunde

L'avènement de l'informatique dans les années 1940 (aux États-Unis) puis en Europe (dans les années 1960) permit de traiter un plus grand nombre de données, mais surtout de croiser entre elles des séries de données de types différents. C'est le développement de ce qu'on appelle l'analyse multidimensionnelle.

La **statistique** est donc l'ensemble des instruments et de recherches mathématiques permettant de déterminer les caractéristiques d'un ensemble de données (généralement vaste). Les statistiques sont le produit des analyses reposant sur l'usage de la statistique. Cette activité regroupe trois principales branches :
- la collecte des données ;
- le traitement des données collectées, aussi appelé la statistique descriptive ;
- l'interprétation des données, aussi appelée l'inférence statistique, qui s'appuie sur la théorie des sondages et la statistique mathématique.

Une **enquête statistique** consiste à observer une certaine **population** (élèves d'une classe, personnes âgées de 20 à 60 ans dans une région donnée, familles dans une région donnée, exploitations agricoles, appartements, travailleurs, ...) et à déterminer la répartition d'un certain **caractère** statistique (note obtenue, taille, nombre d'enfants, superficie, nombre de pièces, secteur d'activité, ...) dans cette **population**.

Lorsque le **caractère** statistique prend un nombre fini raisonnable de valeurs (note, nombre d'enfants, nombre de pièces, secteur d'activité, ...), le caractère statistique est **discret**.

Lorsque le **caractère** statistique peut prendre des valeurs multiples (taille, superficie, salaire, ...) le caractère statistique est considéré comme **continu**.

Lorsque le **caractère** statistique est un nombre (taille, note, nombre d'enfant, ...) on parle de caractère **quantitatif**, quand ce **caractère** n'est pas chiffré (langue parlée, secteur d'activité, couleur, ...) on parle de caractère **qualitatif**.

Pour résumer, la **statistique** est une méthode scientifique ayant pour objet la collecte, l'analyse et l'interprétation d'un ensemble d'observations chiffrées relatives à un même phénomène.

La **population** est l'ensemble soumis à une étude statistique.

Le **caractère** est le trait déterminé, commun à tous les éléments de la population sur laquelle porte l'étude.

Un **caractère** est dit **quantitatif** si son intensité varie et que l'on peut mesurer.

Un **caractère quantitatif** peut être
- **discret** : lorsqu'il ne prend que certaines valeurs d'un intervalle.
- **continu** : lorsqu'il peut prendre n'importe quelle valeur réelle dans un intervalle de variation.

Un **caractère** est dit **qualitatif** s'il est non mesurable et que sa nature peut varier.

Une **série** ou **distribution statistique** est l'ensemble des valeurs du caractère considéré pour une population.

Un **échantillon** est une partie de la population qu'on étudie, s'il n'est pas possible d'en étudier chaque élément.

La statistique développe un certain nombre d'outils pour traiter les résultats d'une enquête.

En mathématiques élémentaires, les statistiques sont principalement descriptives. Or la tentation est grande de partir des informations obtenues dans un échantillon pour en tirer une généralité sur la population tout entière. Passer du particulier au général est normalement une démarche interdite, si elle est faite sans précaution. En ce qui concerne les statistiques, cette démarche est un objectif.

On aborde alors la deuxième partie des statistiques : la statistique inférentielle ou théorie des sondages. Cette science permet de déterminer quelles sont les précautions à prendre pour passer du particulier au général (taille et représentativité de l'échantillon, ...), quels sont les risques d'erreur que l'on peut commettre. Elle est alors très liée et presque confondue avec la science des probabilités. Aussi, nous ne l'aborderons pas avant d'en avoir établi les bases.

Dans cette première partie du cours, nous nous limiterons à l'étude de la statistique descriptive. L'objectif de la statistique descriptive est de décrire, c'est-à-dire de résumer ou représenter, par des statistiques, les données disponibles quand elles sont nombreuses.

Chapitre 2

Séries statistiques simples (à une dimension)

2.1 Tabulation

Les résultats d'une enquête consistent en une liste désordonnée d'informations.

Ex1 - note de la classe X : 10, 9, 12, 11, 10, 8, 14 ,11 ,9 ,16 ,5 ,12 ,10 ,11 ,10 ,13

Ex2 - couleur préférée : bleu, rouge, bleu, bleu, jaune, bleu, rouge, bleu, bleu, jaune, jaune, bleu, jaune.

Il faut alors les trier, par ordre croissant, pour le caractère quantitatif, par genre, pour le caractère qualitatif.

Notes triées : 5, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 16

Couleurs préférées triées : bleu, bleu, bleu, bleu, bleu, bleu, bleu, rouge, rouge, jaune, jaune, jaune, jaune.

Cette présentation sous forme de liste est peu exploitable, on décide alors de présenter les résultats de l'enquête sous forme d'un tableau d'effectifs. L'**effectif** ou **fréquence absolue** d'une valeur x_i est le nombre n_i de fois où cette valeur x_i apparaît.

Exemple 1 : note x_i des élèves

notes x_i	$x_1 = 5$	$x_2 = 8$	$x_3 = 9$	$x_4 = 10$	$x_5 = 11$	$x_6 = 12$	$x_7 = 13$	$x_8 = 14$	$x_9 = 16$	Total
effectifs n_i	$n_1 = 1$	$n_2 = 1$	$n_3 = 2$	$n_4 = 4$	$n_5 = 3$	$n_6 = 2$	$n_7 = 1$	$n_8 = 1$	$n_9 = 1$	$n_{tot} = 16$

Dans ce tableau, par exemple, on voit directement que 3 élèves sur les 16 interrogés ont obtenu un 11.

Exemple 2 : couleur x_i préférée

Couleurs x_i	Effectifs n_i
x_1 = Bleu	$n_1 = 7$
x_2 = Rouge	$n_2 = 2$
x_3 = Jaune	$n_3 = 4$
Total	$n_{tot} = 13$

Dans ce tableau, par exemple, on voit directement que 7 personnes sur les 13 questionnées préfèrent le bleu.

Lorsque la population étudiée est trop grande, ou bien lorsque l'on cherche à faire la comparaison entre deux populations de tailles différentes, on préfère se ramener à une population de 100, donc travailler en pourcentages, appelés ici fréquences f_i.

Exemple 1 : note x_i des élèves

notes	x_i	5	8	9	10	11	12	13	14	16	Total
fréquences (en %)	f_i	6,25	6,25	12,50	25,00	18,75	12,50	6,25	6,25	6,25	100
fréq. cumulées (en %)	F_i	6,25	12,50	25,00	50,00	68,75	81,25	87,50	93,75	100	

Dans ce tableau, grâce à la fréquence cumulée, par exemple, on voit directement que 25 % des 16 étudiants interrogés ont obtenu une note strictement inférieure à 10.

Exemple 2 : couleur x_i préférée

Couleurs x_i	Fréquences (en %) f_i	Fréq. cumulées (en %) F_i
Bleu	53,85	53,85
Rouge	15,38	69,23
Jaune	30,77	100
Total	100	

Dans ce tableau, par exemple, on voit directement qu'un peu plus de 50 % de ces 13 personnes préfèrent le bleu et qu'un peu moins de 70 % préfèrent le bleu ou le rouge.

Pour résumer, les p différentes valeurs ou natures des caractères constituent les p données x_1, x_2, ... x_p.

Le nombre de fois qu'une donnée x_i se présente dans la distribution s'appelle l'effectif (ou répétition, ou fréquence absolue) n_i.

L'effectif total n (nombre total de données) est donné par la somme des effectifs n_i. On a

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_{p-1} + n_p = n_{tot} = n$$

L'effectif cumulé N_i de la donnée x_i est donné par

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j = n_1 + n_2 + ... + n_i$$

On a forcément que $N_p = \sum_{j=1}^{p} n_j = n$.

La fréquence relative f_i de la donnée x_i est donnée par

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{p} f_i &= f_1 + f_2 + ... + f_p \\
&= \tfrac{n_1}{n} + \tfrac{n_2}{n} + ... + \tfrac{n_p}{n} \\
&= \tfrac{1}{n}(n_1 + n_2 + ... + n_p) \\
&= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{p} n_i \\
&= 1
\end{aligned}$$

La fréquence relative cumulée F_i de la donnée x_i est donnée par

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j = f_1 + f_2 + ... + f_i$$

On a forcément que $F_p = \sum_{j=1}^{p} f_j = 1$.

2.2 Classes

Lorsque les résultats de l'enquête statistique sont trop nombreux pour que la liste triée des valeurs soit lisible (supérieur à 20 en général), on préfère perdre de l'information et ranger les données par intervalles appelés classes. Il faut alors que, dans chaque classe, la répartition des valeurs soit régulière. Sinon, il faut affiner et prendre des classes plus petites. Il n'est pas indispensable que les classes soient de même amplitude, mais il est préférable de ne pas définir de classes de la forme « plus de ... » qui empêcherait alors tout traitement ultérieur (histogramme, moyenne, ...). On compte alors le nombre de fois où la valeur du caractère tombe dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}[$, ce nombre est appelé effectif de la classe $[x_i, x_{i+1}[$.

Exemple : Répartition des revenus annuels en milliers d'euros dans une population de 4370 personnes.

Salaires	$[0,8[$	$[8,12[$	$[12,16[$	$[16,20[$	$[20,30[$	$[30,40[$	$[40,60[$	Total
Effectifs	306	231	385	1180	1468	568	232	4370
Fréquences	$7,0$	$5,3$	$8,8$	$27,0$	$33,6$	$13,0$	$5,3$	100

Puisque l'on a estimé que la répartition dans chaque classe était régulière, on peut affirmer que le milieu de la classe est représentatif de la classe. On va donc remplacer les n_i individus de la classe $[x_i, x_{i+1}[$ par n_i individus dont le caractère statistique prendrait la valeur $m_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

2.3 Représentation graphique des séries quantitatives

2.3.1 Diagramme en bâtons

On porte en abscisse les bornes des classes et en ordonnées les fréquences ou les effectifs. À partir de chaque point obtenu, on abaisse un segment perpendiculairement à l'axe des abscisses. Cette représentation met par exemple en évidence des maxima ou minima éventuels.

2.3.2 Histogramme

On porte en abscisse les bornes des classes et en ordonnée les fréquences. On représente, pour chaque classe, un rectangle dont la base est proportionnelle à l'intervalle de la classe et la hauteur est proportionnelle à la fréquence ou à l'effectif correspondant et inversément proportionnelle à la largeur de l'intervalle de cette classe. L'histogramme est la ligne brisée bordant l'ensemble des rectangles. Cette représentation met en évidence le fait qu'une classe contient plusieurs éléments dont la mesure de la caractéristique a été ramenée à la valeur centrale.

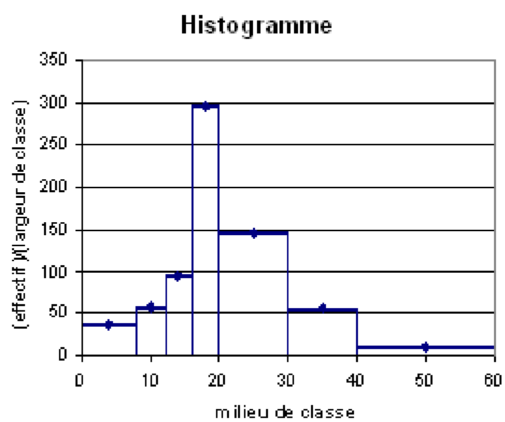


FIG. 2.1 – Répartition des revenus annuels en milliers d'euros dans une population de 4370 personnes.

Plus généralement, pour un même effectif, si l'amplitude de la classe est deux fois plus grande, la hauteur du rectangle doit être deux fois plus petite.

2.3.3 Polygone des fréquences

On reprend les coordonnées des points du diagramme en bâtons (centre de classe, fréquence). On y ajoute les deux points correspondants à la première et dernière classe de fréquence nulle et on joint ces points par ordre d'abscisses croissants. Ce graphique met en évidence la variation de la fréquence ou de l'effectif d'une classe à la suivante.

2.3.4 Diagramme cumulatif

On porte en abscisse les données et en ordonnée les fréquences (ou effectifs) cumulées. On dessine la fonction

$$f(x) = F_i \quad \text{avec} \quad x_i \leq x < x_{i+1}$$

ou

$$g(x) = N_i \quad \text{avec} \quad n_i \leq x < n_{i+1}$$

Ce graphique permet de repérer facilement la médiane (voir plus loin).

2.3.5 Polygone cumulatif

On porte sur un graphe les points ayant pour abscisse les bornes supérieures des classes et en ordonnées les fréquences cumulées correspondantes (y compris la première classe de fréquence nulle). On joint ces points par ordre d'abscisses croissants.

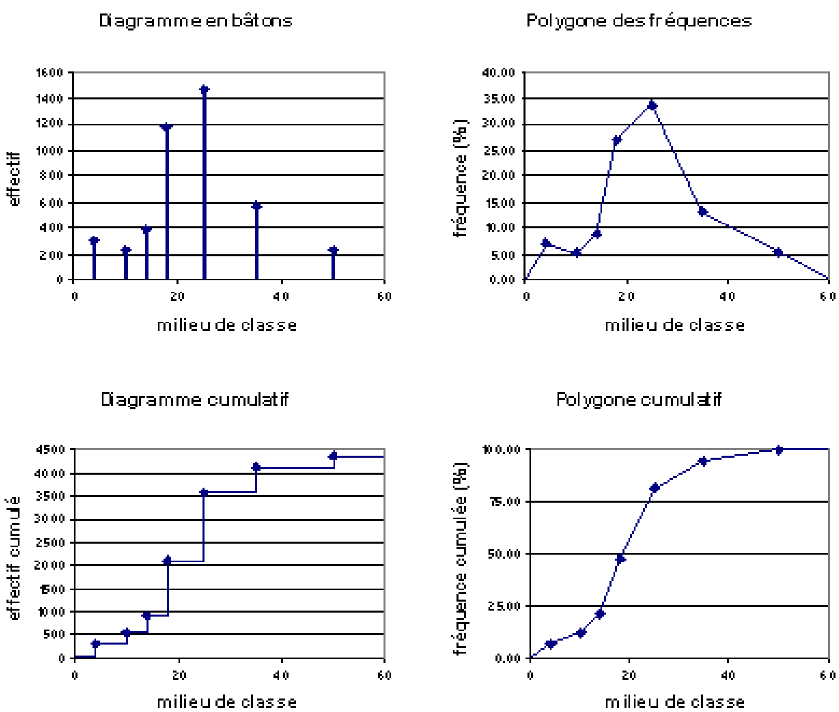


Fig. 2.2 – Répartition des revenus annuels en milliers d'euros dans une population de 4370 personnes.

2.4 Paramètres de position

En statistiques, on est en général en présence d'un grand nombre de valeurs. Or, si l'intégralité de ces valeurs forme l'information, il n'est pas aisé de manipuler plusieurs centaines voir milliers de chiffres, ni d'en tirer des conclusions. Il faut donc calculer quelques valeurs qui vont permettre d'analyser les données.

En mesure physique (métrologie), on va en général calculer deux valeurs : la moyenne, qui représentera la « valeur » de la mesure, et l'écart type (paramètre de dispersion), qui va estimer l'erreur de mesure.

Dans d'autres domaines, on va vouloir avoir une description plus fine de la répartition des valeurs, et donc calculer d'autres paramètres de position.

2.4.1 Extrema

La valeur maximale est la plus grande valeur prise par le caractère statistique.
La valeur minimale est la plus petite valeur prise par le caractère statistique.

2.4.2 Médiane

La médiane est la valeur du caractère statistique qui coupe la population en deux populations de taille égale. Sur le polygone cumulatif, il s'agit de l'abscisse du point dont l'ordonnée, qui est la fréquence cumulée, vaut 50 %.

Cas discret

On trie les valeurs par ordre croissant.

– Si la population comporte n individus et si n est impair alors $n = 2p+1$, la médiane sera la $(p+1)^e$ valeur du caractère statistique.

  Exemple : série de 13 notes : 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 11,12, 13, 16. Médiane $= M = 10$

– Si la population comporte n individus et si n est pair alors $n = 2p$, la médiane sera la moyenne entre la p^e et $(p+1)^e$ valeur du caractère statistique.

  Exemple : série de 12 notes : 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 11, 13, 16. Médiane $= M = 9,5$

Cas continu

On utilise le polygone des fréquences cumulées croissantes et le tableau correspondant et on détermine graphiquement ou par interpolation linéaire la valeur M pour laquelle la fréquence de l'intervalle [valeur min, M] vaut 50 %.

Dans l'exemple précédent, le tableau des fréquences cumulées croissantes est :

x_i	0	8	12	16	20	30	40	60
fréq. cumulée croissante (en %)	0	7	12,3	21,1	48,1	81,7	94,7	100

Les 50 % sont atteint entre 20 et 30 donc pour une valeur M que l'on estime à $20+10\frac{50-48,1}{81,7-48,1} = 20,56$ par interpolation linéaire.

2.4.3 Mode

Le mode est la valeur du caractère statistique qui apparaît le plus fréquemment.

Exemple 1 : note des élèves

note x_i	5	8	9	10	11	12	13	14	16	Total
effectif n_i	1	1	2	4	3	2	1	1	1	16

Le mode est 10. Exemple 2 : note des élèves

note x_i	5	8	9	10	11	12	13	14	16	Total
effectif n_i	1	1	4	2	2	4	1	1	1	16

Cette série est dite série bimodale car on voit apparaître deux modes : 9 et 12.

Dans le cas d'une variable continue, on peut entendre parler de classe modale qui serait la classe de plus grand effectif. Mais il faut se méfier de cette notion car, plus la classe est de grande amplitude, plus son effectif est important sans pour autant que cela soit significatif. Cette notion de classe modale définie par les effectifs de la classe n'a de sens que si les classes ont même amplitude. Si les amplitudes sont différentes, il faut aller chercher sur l'histogramme la classe associée au rectangle de plus grande hauteur.

Exemple : Répartition des revenus annuels en milliers d'Euros dans une population de 4370 personnes.

Salaire	$[0,8[$	$[8,12[$	$[12,16[$	$[16,20[$	$[20,30[$	$[30,40[$	$[40,60[$	Total
Effectif	306	231	385	1180	1468	568	232	4370
Fréquence (en %)	$7,0$	$5,3$	$8,8$	$27,0$	$33,6$	$13,0$	$5,3$	100
Fréquence/Intervalle	$0,875$	$1,325$	$2,200$	$6,750$	$3,360$	$1,300$	$0,265$	

L'observation de ce tableau laisse penser que la classe modale serait la classe $[20,30[$. Mais une observation de l'histogramme, et donc de la fréquence divisée par la largeur de l'intervalle, corrige cette idée fausse : La classe modale est la classe $[16,20[$.

2.4.4 Quartiles

Les quartiles sont les trois valeurs qui partagent la population en 4 sous-populations de même taille (25 %). Ces valeurs correspondent donc aux fréquences cumulées de 25 %, 50 % et 75 %.

Cas discret

On range les valeurs par ordre croissant.

On détermine le second quartile qui correspond à la médiane. Puis on cherche la médiane de la première moitié de la population qui correspond au 1er quartile. On cherche la médiane de la seconde moitié de la population qui correspond au troisième quartile.

Si la population est de taille n, on distingue 4 cas :

- Si $n = 4p$:
  - Q1 = moyenne entre la p^e et la $(p+1)^e$ valeur.
  - Q2 = moyenne entre la $(2p)^e$ valeur et la $(2p+1)^e$ valeur.
  - Q3 = moyenne entre la $(3p)^e$ valeur et la $(3p+1)^e$ valeur.

  Exemple : série de 12 notes : 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 11, 13, 16
  Q1 = 7,5 ; Q2 = 9,5 ; Q3 = 10,5

- Si $n = 4p + 1$:
  - Q1 = moyenne entre la p^e et $(p+1)^e$ valeur.
  - Q2 = $(2p+1)^e$ valeur.
  - Q3 = moyenne entre la $(3p+1)^e$ valeur et la $(3p+2)^e$ valeur.

  Exemple : série de 13 notes 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 11,12, 13, 16
  Q1 = 7,5 ; Q2 = 10 ; Q3 = 11,5

- Si $n = 4p + 2$:
  - Q1 = $(p+1)^e$ valeur.
  - Q2 = moyenne entre la $(2p+1)^e$ valeur et la $(2p+2)^e$ valeur.
  - Q3 = $(3p+2)^e$ valeur.

  Exemple : série de 14 notes 4, 5, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 12,13, 16
  Q1 = 8 ; Q2 = 9,5 ; Q3 = 11

- Si $n = 4p + 3$:
  - Q1 = $(p+1)^e$ valeur.
  - Q2 = $(2p+2)^e$ valeur.
  - Q3 = $(3p+3)^e$ valeur.

  Exemple : série de 15 notes 4, 5, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11,11, 12, 13, 16
  Q1 = 8 ; Q2 = 10 ; Q3 = 11

En pratique, on range les valeurs par ordre croissant.

$Q1$ est la première valeur pour laquelle l'intervalle $[x_{min}, Q1]$ regroupe au moins 25 % de la population.
$Q2$ est la première valeur pour laquelle l'intervalle $[x_{min}, Q2]$ regroupe au moins 50 % de la population.
$Q3$ est la première valeur pour laquelle l'intervalle $[x_{min}, Q3]$ regroupe au moins 75 % de la population.

En reprenant les exemples précédents :

Si $n = 12$: 25 % de $n = 3$, puis 50 % de $n = 6$, puis 75 % de $n = 9$.
La série de notes est 4, 5, **7**, 8, 8, **9**, 10, 10, **10**, 11, 13, 16
$Q1 = 7$, $Q2 = 9$, $Q3 = 10$

Si $n = 13$: 25 % de $n = 3,25$, puis 50 % de $n = 6,5$, puis 75 % de $n = 9,75$ que l'on arrondit à l'entier supérieur.

La série de notes est 4, 5, **7**, 8, 8, 9, **10**, 10, 10, **11**, 12, 13, 16

$Q1 = 8$, $Q2 = 10$, $Q3 = 12$

On s'aperçoit que cette approximation rend dissymétrique la définition, que le second quartile ne correspond plus à la médiane et que les valeurs obtenues diffèrent de celles de la définition précédente. Son avantage est de rendre la recherche des quartiles (approchés) plus facile sans que l'on soit obligé de distinguer 4 cas. Les différences obtenues par l'une ou l'autre des méthodes se révèlent négligeables et justifient l'usage de cette approximation.

Cas continu

On calcule les quartiles comme la médiane, graphiquement grâce au polygone des fréquences cumulées croissantes, et par interpolation linéaire grâce au tableau correspondant.

Le tableau des fréquences cumulées croissantes est :

x_i	0	8	12	16	20	30	40	60
fréq. cumulées croissantes (en %	0	7	$12,3$	$21,1$	$48,1$	$81,7$	$94,7$	100

25% est atteint dans l'intervalle $[16, 20]$ soit pour une valeur de $Q1$ obtenue par interpolation linéaire $Q1 = 16 + 4\frac{25-21,1}{48,1-21,1} = 16,57$.

$Q2 = M = 20,56$.

75% est atteint dans l'intervalle $[20, 30]$ soit pour une valeur de $Q3$ obtenue par interpolation linéaire $Q3 = 20 + 10\frac{75-48,1}{81,7-48,1} = 28,00$.

2.4.5 Déciles et percentiles

Les déciles sont les 9 valeurs qui partagent la population en 10 sous-populations de même taille. Ces valeurs correspondent donc aux fréquences cumulées de 10 %, 20 %, ... 90 %.

Par conséquent, les percentiles sont les 99 valeurs qui partagent la population en 100 sous-populations de même taille. Si la fréquence cumulée est exprimée en pourcents les percentiles sont les valeurs de la variable correspondant respectivement aux fréquences cumulées.

Notons finalement que la médiane correspond au 5^e décile et au percentile 50.

2.4.6 Moyenne

Il y a plusieurs façon de calculer une moyenne d'un ensemble de nombres. Celle qu'il convient de retenir dépend de la grandeur physique que représentent ces nombres. Lorsque, dans le langage courant, on parle de moyenne, on évoque en fait la moyenne arithmétique.

La moyenne est la valeur unique que devraient avoir tous les individus d'une population (ou d'un échantillon) pour que leur total soit inchangé. Dans la plupart des cas, le total formé par les individus d'une population est la somme de leurs valeurs. La moyenne est alors la moyenne arithmétique. Mais si le total représenté par une population ou un échantillon n'est pas la somme de leurs valeurs, la moyenne pertinente ne sera plus la moyenne arithmétique. Si, par exemple, le total d'un ensemble d'individus est calculé par l'inverse de la somme des inverses (cas des vitesses d'un ensemble de fractions d'un trajet, par exemple), on doit calculer leur moyenne harmonique. Si, par exemple, le total d'un ensemble d'individus est le produit de leurs valeurs, il convient de calculer leur moyenne géométrique. On rencontre, en physique, de multiples moyennes : La capacité moyenne d'un ensemble de condensateurs en série est la moyenne harmonique de leurs capacités.

La moyenne ne peut donc se concevoir que pour une variable quantitative. On ne peut pas faire le total des valeurs d'une variable qualitative.

De manière générale, la moyenne n'est pas forcément une manière pertinente de représenter les données. On peut, par exemple, lui préférer la valeur médiane qui représente la valeur à laquelle 50 % des valeurs observées sont inférieures. La médiane n'est pas (sauf exception ou hasard) équivalente à la moyenne arithmétique de l'ensemble.

Moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique est la moyenne ordinaire, c'est-à-dire la somme des valeurs numériques (de la liste) divisée par le nombre de ces valeurs numériques. Exemple : la hauteur moyenne des toits d'une rue.

Cas de la série statistique discrète triée mais non regroupée

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Cas de la série statistique discrète regroupée

$$\mu = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$$

Cas de la série continue (les m_i sont les milieux de classes)

$$\mu = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i m_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \sum_{i=1}^{p} f_i m_i$$

Moyenne harmonique

La moyenne harmonique est définie de la manière suivante :

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Si un train fait un trajet aller-retour entre 2 villes à la vitesse constante v_1 pour l'aller et à la vitesse constante v_2 au retour, la vitesse moyenne du trajet total n'est pas la moyenne arithmétique des 2 vitesses, mais leur moyenne harmonique.

Moyenne géométrique

La moyenne géométrique est définie de la manière suivante :

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

On peut illustrer la moyenne géométrique avec les deux cas suivants :

- Si l'inflation d'un pays est de 5 % la première année et de 15 % la suivante, l'augmentation moyenne des prix se calcule grâce à la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs 1,05 et 1,15 soit une augmentation moyenne de 9,88 % et non grâce à la moyenne arithmétique 10 %.
- Le carré (c'est-à-dire le rectangle moyen à deux cotés égaux) qui a même surface (le total considéré ici) qu'un rectangle de cotés 3 et 7 a pour coté la moyenne géométrique des deux cotés du rectangle $\sqrt[2]{3.7} = 4,58$.

Moyenne quadratique

La moyenne quadratique est définie de la manière suivante :

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Exemple : Si un rectangle a pour côtés 3 et 7, le carré (c'est-à-dire le rectangle moyen) qui a même diagonale (le total considéré ici) que ce rectangle, a pour côté la moyenne quadratique de 3 et 7, c'est-à-dire 5,385.

Moyenne pondérée

La moyenne pondérée est utilisée, par exemple, en géométrie pour localiser le barycentre d'un polygone, en physique pour déterminer le centre de gravité ou en statistique et probabilité pour calculer une espérance. On la calcule ainsi :

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Dans le cas général le poids w_i représente l'influence de l'élément x_i par rapport aux autres.

A noter qu'il s'agit ici de la moyenne pondérée arithmétique.

Valeur moyenne d'une fonction

Pour toute fonction continue (ou même seulement continue par morceaux) sur un segment $[a, b]$ non vide et non trivial ($b > a$), la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le réel $\bar{f}_{[a,b]}$ défini par :

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Cette notion généralise celle de moyenne d'un nombre fini de réels en l'appliquant à un nombre infini de valeurs prises par une fonction intégrable. Elle sert par exemple dans la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique : c'est la composante constante. En traitement du signal, pour les signaux périodiques, il s'agit de la composante continue.

Notons que lorsque la fonction est périodique de période T, elle a la même valeur moyenne sur toute période $[a, a+T]$. Cette valeur commune est appelée valeur moyenne de la fonction. Ainsi la fonction cosinus est de moyenne nulle, son carré de moyenne $1/2$.

2.4.7 Propriétés de la moyenne

1. Soit $x'_i = x_i - \bar{x}$, l'écart entre la donnée x_i et la moyenne $\bar{x}$. On a

$$\sum_{i=1}^{p} x'_i = 0$$

   En effet,

$$\begin{array}{rcc} \sum_{i=1}^{p} x'_i & = & (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + ... + (x_p - \bar{x}) \\ & = & (x_1 + x_2 + ... + x_p) - n\bar{x} \\ & = & n\bar{x} - n\bar{x} \\ & = & 0 \end{array}$$

2. La somme des carrés des écarts des données x_i par rapport à la moyenne $\bar{x}$ est minimum. On a

$$\sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 \text{ est minimum}$$

   En effet, avec $r \in \mathbb{R} \backslash \{\bar{x}\}$,

$$\begin{array}{rcc} \sum_{i=1}^{p} (x_i - r)^2 & = & \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x} + \bar{x} - r)^2 \\ & = & \sum_{i=1}^{p} ((x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - r))^2 \\ & = & \sum_{i=1}^{p} ((x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - r) + (\bar{x} - r)^2) \\ & = & \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - r) \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - r)^2 \sum_{i=1}^{p} 1 \\ & = & \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 + 0 + (\bar{x} - r)^2 p \\ & = & \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 + p(\bar{x} - r)^2 \\ & > & \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 \end{array}$$

3. La moyenne est stable par transformation affine. C'est-à-dire si $x'_i = ax_i + b$, si $\bar{x}$ est la moyenne de la série $\{x_i\}$ alors la moyenne de la série $\{x'_i\}$ est $\bar{x}' = a\bar{x} + b$.

En effet,

$$\begin{array}{rcl}\bar{x}' & = & \sum_{i=1}^{p} \frac{x'_i}{n} \\ & = & \frac{1}{n}((ax_1+b)+(ax_2+b)+...+(ax_p+b)) \\ & = & \frac{1}{n}(a(x_1+x_2+...+x_p)+nb) \\ & = & a\bar{x}+b\end{array}$$

Cette propriété est utile pour changer d'unité : si on connaît une moyenne de température en degré Fahrenheit, il est inutile de convertir toutes les valeurs en degrés Celsius pour calculer la moyenne en degrés Celsius, il suffit de ne convertir que la moyenne.

Il est aussi intéressant, pour limiter la taille des nombres, de partir d'un moyenne estimée M_{est} et de calculer la moyenne des $x'_i = x_i - M_{est}$. Dans ce cas, $\bar{x} = M_{est} + \bar{x}'$

2.5 Paramètres de dispersion

2.5.1 Intervalle de variation

L'intervalle de variation représente l'écart entre les extrema. Il s'agit donc de la différence entre la valeur maximum et minimum des valeurs.

2.5.2 Intervalle interquartile

L'intervalle interquartile contient la moitié centrale des observations. Il s'agit donc de la différence entre la valeur du 1^{er} et du 3^{eme} quartile.

2.5.3 Dérivation moyenne

La dérivation moyenne $D.M.$ est égale à la moyenne des valeurs absolues des écarts à la moyenne. On a

$$D.M. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$$

Pour une série distribuée en p fréquences, on a

$$D.M. = \frac{\sum_{i=1}^{p} f_i|x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{p} f_i}$$

2.5.4 Variance

La variance représente la moyenne de la somme des carrés des écarts à la moyenne.

1. Pour une **population**, on utilise

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{p} f_i}$$

2. Pour un **échantillon**, on utilise

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{p} f_i - 1}$$

   - Exemple : On souhaite étudier un caractère relatif à tous les belges mais on n'étudie qu'une partie de la population belge, c'est-à-dire un échantillon.
   - Exemple : L'orsqu'on effectue des mesures en chimie, les n mesures répétées ne sont qu'un échantillon de l'infinité des mesures possibles.

Remarquons que pour n suffisamment grand, on peut faire l'approximation $\sigma^2 \approx s^2$.

2.5.5 Ecart-type et déviation standart

La variance présente le désavantage d'avoir les dimensions des données élevées au carré, c'est pourquoi on utilise l'écart-type qui est la racine carrée de la variance.

1. Pour une population : $\sigma = \sqrt{\sigma^1}$
2. Pour un échantillon : $s^2 = \sqrt{s^2}$ et dans ce cas, on appelle plutôt s la **déviation standart**.

Remarquons que, dans le cas d'une distribution normale (gaussienne),
- 50% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $\bar{x} \pm \frac{2}{3}\sigma$
- 68,27% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $\bar{x} \pm \sigma$
- 95,45% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $\bar{x} \pm 2\sigma$
- 99,75% des valeurs sont comprises dans l'intervalle $\bar{x} \pm 3\sigma$

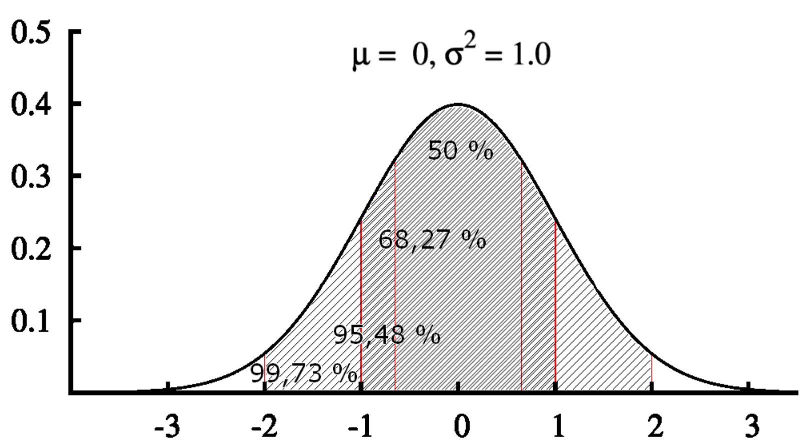


Fig. 2.3 – Courbe normale (ou gaussienne) centrée réduite.

2.5.6 Propriétés de la variance

1. L'écart-type σ est toujours positif.

$$\begin{array}{rcl} \sigma^2 & = & \frac{1}{n}\sum_i (x_i-\bar{x})^2 \\ & = & |\frac{1}{n}|\sum_i |x_i-\bar{x}|^2 \\ & \geq & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma \geq 0}$$

2. Soit $x'_i = ax_i + b$. Donc, $\bar{x}' = a\bar{x} + b$. Dès lors, on a

$$\begin{array}{rcl} \sigma'^2 & = & \frac{1}{n}\sum_i (x'_i-\bar{x}')^2 \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i (ax_i+b-a\bar{x}-b)^2 \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i (ax_i-a\bar{x})^2 \\ & = & a^2\frac{1}{n}\sum_i (x_i-\bar{x})^2 \\ & = & a^2\sigma^2 \end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma' = a\sigma}$$

3. Théorème de König-Huyghens :

$$\begin{array}{rcl} \sigma^2 & = & \frac{1}{n}\sum_i (x_i-\bar{x})^2 \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i (x_i^2-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2) \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \frac{2}{n}\bar{x}\sum_i x_i + \frac{1}{n}\sum_i \bar{x}^2 \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - 2\bar{x}(\frac{1}{n}\sum_i x_i) + \frac{1}{n}n\bar{x}^2 \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2 \end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2}$$

Chapitre 3

Séries statistiques à deux dimensions

3.1 Introduction

Il arrive fréquemment que l'on observe conjointement deux caractères statistiques pour déterminer s'il existe une corrélation entre les deux. Par exemple,

- entre la vitesse et la température d'une réaction chimique,
- entre la longueur et la période d'un pendule,
- entre la pression, la température et le volume d'un gaz, etc.

On exprime cette relation sous forme mathématique à l'aide d'une équation reliant les variables.

Pour chaque individu, on relève la valeur de deux caractères x et y. On obtient alors une liste de couples de nombres (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... (x_i, y_i), ... (x_n, y_n) que l'on peut présenter sous forme d'un tableau.

Exemple : Masse appliquée (en g) et longueur du ressort (en cm).

Masse en grammes	x_i	7	10	18	20	5	24	12	3
Longueur en cm	y_i	8.5	9	10.5	11	8	11.8	9.4	7.5

Exemple : Moyenne de l'année et note à l'examen pour un échantillon de 8 personnes .

Note de l'année	x_i	8	9	7	15	12	12	10	8
Note à l'examen	y_i	7	9	4	17	13	15	9	13

On peut porter ces points (x_i, y_i) dans un plan muni d'un repère orthonormé Oxy. L'ensemble des points s'appelle le *diagramme de dispersion*.

3.2 Ajustement d'une droite à des données

Le diagramme de dispersion est un bon indicateur pour vérifier une corrélation entre les caractères x et y. Si les points sont sous la forme d'un nuage, il est fort à parier que les phénomènes ne sont pas corrélés. S'ils semblent dessiner une courbe, on cherchera à déterminer la nature de la courbe en procédant à un ajustement.

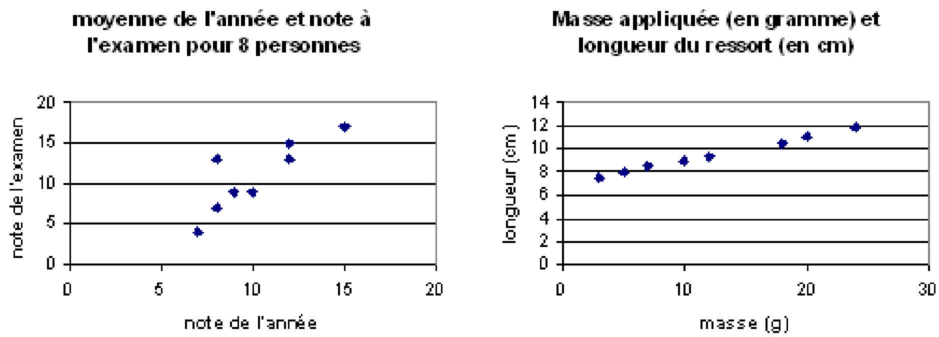


FIG. 3.1 – Diagramme de dispersion.

Par exemple, pour une relation linéaire $y = ax + b$, deux paramètres a et b sont nécessaires. Pour une relation quadratique $y = ax^2 + bx + c$, trois paramètres a, b et c sont nécessaires, etc. On peut déterminer ces paramètres en choisissant des points sur la courbe (autant de points qu'on a de paramètres).

Le problème de cette méthode est que des observateurs différents obtiendront des courbes différentes et donc des paramètres différents. Pour mettre tout le monde d'accord, on a recherché une méthode rigoureuse permettant de déterminer la « meilleure courbe d'ajustement » aux données.

Il s'agit de la méthode des *moindres carrés.*

3.2.1 Méthode des moindres carrés

Pour obtenir une relation du type $d_{y/x} \equiv y = ax + b$, On cherche à minimiser l'écart quadratique moyen des points à la droite. On doit donc rendre minimum

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

Donc, on recherche la droite eds moindres carrés $d_{y/x}$, c'est-à-dire la droite par laquelle la somme des carrés des déviations verticales d_i est minimum.

Soit $y = ax + b$ l'équation de la droite $d_{y/x}$ recherchée. Que valent les constantes a et b pour que la droite $d_{y/x} \equiv f(x) = ax + b$ réponde aux critères énoncés ? On a

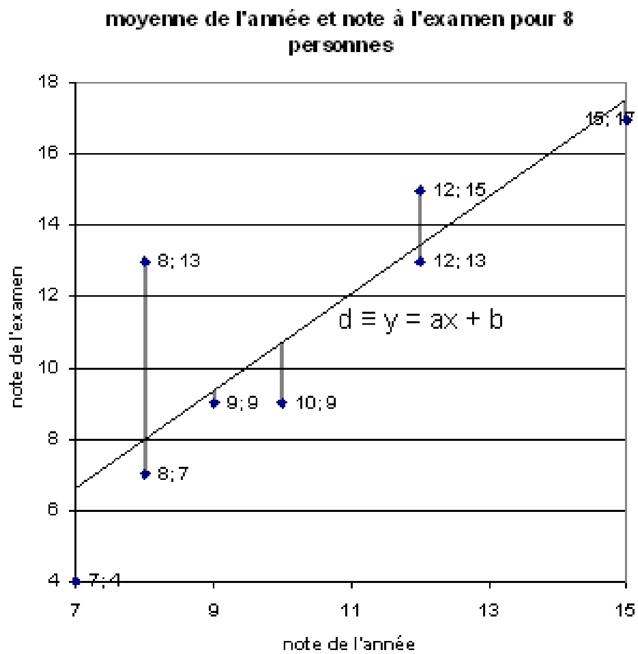


FIG. 3.2 – On cherche à minimiser l'écart quadratique vertical entre les points et la droite.

$$\begin{array}{rrcl} & d_i & = & y_i - f(x_i) \\ \Leftrightarrow & d_i & = & y_i - ax_i - b \\ \Leftrightarrow & d_i^2 & = & (y_i - ax_i - b)^2 \\ \Leftrightarrow & d_i^2 & = & y_i^2 + a^2x_i^2 + b^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + 2abx_i \\ \Leftrightarrow & \sum_i d_i^2 & = & \sum_i y_i^2 + a^2\sum_i x_i^2 + nb^2 - 2a\sum_i x_iy_i - 2b\sum_i y_i + 2ab\sum_i x_i \\ \Leftrightarrow & \sum_i d_i^2 & = & nb^2 + 2(a\sum_i x_i - \sum_i y_i)b + (\sum_i y_i^2 + a^2\sum_i x_i^2 - 2a\sum_i x_iy_i) \\ \Leftrightarrow & \sum_i d_i^2 & = & \alpha b^2 + \beta b + \gamma \end{array}$$

qui doit être minimum. Comme la dérivée en un extréma est nulle, on va rechercher la valeur de b pour laquelle

$$\frac{d(\sum_i d_i^2)}{db} = 2\alpha b + \beta = 0$$

On a donc que

$$\begin{array}{rccl} & 2nb + 2(a\sum_i x_i - \sum_i y_i) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & b & = & -\frac{2(a\sum_i x_i - \sum_i y_i)}{2n} \\ \Leftrightarrow & b & = & \frac{1}{n}\sum_i y_i - a\frac{1}{n}\sum_i x_i \\ \Leftrightarrow & b & = & \bar{y} - a\bar{x} \end{array}$$

De même, on a que

$$\begin{array}{rrcc} & d_i & = & y_i - f(x_i) \\ \Leftrightarrow & d_i & = & y_i - ax_i - b \\ \Leftrightarrow & d_i^2 & = & (y_i - ax_i - b)^2 \\ \Leftrightarrow & d_i^2 & = & y_i^2 + a^2x_i^2 + b^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + 2abx_i \\ \Leftrightarrow & \sum_i d_i^2 & = & \sum_i y_i^2 + a^2\sum_i x_i^2 + nb^2 - 2a\sum_i x_iy_i - 2b\sum_i y_i + 2ab\sum_i x_i \\ \Leftrightarrow & \sum_i d_i^2 & = & a^2\sum_i x_i^2 + 2(b\sum_i x_i - \sum_i x_iy_i)a + (\sum_i y_i^2 + nb^2 - 2b\sum_i y_i \\ \Leftrightarrow & \sum_i d_i^2 & = & \alpha' a^2 + \beta' a + \gamma' \end{array}$$

qui doit être minimum. Comme la dérivée en un extrémum est nulle, on va rechercher la valeur de a pour laquelle

$$\frac{d(\sum_i d_i^2)}{da} = 2\alpha' a + \beta' = 0$$

On a donc que

$$\begin{array}{rccc} & 2\sum_i x_i^2 a + 2(b\sum_i x_i - \sum_i x_iy_i) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & a & = & -\frac{2(b\sum_i x_i - \sum_i x_iy_i)}{2\sum_i x_i^2} \\ \Leftrightarrow & a & = & \frac{\sum_i x_iy_i - b\sum_i x_i}{\sum_i x_i^2} \\ \Leftrightarrow & a\sum_i x_i^2 & = & \sum_i x_iy_i - (\bar{y} - a\bar{x})\sum_i x_i \\ \Leftrightarrow & a\sum_i x_i^2 - a\bar{x}\sum_i x_i & = & \sum_i x_iy_i - \bar{y}\sum_i x_i \\ \Leftrightarrow & a\frac{1}{n}(\sum_i x_i^2 - \bar{x}\sum_i x_i) & = & \frac{1}{n}(\sum_i x_iy_i - \bar{y}\sum_i x_i) \\ \Leftrightarrow & a(\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2) & = & \frac{1}{n}\sum_i x_iy_i - \bar{x}\bar{y} \\ \Leftrightarrow & a\sigma_x^2 & = & \frac{1}{n}\sum_i x_iy_i - \bar{x}\bar{y} \end{array}$$

Or, la quantité $\frac{1}{n}(\sum_i x_iy_i) - \bar{x}\bar{y} = Cov(x,y) = \sigma_{xy}$ est appellée *covariance* de x et de y. On a en réalité

$$\begin{array}{rcc} \sigma_{xy} & = & \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i (x_iy_i - \bar{x}\sum_i y_i - \bar{y}\sum_i x_i + \bar{x}\bar{y}) \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i x_iy_i - \bar{x}\frac{1}{n}\sum_i y_i - \bar{y}\frac{1}{n}\sum_i x_i + n\bar{x}\bar{y} \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i x_iy_i - \bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{x} + \bar{x}\bar{y} \\ & = & \frac{1}{n}\sum_i x_iy_i - \bar{x}\bar{y} \end{array}$$

Dès lors, on peut dire que

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}$$

La droite de régression $d_{y/x}$ de y par rapport à x aura donc comme équation

$$y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x - \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}$$

On peut, par un procédé analogue, construire la droite de régression $d_{x/y} \equiv x = a'y + b'$ de x par rapport à y. Dans ce cas, on cherchera à minimiser les distances horizontales $d'_i = x_i - (a'y_i + b')$.

Selon un raisonnement similaire, on arrive à

$$a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} \quad \text{et} \quad b' = \bar{x} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\bar{y}$$

La droite de régression $d_{x/y}$ de x par rapport à y aura donc comme équation

$$x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} y - \bar{x} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} \bar{y}$$

Pour résumer :

$$\boxed{\begin{array}{l} d_{y/x} \equiv y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) + \bar{y} \\ d_{x/y} \equiv x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) + \bar{x} \end{array}}$$

$$\boxed{\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_i x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}$$

3.2.2 Propriété des droites de régression

Soient les droites de régression $d_{y/x}$ et $d_{x/y}$. Quel est leur point d'intersection ?

Pour répondre à cette question, il convient de résoudre le système

$$\begin{cases} y &= ax + b \\ x &= a'y + b' \end{cases}$$

On a $y = a(a'y + b') + b$

$$\begin{array}{rcll} \Leftrightarrow & y - aa'y & = & ab' + b \\ \Leftrightarrow & y(1 - aa') & = & a(\bar{x} - a'\bar{y}) + \bar{y} - a\bar{x} \\ \Leftrightarrow & y(1 - aa') & = & \bar{y} - aa'\bar{y} + a\bar{x} - a\bar{x} \\ \Leftrightarrow & y(1 - aa') & = & \bar{y}(1 - aa') \\ \Leftrightarrow & y & = & \bar{y} \end{array}$$

De même, $x = a'(ax + b) + b'$

$$\begin{array}{rcll} \Leftrightarrow & x - aa'x & = & a'b + b' \\ \Leftrightarrow & x(1 - aa') & = & a'(\bar{y} - a\bar{x}) + \bar{x} - a'\bar{y} \\ \Leftrightarrow & x(1 - aa') & = & \bar{x} - aa'\bar{x} + a'\bar{y} - a'\bar{y} \\ \Leftrightarrow & x(1 - aa') & = & \bar{x}(1 - aa') \\ \Leftrightarrow & x & = & \bar{x} \end{array}$$

Dès lors, on peut conclure que le point d'intersection des deux droites de régression est le point de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$.

$$d_{y/x} \cap d_{x/y} = \{(\bar{x}, \bar{y})\}$$

3.3 Corrélation linéaire

En statistique, étudier la corrélation entre deux ou plusieurs variables aléatoires ou statistiques, c'est étudier l'intensité de la liaison qui peut exister entre ces variables. Donc, il vient naturellement la question : sous quelle conditions est-il justifié d'ajuster une droite à des données ?

3.3.1 Parfaite corrélation

Les droites $d_{y/x}$ et $d_{x/y}$ sont confondues.

$d_{y/x} \equiv y = ax + b$ est confondue avec $d_{x/y} \equiv y = \frac{1}{a'}x - \frac{b'}{a'}$. Elles ont donc la même pente

$$a = \frac{1}{a'} \Leftrightarrow aa' = 1$$

et la même ordonnée à l'origine $b = -\frac{b'}{a'}$.

Par exemple, soit x le rayon d'un cercle et y sa circonférence. On a $d_{y/x} \equiv y = 2\pi x$ et $d_{x/y} \equiv x = \frac{1}{2\pi}y$ qui sont confondues. On vérifie bien que $aa' = 2\pi\frac{1}{2\pi} = 1$.

3.3.2 Indépendance

Les droites $d_{y/x}$ et $d_{x/y}$ sont perpendiculaires.

$d_{y/x} \equiv y = b$ est perpendiculaire à $d_{x/y} \equiv x = b'$. Ce qui signifie que

$$\sigma_{xy} = 0$$

Par exemple, soit x les points obtenus en jettant un dé et y les points obtenus en jettant un autre dé. Ces deux variables sont indépendantes l'une de l'autre et il n'existe pas de relation entre elles.

3.3.3 Corrélation partielle

Une mesure de la corrélation est obtenue par le calcul du coefficient de corrélation linéaire r. Ce coefficient est égal au rapport de leur covariance et du produit non nul de leurs écarts types. Le coefficient de corrélation r est compris entre -1 et 1.

Il s'agit, plus simplement, de la moyenne géométrique des coefficients a et a' des deux droites de régression $d_{y/x}$ et $d_{x/y}$

On a

$$\boxed{r = \pm\sqrt{aa'} = \pm\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}}$$

- Le signe de r est positif si a et a' sont tous les deux positifs.
- Le signe de r est négatif si a et a' sont tous les deux positifs.
- La covariance seule détermine le signe de a, a' et r : σ_x et σ_y étant toujours positifs.

On admet généralement qu'un ajustement entre des données x et y est valable lorsque

$$0,7 \leq |r| \leq 1$$

Si $|r| < 0,7$, on déduit qu'il n'existe pas de rapport de dépendance entre les deux séries de mesures x et y.

3.3.4 Récapitulatif

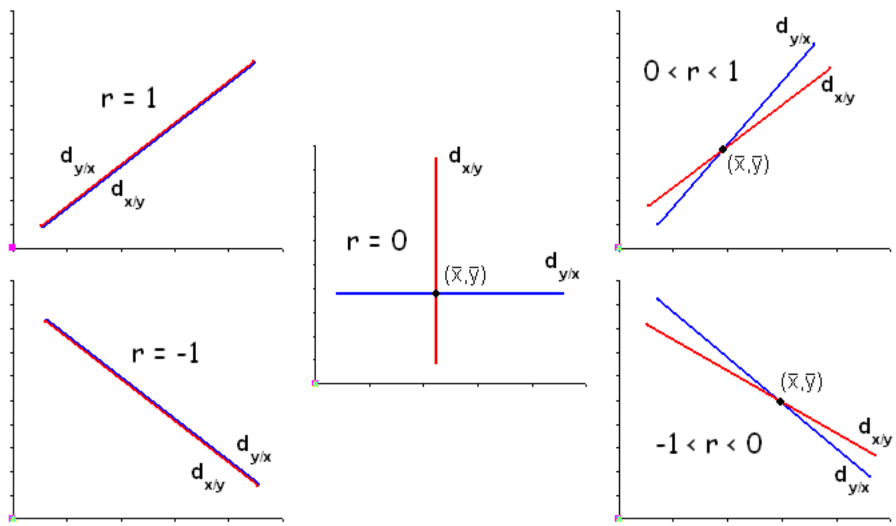


FIG. 3.3 – Ajustement d'une courbe à des données : récapitulatif.

3.4 Ajustement d'une courbe à des données

Lorsque les points d'un diagramme de dispersion ne semble pas se positionner sur une droite mais plutôt sur une courbe, on recherche l'équation de la courbe qui décrit le mieux le phénomène observé.

3.4.1 Exponentielle, logarithme et puissance

Soient

1. $y = b.a^x$ (Courbe exponentielle)
2. $y = b + a\ln x$ (Courbe logarithmique)
3. $y = b.x^a$ (Courbe puissance)

qu'on peut toujours ramener à une régression linéaire par un changement de variables.

1. $y = b.a^x$: On pose $Y = \ln y$, $A = \ln a$ et $B = \ln b$. Dès lors, $y = e^Y$, $a = e^A$ et $b = e^b$. Il vient alors, en accord avec les propriétés des logarithmes
   - $e^{ln\alpha} = \ln e^\alpha = \alpha$,
   - $\ln(\alpha\beta) = \ln\alpha + \ln\beta$ et
   - $\ln\alpha^\beta = \beta\ln\alpha$ que
   $$\ln y = \ln(b.a^x) = \ln b + x\ln a \Rightarrow Y = Ax + B$$
   Remarquons que si l'équation est de la forme $y = b.e^{ax}$, on aura $\ln y = ax\ln e + \ln b \Rightarrow Y = ax + B$.

2. $y = b + a\ln x$: On pose $X = \ln x$. Dès lors, $x = e^X$ et il vient simplement
   $$y = aX + b$$
3. $y = b.x^a$: On pose $Y = \ln y$, $X = \ln x$ et $B = \ln b$. Dès lors, $y = e^Y$, $x = e^X$ et $b = e^B$. Il vient
   $$\ln y = \ln b + a\ln x \Rightarrow Y = aX + B$$

Remarquons qu'à la place du ln, nous aurions pu utiliser le log. Cependant, il est très simple de passer de l'un à l'autre en considérant la propriété

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

où $\log_a x$ est le logarithme en base 10 de x. (notation : $\log_{10} = \log$)

Remarquons aussi qu'à la place de l'exponentielle e, nous aurions pu utiliser les puissances de 10. Ici aussi, on peu considérer la propriété $a^x = e^{x\ln a}$. (Exemple : $10^x = e^{x\ln 10}$)

3.4.2 Courbe parabolique

Si la courbe est parabolique, son équation nous sera donnée par $y = ax^2 + bx + c$. On cherchera alors à minimiser la somme des carrés des écarts d_i des points à cette courbe, c'est-à-dire

$$\sum_i d_i^2 = \sum_i (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

En bref, on devra déterminer les constantes a, b et c de la parabole de régression en résolvant le système de 3 équations à 3 inconnues suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum_i y_i & = & a\sum_i x_i^2 + b\sum_i x_i + nc \\ \sum_i x_i y_i & = & a\sum_i x_i^3 + b\sum_i x_i^2 + c\sum_i x_i \\ \sum_i x_i^2 y_i & = & a\sum_i x_i^4 + b\sum_i x_i^3 + c\sum_i x_i^2 \end{array}\right.$$

3.4.3 Courbe polynomiale

Si la courbe à ajuster est du type $y = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, un polynôme de degré p, on peut écrire $y = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j$ et il faudra résoudre le système de $p+1$ équations à $p+1$ inconnues a_j suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum_i y_i & = & \sum_{j=0}^{p} a_j \sum_i x_i^j \\ \sum_i x_i y_i & = & \sum_{j=0}^{p} a_j \sum_i x_i^{j+1} \\ \sum_i x_i^2 y_i & = & \sum_{j=0}^{p} a_j \sum_i x_i^{j+2} \\ & ... & \\ \sum_i x_i^p y_i & = & \sum_{j=0}^{p} a_j \sum_i x_i^{j+p} \end{array}\right.$$

Troisième partie

Trigonométrie

Chapitre 4

Rappels sur les angles

Inutile de rappeler la célèbre valeur de π (mais on va le faire quand même : $\pi = 3,1415926535...$).

Les angles s'expriment de trois manières différentes :
- Degré
- Radian
- Grade

Dans un tour complet de cercle, il y a
- 360 degrés
- 2π radian
- 400 grades

La mesure se fait à partir du coté droit et dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. De par cette définition, l'angle correspondant au point le plus en haut du cercle trigonométrique est donc égal à 90^o ou 100 grades ou $\frac{\pi}{2}$ radian.

Formules de conversion des angles

Angle en radian	=	π * (angle en degré) / 180
Angle en radian	=	π * (angle en grade) / 200
Angle en grade	=	200 * (angle en degré) / 180
Angle en grade	=	200 * (angle en radian) / π
Angle en degré	=	180 * (angle en radian) / π
Angle en degré	=	180 * (angle en grade) / 200

Considérons maintenant un triangle rectangle inclut dans le cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$. On a la longueur de l'hypothénuse r, la base du triangle x, le coté opposé du triangle y.

Définitions :
- $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ (le sinus est égal à la division du coté opposé par l'hypoténuse).
- $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ (le cosinus est égal à la division de la base par l'hypoténuse).

- $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ (la tangente est égale à la division du coté opposé par la base).
- $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\alpha}$ (la cotangente est l'inverse de la tangente, donc égale à la division de la base par le coté opposé).
- $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ (la sécante est l'inverse du cosinus).
- $\text{cosec }\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ (la cosécante est l'inverse du sinus).

De ces définitions, on peut déduire

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad r^2\sin^2\alpha + r^2\cos^2\alpha = r^2 \quad \text{(Pythagore)}$$

Dans les exemples qui suivent, on prendra comme rayon l'unité ($r = 1$).

Prenons la diagonale d'un carré inclus dans un cercle. Cette diagonale représente l'hypoténuse du carré (ou le rayon du cercle). Dans un carré, les côtés étant égaux et l'angle α égal à 45^o, on peut poser $r = 2x^2 = 2y^2$. Avec un rayon r égal à 1, cela donne $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La tangente étant le côté opposé sur la base, les deux côtés étant égaux, d'où : $\tan 45^o = 1$. L'inverse (la cotangente) est par définition aussi égale à 1.

Dans un triangle équilatéral, les angles sont donc tous égaux à 60^o. Avec un triangle rectangle appliqué dans ce triangle équilatéral, on peut avoir une base égale à la moitié du côté opposé.

Le triangle équilatéral appliqué à un cercle ayant comme rayon l'unité donne un cosinus égal à $1/2$.

Pour $\alpha = 60^o$ et avec $x^2 + y^2 = 1$ (Pythagore), on a $\cos^2 60^o + \sin^2 60^o = 1$ et $\sin^2 60^o = 1 - \cos^2 60^o$. Avec $\cos 60^o = \frac{1}{2}$, cela donne $\sin^2 60^o = 1 - (\frac{1}{2})^2 = 1 - 1/4 = 3/4$. D'où, $\tan 60^o = \frac{\sin 60^o}{\cos 60^o} = \sqrt{3}$

De la même manière, on montre que

$$\sin 30^o = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \tan 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Récapitulatif

α (^{o})	α (rad)	cos	sin	tan	cot
0	0	1	0	0	$\nexists$
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\nexists$	0
180^o	π	-1	0	0	$\nexists$
270^o	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	$\nexists$	0

Par définition la tangente de 90^o est logiquement $\frac{1}{0}$. Mais comme la division par zéro est impossible, il n'y a donc pas de $\tan 90^o$. $\tan 90^o$ serait égale à l'infini. (Idem pour $\cot 0^o$.)

Chapitre 5

Formules trigonométriques

Angles associés

$$\begin{array}{ccc}
\cos(-x) = \cos x & \sin(-x) = -\sin x & \tan(-x) = -\tan x \\
\cos(\pi - x) = -\cos x & \sin(\pi - x) = \sin x & \tan(\pi - x) = -\tan x \\
\cos(\pi + x) = -\cos x & \sin(\pi + x) = -\sin(\pi + x) & \tan(\pi + x) = \tan x \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x
\end{array}$$

Formules fondamentales

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \qquad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

Formules d'addition : on démontre en général ces formules à l'aide de constructions géométriques dans le cercle trigonométrique (démonstrations laissées en exercice).

$$\begin{array}{ll}
\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a & \\
\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a & \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\
\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \\
\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b &
\end{array}$$

Formules de duplication

$$\begin{array}{lclclcl}
\sin 2a & = & 2 \sin a \cos a & & & & \\
\cos 2a & = & \cos^2 a - \sin^2 a & = & 2\cos^2 a - 1 & = & 1 - 2\sin^2 a \\
\tan 2a & = & \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} & & & &
\end{array}$$

Formules de Carnot (linéarisation)

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \qquad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + cos 2a}$$

Formules de Simpson

$$\begin{array}{lcllcl}
\sin p + \sin q & = & 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & & & \\
\sin p - \sin q & = & 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} & \tan p + \tan q & = & \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \\
\cos p + \cos q & = & 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & \tan p - \tan q & = & \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q} \\
\cos p - \cos q & = & 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} & & &
\end{array}$$

Formules de Simpson inverses

$$\begin{aligned}
\sin a \cos b &= \tfrac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b)) \\
\cos a \cos b &= \tfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b)) \\
\sin a \sin b &= -\tfrac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))
\end{aligned}$$

Formules en $\tan \frac{a}{2}$

$$\sin a = \tfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \qquad \cos a = \tfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \qquad \tan a = \tfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$$

Relations d'arc triple

$$\begin{array}{c} \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \\ \cos 3a = -3\cos a + 4\cos^3 a \end{array} \qquad \tan 3a = \tfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$$

Relations d'arc quadruple

$$\begin{array}{c} \sin 4a = 4\cos a \sin a - 8\cos a \sin^3 a \\ \cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1 \end{array} \qquad \tan 4a = \tfrac{4\tan a - 4\tan^3 a}{1-6\tan^2 a + \tan^4 a}$$

Formules de linéarisation de degré 3

$$\begin{aligned} \sin^3 a &= \tfrac{3\sin a - \sin 3a}{4} \\ \cos^3 a &= \tfrac{3\cos a + \cos 3a}{4} \end{aligned} \qquad \tan^3 a = \tfrac{3\sin a - \sin 3a}{3\cos a + \cos 3a}$$

Factorisation de $a\cos\alpha + b\sin\alpha$

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \tfrac{a\cos(\alpha-\phi)}{\cos\phi} \quad \text{et} \quad \tan\phi = \tfrac{b}{a}$$

Chapitre 6

Equations et inéquations trigonométriques

6.1 Fonctions réciproques

Les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives. En les restreignant à certains intervalles, les fonctions trigonométriques réalisent des bijections. Les applications réciproques (arcsin, arccos, arctan, arccosec, arcsec et arccot) sont habituellement définies par

- pour tous réels x et y tels que $-1 \leq x \leq 1, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$,
  $y = \arcsin(x)$ si et seulement si $x = \sin(y)$

- pour tous réels x et y tels que $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$,
  $y = \arccos(x)$ si et seulement si $x = \cos(y)$

- pour x réel quelconque et y tel que $-\pi/2 < y < \pi/2$,
  $y = \arctan(x)$ si et seulement si $x = \tan(y)$

- pour tous réels x et y tels que $0 < y < \pi$,
  $y = \operatorname{arccot}(x)$ si et seulement si $x = \cot(y)$

Ces fonctions peuvent s'écrire sous forme d'intégrales indéfinies :

$$\begin{array}{cc} \arcsin(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & \arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ \arccos(x) = \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & \operatorname{arccot}(x) = \int -\frac{1}{1+x^2} dx \end{array}$$

Egalités pratiques :

$$\begin{array}{ccc} \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} & \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} & \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{array}$$

Quatrième partie

Analyse

Chapitre 7

Préliminaires

7.1 Premières notions

7.1.1 Le concept de fonction

On peut voir une fonction comme une « transformation » de certains objets en d'autres objets. Ainsi, il y a des fonctions qui transforment des nombres en nombres (par exemple les polynômes, les fonctions trigonométriques, ...), des fonctions qui transforment des points en points (par exemple les rotations, translations, homothéties, ...), des fonctions qui transforment des formes géométriques en nombres (par exemple la longueur d'un segment, l'aire délimitée par un polygone, ...).

définition : Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments décrite de façon telle que pour tout objet, on sache sans ambiguïté s'il appartient ou n'appartient pas à l'ensemble

Un ensemble peut être vu comme une sorte de sac virtuel entourant ses éléments. Les éléments peuvent être de n'importe quelle nature : nombres, points géométriques, droites, fonctions, autres ensembles, etc. On donne donc volontiers des exemples d'ensembles en dehors du monde mathématique. Par exemple, lundi est un élément de l'ensemble des jours de la semaine, et 4 est un élément de l'ensemble des nombres entiers, ainsi que de l'ensemble des nombres pairs (forcément entiers). Ces deux derniers ensembles sont infinis, ils ont une infinité d'éléments.

définition : Soient A et B deux ensembles. Une fonction de A dans B est un ensemble de couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$, parmi lesquels on ne trouve pas deux couples ayant la même origine et des extrémités différentes.

Autrement dit, une fonction est une règle qui, à tout élément d'un ensemble de départ A fait correspondre un et un seul élément d'un ensemble d'arrivée B.

Les couples d'une fonction sont représentés, dans un graphe, par des flèches.

notation : Soit f une fonction de A dans B. On note $f(x)$ ou, plus formellement

$$f : A \to B : x \to f(x)$$

Si $(a, b) \in f$, alors $b =$ image de a par $f = f(a)$. $f(a)$ est l'élément de B que f associe à l'élément $a \in A$.

7.1.2 Graphiques

définition : Le graphique $graph(f)$ de la fonction f est l'ensemble des points du plan π, muni du repère $(O, \vec{1_x}, \vec{1_y})$, de coordonnée $(x, f(x))$

Soit $F = graph(f)$ le graphique de f. On a

$$P(x, y) \in F \Leftrightarrow y = f(x)$$

Si le graphique d'une fonction est une ligne ou la réunion de plusieurs lignes courbes, ce graphique est la courbe d'équation y telle que $F \equiv y = f(x)$

Remarquons que dans le plan π, toute verticale rencontre le graphique d'une fonction en 1 point au plus.

7.1.3 Zéros d'une fonction

définition : Le zéro (ou racine) d'une fonction est tout réel dont l'image par cette fonction est 0.

$$\begin{array}{rcc} x_0 = \text{zéro de } f & \Leftrightarrow & f(x_0) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x_0 \text{ est solution de } f(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x_0 = \text{abscisse de } F \cap O_x = \{P(x_0, 0)\} \end{array}$$

7.1.4 Domaine d'une fonction

$$\begin{array}{rccc} f(x) : x \rightarrow & x^3 - 3x - 1 & \text{définie} & \forall x \in R \\ g(x) : x \rightarrow & \frac{x+1}{x-3} & \text{définie} & \forall x \in R \setminus \{3\} \\ h(x) : x \rightarrow & \sqrt{x+4} & \text{définie} & \forall x \in [-4, +\infty[\end{array}$$

définition : Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x qui admettent une image $f(x)$.

définition $\Leftrightarrow$: Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est un réel.

On note $dom\ f = \{x \in R : f(x) \in R\}$

La notion de domaine introduit les conditions d'existence.

$$\begin{array}{rccc} f(x) : x \rightarrow & N(x)/D(x) & \text{possède la condition d'existence} & D(x) \neq 0 \\ g(x) : x \rightarrow & \sqrt{R(x)} & \text{possède la condition d'existence} & R(x) \geq 0 \end{array}$$

par conséquent

$$\begin{array}{rccc} h(x) : x \rightarrow & 1/\sqrt{R'(x)} & \text{possède la condition d'existence} & R'(x) > 0 \end{array}$$

7.1.5 Ensemble image d'une fonction

définition : L'ensemble-image d'une fonction f de R dans R est l'ensemble des images $f(x)$ générées par cette fonction lorsque x en parcourt le domaine de définition.

On note $Im\ f = \{f(x) : x \in dom\ f\}$

$$\begin{array}{rcc} r \in Im\ f & \Leftrightarrow & \exists\ x_0 \in dom\ f : f(x_0) = r \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe au moins un point de } graph(f) \text{ ayant } r \text{ comme ordonnée} \end{array}$$

7.1.6 Parité d'une fonction

Une fonction f est paire si et seulement si

$$\forall x \in dom\ f,\ f(-x) = f(x)$$

Autrement dit, le graphique de f est symétrique par rapport à l'axe Oy.

Une fonction f est impaire si et seulement si

$$\forall x \in dom\ f,\ f(-x) = -f(x)$$

Autrement dit, le graphique de f est symétrique par rapport à l'origine O.

7.1.7 Autres éléments de symétrie d'un graphique de fonction

Soit f_p une fonction et C_p^f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

C_p^f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si et seulement si quel que soit x tel que $a + x$ et $a - x$ appartiennent au domaine de f, $f_p(a + x) = f_p(a - x)$.

Ceci équivaut à dire que $f_p(a + x)$ est une fonction paire.

Soit f_i une fonction et C_i^f sa courbe représentative dans un repère quelconque.

C_i^f admet le point $P(a, b)$ comme centre de symétrie si et seulement si quel que soit x tel que $a + x$ et $a - x$ appartiennent au domaine de f, $f_i(a + x) + f_i(a - x) = 2b$.

Ceci traduit le fait que b est la moyenne de $f_i(a + x)$ et de $f_i(a - x)$.

Démononstration : soit $a = \frac{x+x'}{2}$ et $b = \frac{f(x)-f(x')}{2}$. On a que $x' = 2a - x$ et donc $b = \frac{f(x)-f(2a-x)}{2}$.

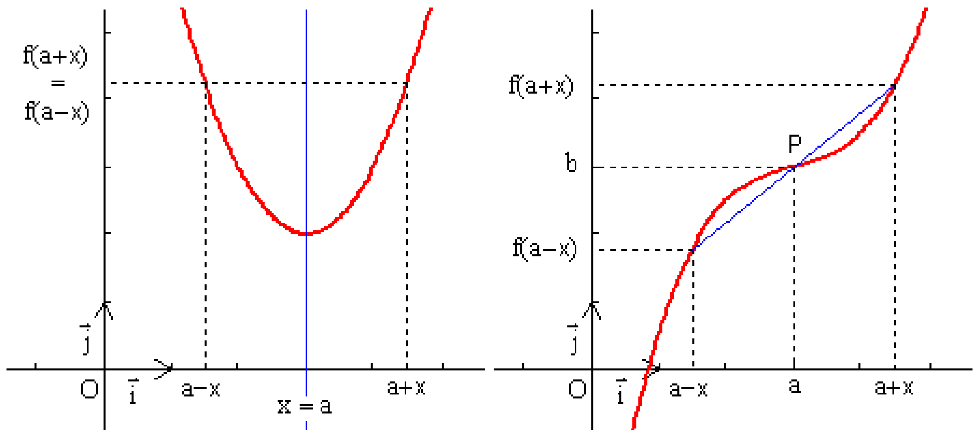


FIG. 7.1 – Elements de symétrie d'une fonction. A gauche, fonction paire. A droite, fonction impaire

7.1.8 Translations de fonctions élémentaires

$$y = f(x - a) + b$$

est la fonction $y_0 = f(x)$ translatée d'un vecteur (a, b).

7.1.9 Affinités de fonctions élémentaires

$$y = k\ f(k'x)$$

est la fonction $y_0 = f(x)$ étirée respectivement d'un facteur $\frac{1}{k'}$ selon Ox et k selon Oy.

7.1.10 Fonctions périodiques

Soit f une fonction, *dom* f son ensemble de définition, T un réel. f est T-périodique si et seulement si $\forall x \in dom\ f$, $f(x + T) = f(x)$.

Si f est T-périodique, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, f est nT-périodique. La réciproque est fausse.

7.2 Classification de fonctions

7.2.1 Fonctions constantes

Une fonction constante est de la forme $x \to C$ $(C \in \mathbb{R})$. Son graphique est la droite horizontale d d'équation

$$d \equiv y = C$$

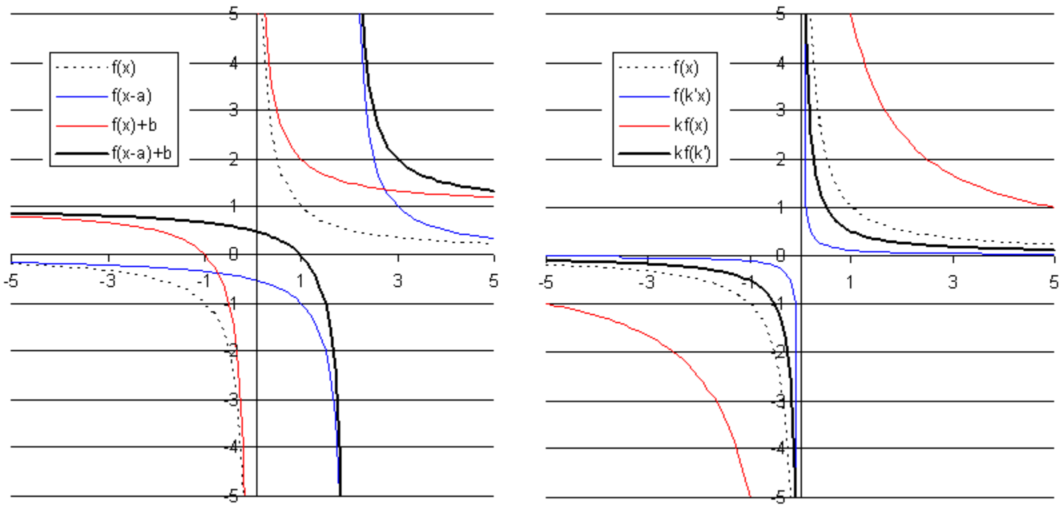


FIG. 7.2 – Translations (à gauche) pour $(a, b) = (2, 1)$ et affinités (à droite) pour $(k, k') = (5, 10)$ de la fonction $y = \frac{1}{x}$

La fonction nulle, qui est la fonction constante particulière $x \to 0$ ($C = 0$), a comme graphique la droite qui supporte l'axe des abscisses :

$$Ox \equiv y = 0$$

7.2.2 Fonctions puissances à exposant naturel

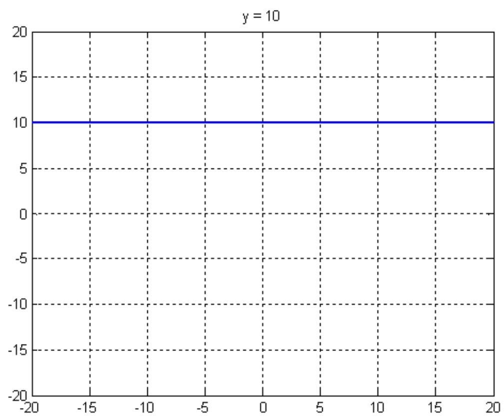
Une fonction puissance à exposant naturel est de la forme $x \to x^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$. Son graphique est la courbe d'équation

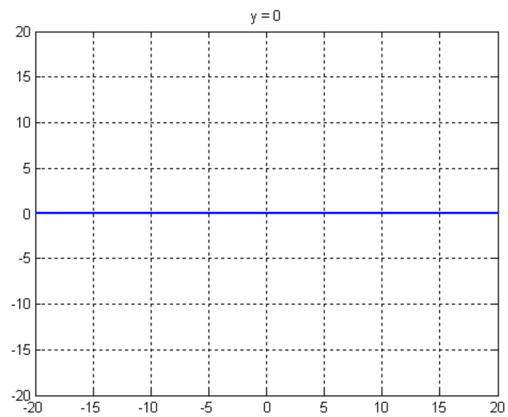
$$y = x^n$$

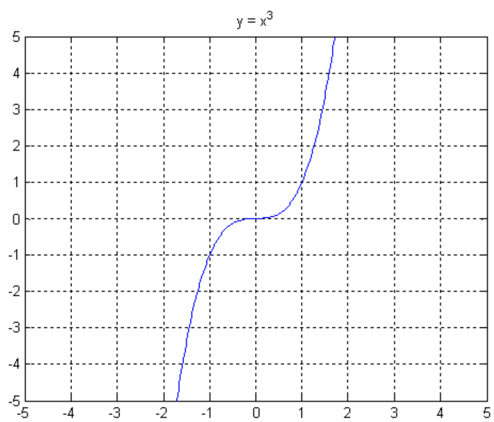
La fonction identique est définie pour $n = 1$. Il s'agit de la fonction $x \to x$ dont le graphique $y = x$ est la bissectrice des axes Ox et Oy passant par les $1^e r$ et $3^e me$ quadrants.

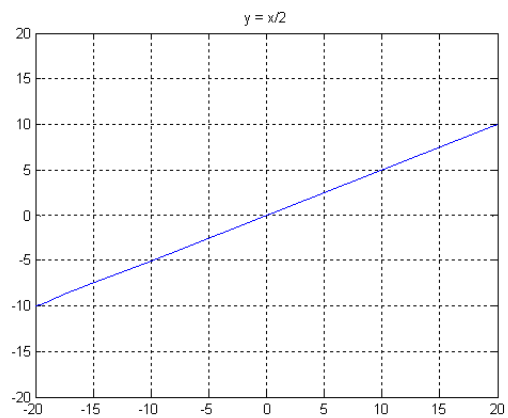
La fonction carré est définie pour $n = 2$. Il s'agit de la fonction $x \to x^2$ dont le graphique $y = x^2$ est une parabole d'axe Oy et de sommet O.

La fonction cube est définie pour $n = 3$. Il s'agit de la fonction $x \to x^3$ dont le graphique $y = x^3$ est une cubique passant par 0.









7.2.3 Fonctions linéaires

Une fonction linéaire est de la forme $x \to mx$ où $m \in \mathbb{R}$ est le coefficient angulaire de la fonction. Son graphique est la droite d'équation

$$y = mx$$

qui comprend l'origine O du repère et m comme coefficient angulaire. Remarquons que les fonctions $x \to 0$ et $x \to x$ correspondent respectivement à des coefficients angulaires $m = 0$ et $m = 1$.

Selon que m est < 0 ou > 0, la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proriétés : On a $f(kx + k'x') = m(kx + k'x') = mkx + mk'x' = k(mx) + k'(mx') = kf(x) + k'f(x')$, donc

$$f(kx + k'x') = kf(x) + k'f(x')$$

7.2.4 Fonctions du 1^{er} degré (affines)

Une fonction du $1^e r$ degré (ou fonction affine) est de la forme $x \to mx + p$ où $m \in \mathbb{R}_0$ est le coefficient angulaire de la fonction et $p \in \mathbb{R}$ le terme indépendant. Son graphique est la droite non parallèle à Ox ou Oy, de coefficient angulaire m et passant par le point $(0, p)$, d'équation

$$y = mx + p$$

Ici aussi, selon que m est < 0 ou > 0, la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante.

7.2.5 Fonctions du 2^e degré

Une fonction du $2^e me$ degré est de la forme $x \to ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R}_0$, $b, c \in \mathbb{R}$). Son graphique est la parabole d'équation

$$y = ax^2 + bx + c$$

l'axe de cette parabole a pour équation $x = \frac{-b}{2a}$ et son sommet est le point

$$S \equiv \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

L'extremum en S est respectivement un minimum ou un maximum selon que a est > 0 ou < 0. (On peut démontrer que $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$, où $\Delta = b^2 - 4ac$.

7.2.6 Fonctions polynômes

Une fonction polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}$) est de la forme $x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, avec $a_n \in \mathbb{R}_0$ et $a_{n-1}, ...a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Son graphique est la courbe d'équation

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Les fonctions précédentes sont toutes des fonctions polynômes. Les fonctions constantes sont de degré zéro. La fonction nulle est intégrée dans les fonctions polynômes, mais son degré n'est pas défini.

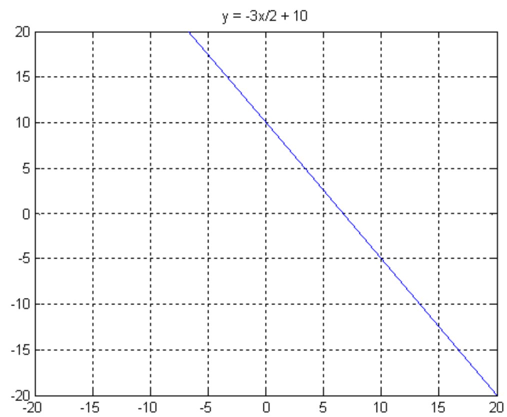
7.2.7 Fonctions puissance à exposant entier ≤ 0

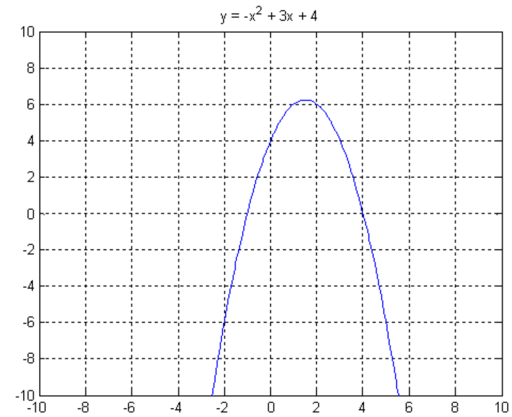
Une fonction puissance à exposant naturel strictement négatif est de la forme $x \to x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}_0$. Son graphique est la courbe d'équation

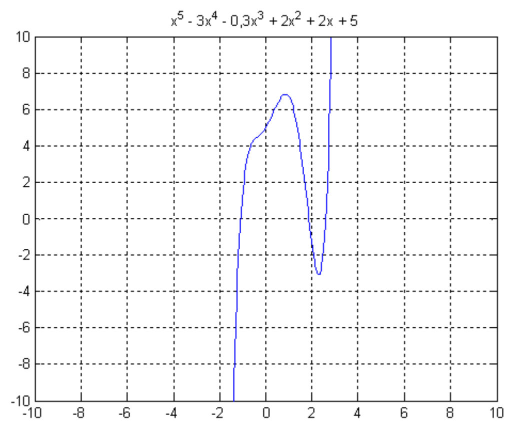
$$y = \frac{1}{x^n}$$

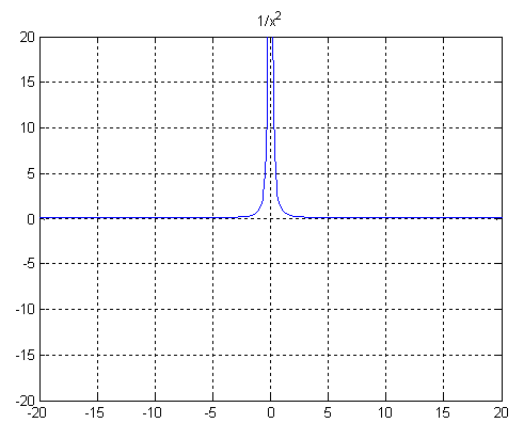
La fonction inverse est définie pour $n = 1$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{-1}$ dont le graphique $y = \frac{1}{x}$ est l'hyperbole équilatère d'asymptotes Ox et Oy et de centre O.

La fonction inverse carré est définie pour $n = 2$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{-2}$ dont le graphique est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^2}$.









La fonction inverse cube est définie pour $n = 3$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{-3}$ dont le graphique est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^3}$.

7.2.8 Fonctions homographiques

Une fonction homographique est de la forme $x \to \frac{ax+b}{a'x+b'}$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R},\ ab' - a'b \neq 0)$. Son graphique est une hyperbole équilatère d'équation

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

On peut toujours transformer une fonction homomorphe en une transformation de la fonction $y = \frac{1}{x}$. On a $\frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{A}{a'x+b'} + B = \frac{A+B(a'x+b')}{a'x+b'} = \frac{Ba'x+Bb'+A}{a'x+b'}$ d'où,

$$\begin{array}{cc} Ba' = a & B = \frac{a}{a'} \\ Bb' + A = b & A = \frac{a'b-ab'}{a'} \end{array}$$

donc,

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{\frac{ab'-a'b}{a'}}{a'x+b} + \frac{a}{a'}$$

Par exemple, $\frac{x+2}{2x-3} = \frac{7/2}{2x-3} + \frac{1}{2}$.

7.2.9 Fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle est un quotient de polynômes. Son graphique est la courbe d'équation

$$y = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}$$

avec $a_n, a_m \in \mathbb{R}_0$, $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \neq n, m$.

Toutes les fonctions précédentes sont des fonctions rationnelles.

7.2.10 Fonctions puissance à exposant rationnel non entier

Une fonction puissance à exposant rationnel non entier est de la forme $x \to x^r$ $(r \in \mathbb{Q}_0 \backslash \mathbb{Z}$. Son graphique est la courbe d'équation

$$y = x^{\frac{n}{m}}$$

avec $n, m \in \mathbb{Z}_0$ et $\frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}$

La fonction racine carrée est définie pour $n = 2$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{\frac{1}{2}}$ dont le graphique est la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.

La fonction racine cubique est définie pour $n = 3$. Il s'agit de la fonction $x \to x^{\frac{1}{3}}$ dont le graphique est la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{x}$.

Remarquons que, bien que nous ne fassions pas la différence dans ce cours, de manière rigoureuse, les fonctions $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$ et $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ sont différentes car $x^{\frac{1}{n}}$ ne sont définies que pour des $x > 0$. Autrement dit, $dom\ f_1 = \mathbb{R}_0 \neq dom\ f_2 = \mathbb{R}$.

7.2.11 Fonctions irrationnelles

Les fonctions irrationnelles sont des fonctions construites avec des fonctions polynômes, lesquelles se trouvent sous des radicaux.

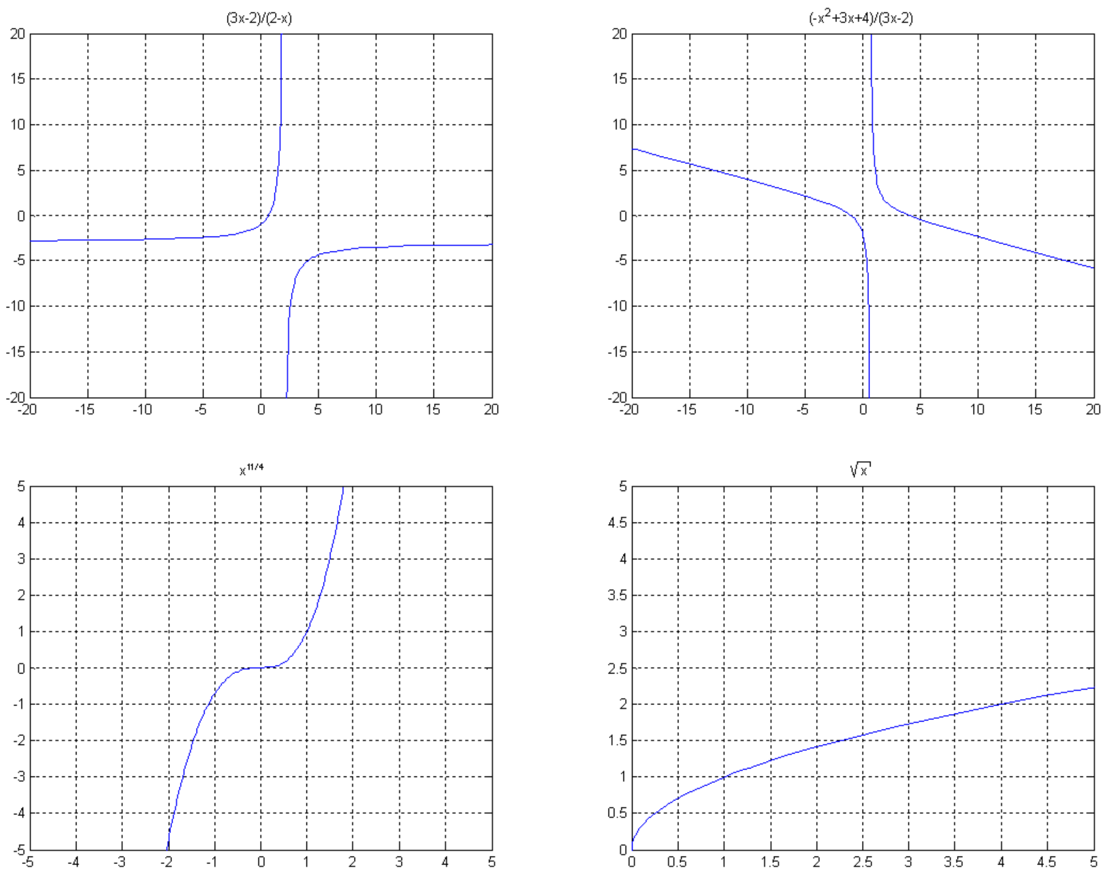
Exemple : $x \to \sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)} + 3\frac{\sqrt{(x-3)(x+1)(x+2)(x+4)}}{x^2+1}$

7.2.12 Fonctions valeur absolue

Une fonction valeur absolue est de la forme $x \to |x|$. Son graphique est représenté par la courbe d'équation

$$y = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

qui est composée des deux demi-droites d'équation $y = -x$ pour $x < 0$ et $y = x$ pour $x > 0$.


(3x-2)/(2-x)
(-x^2+3x+4)/(3x-2)
x^{11/4}
√x

Remarquons qu'il s'agit d'une fonction irrationnelle car on a $|x| = \sqrt{x^2}$.

7.2.13 Fonctions algébriques

Une fonction algébrique est une fonction rationnnelle ou irrationnelle, c'est-à-dire toutes les fonctions précédentes.

7.2.14 Fonctions partie entière et partie décimale

La fonction partie entière est la fonction qui, à tout réel x, associe le plus grand des nombres entiers $\geq x : x \rightarrow [x]$. Autrement dit, pour $x \in [k, k+1[$ $(k \in \mathbb{Z})$, on a $[x] = k$.

Son graphique est la courbe d'équation

$$y = [x]$$

qui est une courbe en escalier.

La fonction partie décimale est la fonction $x \rightarrow x - [x] = \lfloor x \rfloor$. Autrement dit, pour $x \in [k, k+1[$ $(k \in \mathbb{Z})$, on a $\lfloor x \rfloor = x - k$.

Son graphique est la courbe d'équation

$$y = \lfloor x \rfloor$$

qui est une courbe en dents de peigne.

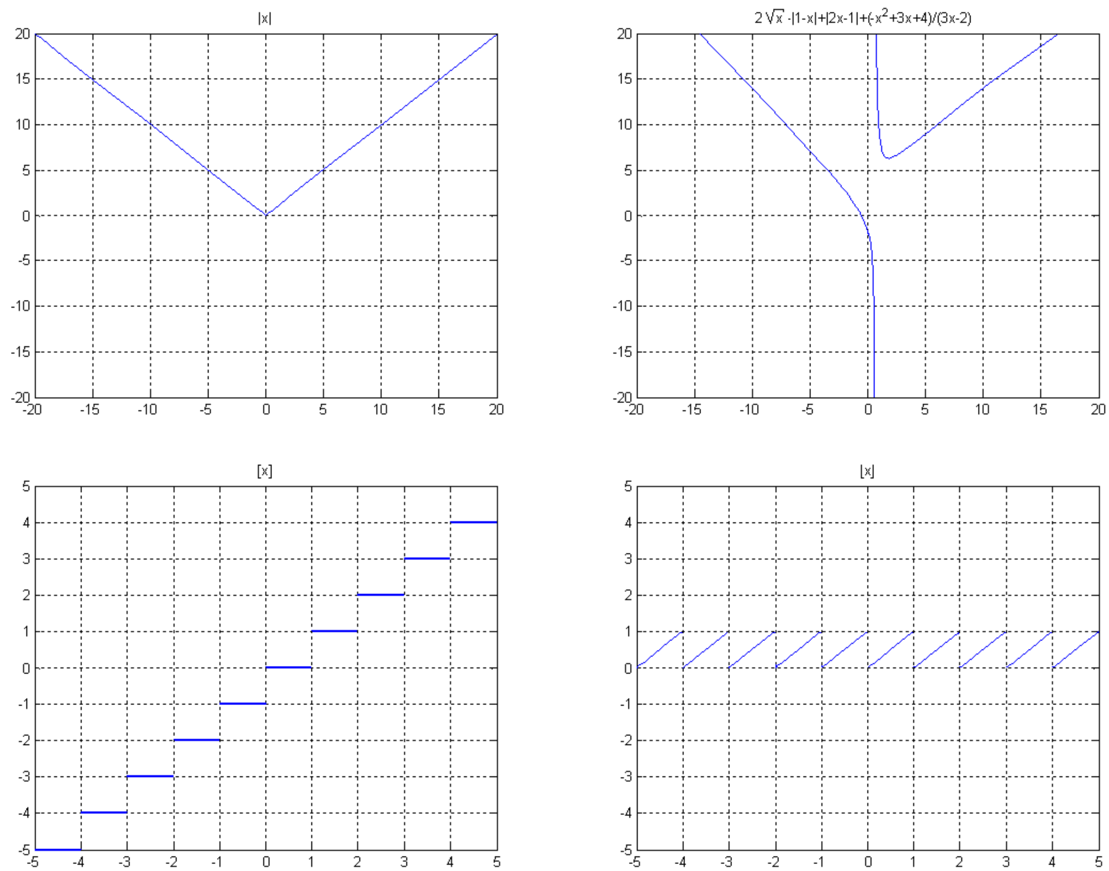
7.2.15 Fonctions définies par intervalles

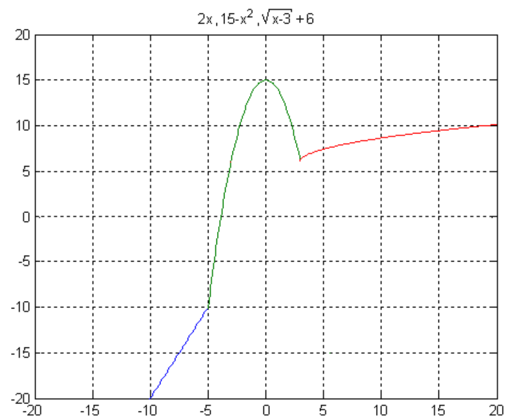
$$y = \begin{cases} f_1(x) \text{ avec } x_1 \leq x < x'_1 \\ f_2(x) \text{ avec } x_2 \leq x < x'_2 \\ \quad\quad ... \\ f_n(x) \text{ avec } x_n \leq x < x'_n \end{cases} \quad \text{avec } x_1 \leq x'_1 \leq x_2 \leq x'_2 \leq ... \leq x_n \leq x'_n$$

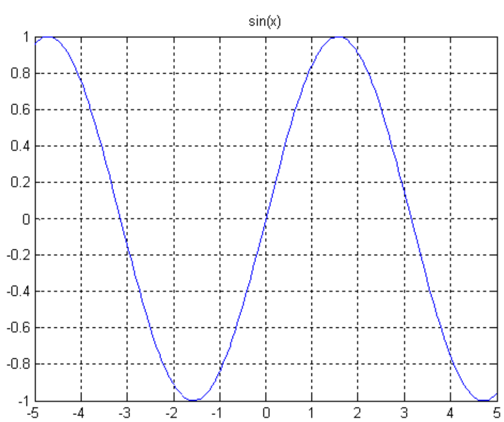
Exemple :

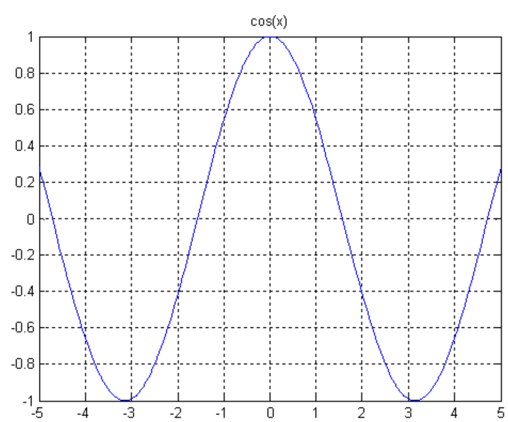
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} & x < -5 \\ 15 - x^2 & \text{si} & -5 \geq x \geq 3 \\ \sqrt{x-3} + 6 & \text{si} & x > 3 \end{cases}$$

Le calcul sera différent selon que $x \in]-\infty, -5[$, $x \in [-5, 3]$ ou $x \in]3, +\infty[$.


|x|
2 √x -|1-x|+|2x-1|+(-x^2+3x+4)/(3x-2)
[x]
⌊x⌉







7.2.16 Fonctions trigonométriques

La fonction sinus est la fonction $x \to \sin x$. Sa courbe est une sinusoïde de période 2π et d'équation

$$y = \sin x$$

La fonction cosinus est la fonction $x \to \cos x$. Sa courbe est une sinusoïde de période 2π, traanslatée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche par rapport au sinus et d'équation

$$y = \cos x$$

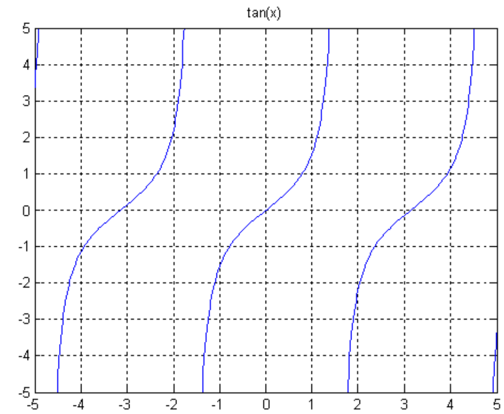
La fonction tangente est la fonction $x \to \tan x$. Sa courbe présente une période π, des asymptotes en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et l'équation

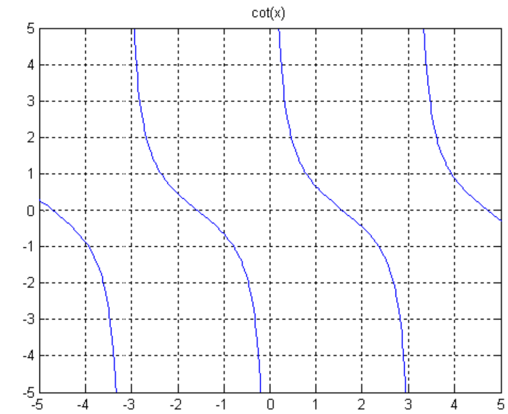
$$y = \tan x$$

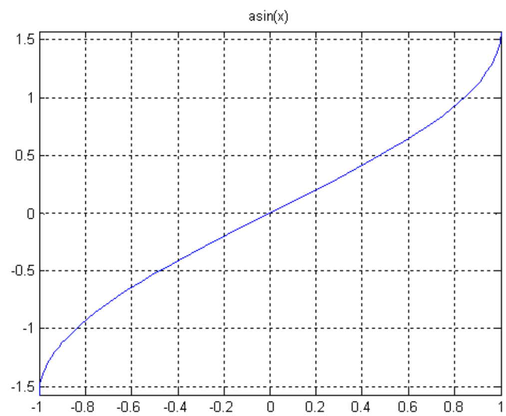
La fonction cotangente est la fonction $x \to \cot x$. Sa courbe présente une période π, des asymptotes en $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et l'équation

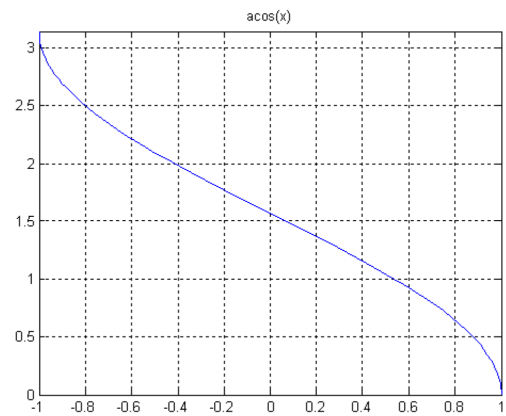
$$y = \cot x$$

La fonction sécante est l'inverse du cosinus : $x \to \frac{1}{\cos x}$ (période 2π, asymptotes en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$).









La fonction cosécante est l'inverse du sinus : $x \rightarrow \frac{1}{\sin x}$ (période 2π, asymptotes en $x = k\pi$).

Les autres fonctions trigonométriques sont une composition de fonctions trigonométriques élémentaires.

7.2.17 Fonctions trigonométriques inverses

La fonction arcsinus est la fonction réciproque de la fonction sinus. Sa courbe a comme équation

$$y = \arcsin x$$

Elle est définie pour $x \in [0, \pi] = dom$ arcsin et $y \in [-1, 1] = Im$ arcsin.

La fonction arccosinus est la fonction réciproque de la fonction cosinus. Sa courbe a comme équation

$$y = \arccos x$$

Elle est définie pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = dom$ arccos et $y \in [-1, 1] = Im$ arccos.

La fonction arctangente est la fonction réciproque de la fonction tangente. Sa courbe a comme équation

$$y = \arctan x$$

Elle est définie pour $x \in [-\infty, +\infty] = dom$ arctan et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = Im$ arctan.

La fonction arccotangente est la fonction réciproque de la fonction cotangente. Sa courbe a comme équation

$$y = \text{arccot } x$$

Elle est définie pour $x \in [-\infty, +\infty] = dom$ arccot et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} = Im$ arccot.

7.2.18 Fonctions mixtes

Une fonction mixte est une fonction composée d'une fonctions trigonométrique et algébrique.

Exemple : la fonction sinus cardinal $x \to \text{sinc}(x)$. Sa courbe a comme équation

$$x = \frac{\sin x}{x}$$

Cette fonction très connue est utilisée en optique, notamment.

La fonction $y = x \cos x$ est un autre exemple de fonction mixte.

7.2.19 Fonctions exponentielles

La fonction exponentielle (népérienne) est la fonction telle que $x \to e^x$ où $e \approx 2,71828$. Sa courbe a comme équation

$$y = e^x$$

Une fonction exponentielle est une fonction telle que $x \to a^x$ avec $a \in \mathbb{R}_0^+$. Sa courbe a comme équation

$$y = a^x$$

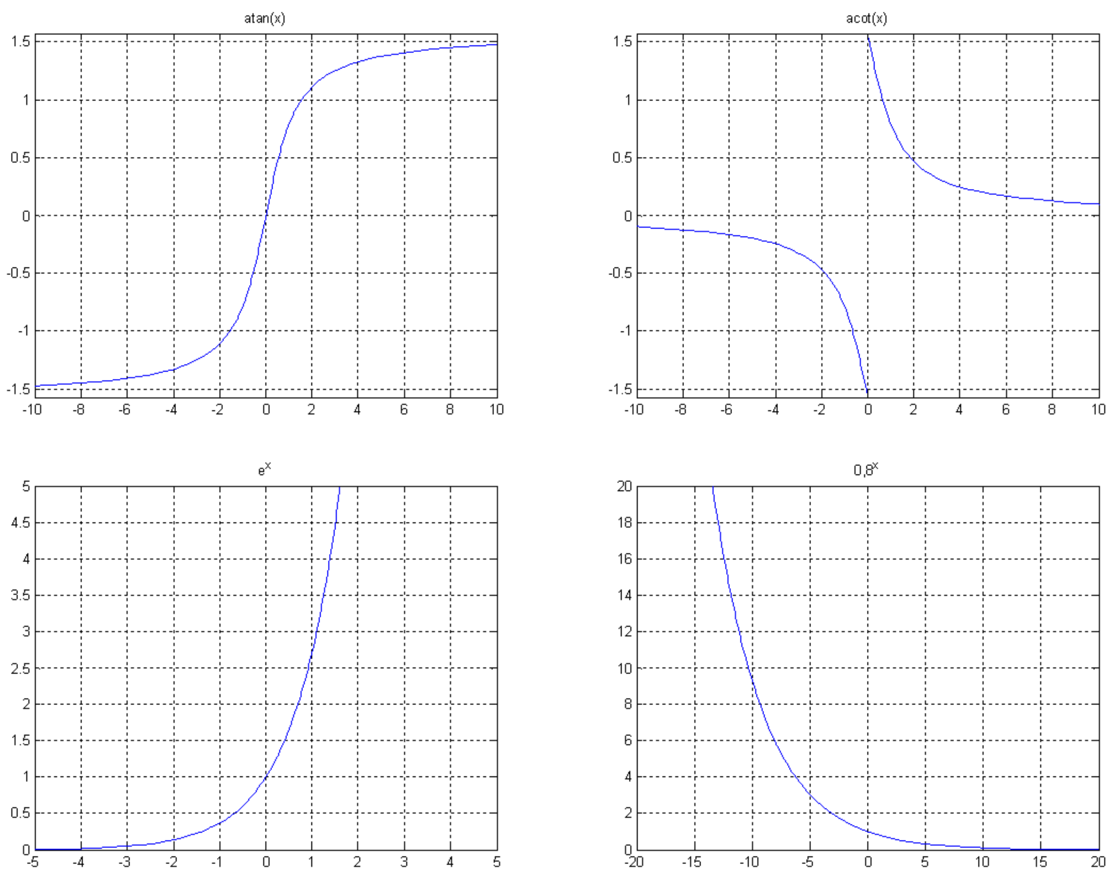
7.2.20 Fonctions logarithmiques

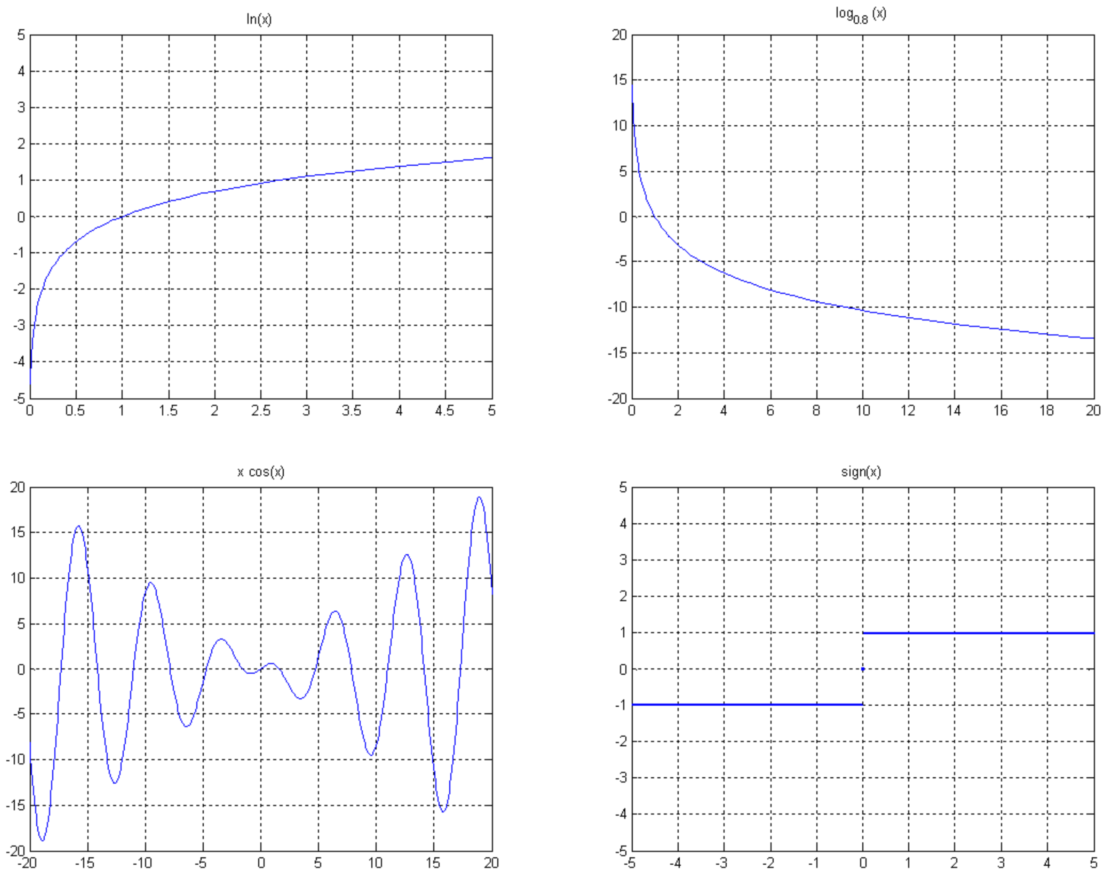
La fonction logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle (népérienne). Elle est telle que $x \to \ln x$. Sa courbe a comme équation

$$y = \ln x$$

Une fonction logarithme est la réciproque de la fonction exponentielle a^x. Elle est telle que $x \to \ln x$. Sa courbe a comme équation

$$y = \log_a x$$


atan(x)
acot(x)
e^x
0,8^x



7.2.21 Fonction signature

La fonction signature est la fonction qui, à un réel, lui associe son signe. Elle est telle que $x \rightarrow \text{sign}(x)$. Sa courbe a comme équation

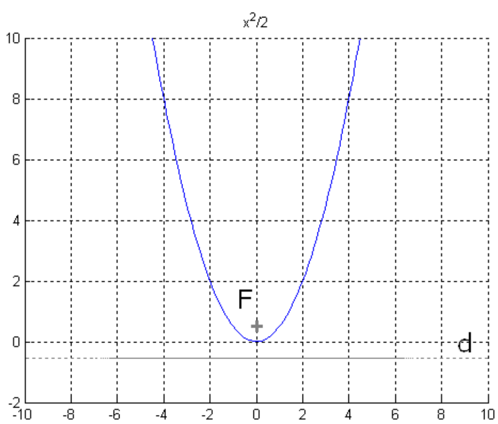
$$y = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

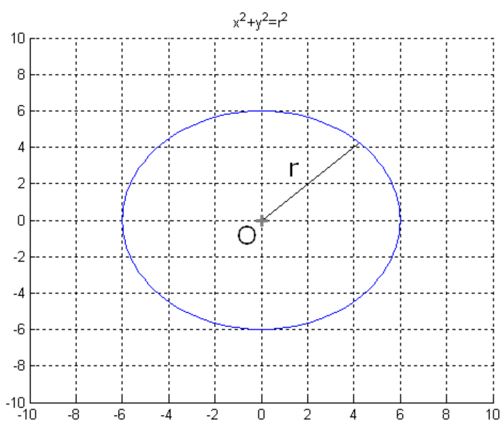
Chapitre 8

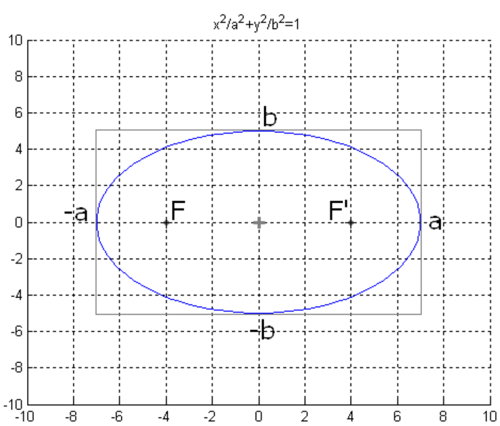
Coniques

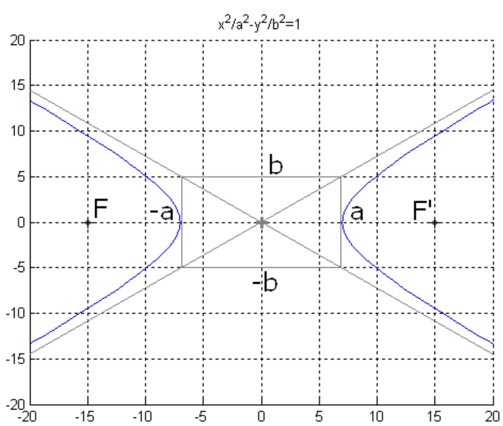
8.1 Lieux géométriques

Lors de ce chapitre, nous allons voir qu'un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole correspondent à des problèmes géométriques bien concrets, traduits mathématiquement en une équation.









La mise en équation d'un problème géométrique nécessite d'introduire les lieux géométriques.

En guise d'introduction, recherchons le lieu géométrique des points situés à la même distance de deux points.

Exprimer ce lieu géométrique (c'est-à-dire un ensemble de points de l'espace ou du plan) sous forme d'une équation se fait en considérant la définition de la norme d'un vecteur $\vec{AB}$ (ou la distance entre 2 points A et B) dans un repère cartésien. On a

$$|AB| = ||\vec{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Plaçons l'axe Ox selon la droite AB joignant les deux points considérés. Plaçons l'axe Oy selon une perpendiculaire à cette droite AB. Soit le point O, le milieu du segment $[AB]$. (Nous pouvons déjà dire que le point O appartient au lieu géométrique car ce point est situé à la même distance de A et de B.)

Les coordonnées des points A et B s'expriment respectivement, avec ce système d'axes, selon $A \equiv (-\frac{d}{2}, 0)$ et $B \equiv (\frac{d}{2}, 0)$.

Soit un point $P \equiv (x, y)$ quelconque. Si P appartient au lieu géométrique, on a que

$$|PA| = |PB|$$

Autrement dit,

$$\begin{array}{ccc} ||\vec{AP}|| & = & ||\vec{BP}|| \\ \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} & = & \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \\ \sqrt{(x + \frac{d}{2})^2 + y^2} & = & \sqrt{(x - \frac{d}{2})^2 + y^2} \\ (x + \frac{d}{2})^2 + y^2 & = & (x - \frac{d}{2})^2 + y^2 \\ dx & = & -dx \\ x & = & 0 \end{array}$$

Le lieu géométrique a donc la droite $d \equiv x = 0$ comme équation. Il s'agit bel et bien de la médiatrice du segment $[AB]$ qui est, par définition, le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés A et B.

8.2 Parabole

La parabole est le lieu géométrique des points équidistants d'une droite d et d'un point F (foyer) donnés.

On a $|F, d| = f$. Donc, si Oy est la perpendiculaire à d passant par F et Ox est la parallèle à d telle que $|Ox, d| = \frac{f}{2}$, la droite d a comme équation $d \equiv y = -\frac{f}{2}$ et le foyer F a comme coordonnée $F \equiv (0, \frac{f}{2})$.

Soit un point $P \equiv (x, y)$ quelconque. Sous les conditions ci-dessus, si P appartient au lieu géométrique, on peut écrire

$$\begin{array}{rcl}
|P,d| & = & |PF| \\
|y_P - y_d| & = & \sqrt{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2} \\
y-(-\frac{f}{2}) & = & \sqrt{x^2+(y-\frac{f}{2})^2} \\
(y+\frac{f}{2})^2 & = & x^2+(y-\frac{f}{2})^2 \\
y^2+fy+\frac{f^2}{4} & = & x^2+y^2-fy+\frac{f^2}{4} \\
fy & = & x^2-fy \\
y & = & \frac{x^2}{2f}
\end{array}$$

Dès lors, de manière plus générale, une parabole peut être représentée par la courbe d'équation

$$P \equiv y = ax^2+bx+c$$

Nous avons vu au chapitre précédent que la concavité était donnée par a (vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$), que l'axe s de symétrie nous était donné par $s \equiv x = -\frac{b}{2a}$ et que le sommet avait comme coordonnées $S \equiv (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

8.3 Ellipse

L'ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des distances par rapport à deux points F et F' donnés est constante.

On a $|FF'| = f$. L'axe Ox est placé selon la droite FF' joignant les deux foyers. L'axe Oy est la médiatrice du segment $[FF']$. Soit le point O, le milieu du segment $[FF']$. Le foyers F et F' ont donc comme coordonnées respectives $F \equiv (-\frac{f}{2}, 0)$ et $F' \equiv (\frac{f}{2}, 0)$.

Soit un point $P \equiv (x, y)$ quelconque. Sous les conditions ci-dessus, si P appartient au lieu géométrique, on peut écrire

$$|PF| + |PF'| = k$$

avec $k > f > 0$, il vient

$$\begin{array}{rcl}
|PF| & = & k-|PF'| \\
\sqrt{(x+\frac{f}{2})^2+y^2} & = & k-\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2+y^2} \\
(x+\frac{f}{2})^2+y^2 & = & k^2-2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2+y^2}+(x-\frac{f}{2})^2+y^2 \\
2xf-k^2 & = & -2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2+y^2} \\
2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2+y^2} & = & k^2-2xf \\
4k^2((x-\frac{f}{2})^2+y^2) & = & (k^2-2xf)^2 \\
4k^2x^2-4k^2xf+4k^2f^2+4k^2y^2 & = & k^4-4k^2xf+4x^2f^2 \\
4(k^2-f^2)x^2+4k^2y^2 & = & k^4-4k^2f^2 \\
(k^2-f^2)x^2+k^2y^2 & = & \frac{k^2}{4}(k^2-f^2) \\
\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-f^2} & = & \frac{1}{4}
\end{array}$$

On a bien $k^2 > f^2$. Dès lors, de manière plus générale, une ellipse peut être représentée par la relation

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les constantes a et b sont les demi-grands axes de l'ellipse. Celle-ci, placée dans un repère cartésien, s'inscrit dans un rectangle compris entre les abscisses $x = -a$ et a et les ordonnées $y = -b$ et b.

Cercle

Le cercle est le lieu géométrique des points situés à une distance r d'un point O donné.

Nous pouvons assimiler ce lieu géométrique à une ellipse pour laquelle $F = F'$ (donc $f = 0$) et $k = r$. Nous obtenons donc la relation

$$x^2 + y^2 = r^2$$

qui n'est autre que l'équation d'une ellipse pour laquelle $a = b = r$.

8.4 Hyperbole

L'hyperbole est le lieu géométrique des points dont la différence des distances par rapport à deux points F et F' donnés est constante (et positive).

On a $|FF'| = f$. L'axe Ox est placé selon la droite FF' joignant les deux foyers. L'axe Oy est la médiatrice du segment $[FF']$. Soit le point O, le milieu du segment $[FF']$. Le foyers F et F' ont donc comme coordonnées respectives $F \equiv (-\frac{f}{2}, 0)$ et $F' \equiv (\frac{f}{2}, 0)$.

Soit un point $P \equiv (x, y)$ quelconque. Sous les conditions ci-dessus, si P appartient au lieu géométrique, on peut écrire

$$|PF| - |PF'| = k$$

avec $f > k > 0$, il vient

$$\begin{array}{ccc}
|PF| & = & k + |PF'| \\
\sqrt{(x+\frac{f}{2})^2 + y^2} & = & k + \sqrt{(x-\frac{f}{2})^2 + y^2} \\
(x+\frac{f}{2})^2 + y^2 & = & k^2 + 2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2 + y^2} + (x-\frac{f}{2})^2 + y^2 \\
2xf - k^2 & = & +2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2 + y^2} \\
2k\sqrt{(x-\frac{f}{2})^2 + y^2} & = & 2xf - k^2 \\
4k^2((x-\frac{f}{2})^2 + y^2) & = & (2xf - k^2)^2 \\
4k^2x^2 - 4k^2xf + 4k^2f^2 + 4k^2y^2 & = & k^4 - 4k^2xf + 4x^2f^2 \\
4(k^2 - f^2)x^2 + 4k^2y^2 & = & k^4 - 4k^2f^2 \\
(k^2 - f^2)x^2 + k^2y^2 & = & \frac{k^2}{4}(k^2 - f^2) \\
(f^2 - k^2)x^2 - k^2y^2 & = & \frac{k^2}{4}(f^2 - k^2) \\
\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{f^2 - k^2} & = & \frac{1}{4}
\end{array}$$

On a bien $f^2 > k^2$. Dès lors, de manière plus générale, une hyperbole peut être représentée par la relation

$$H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les constantes a et b nous permettent de tracer l'hyperbole. Les deux asymptotes obliques de celle-ci nous sont données par les droites d'équation $y = \pm\frac{b}{a}$. Les deux branches de l'hyperbole sont respectivement tangentes aux droites verticales d'abscisse $x = -a$ et a.

8.5 Sections d'un cône par un plan

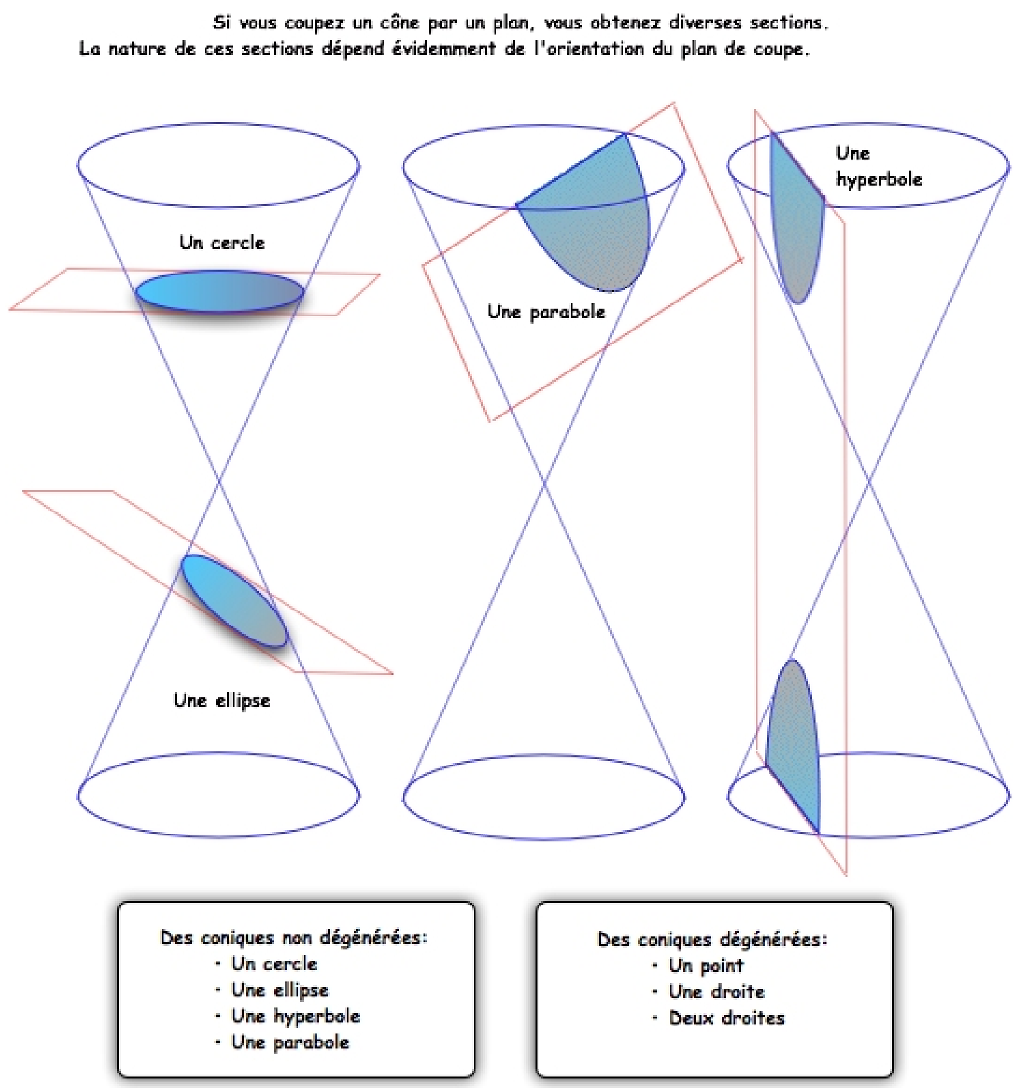


FIG. 8.1 – Section d'un cone par un plan.

8.6 Translations et rotations

La translation de vecteur (x_0, y_0) d'une fonction s'effectue simplement en considérant le changement de coordonnées $x \to x - x_0$ et $y \to y - y_0$ (on peut facilement démontrer cette propriété à l'aide du calcul vectoriel).

Les coniques ne font pas exception, aussi, par exemple, un cercle centré en (x_0, y_0) aura comme équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Les translations des paraboles, ellipses et hyperboles s'effectuent de la même façon.

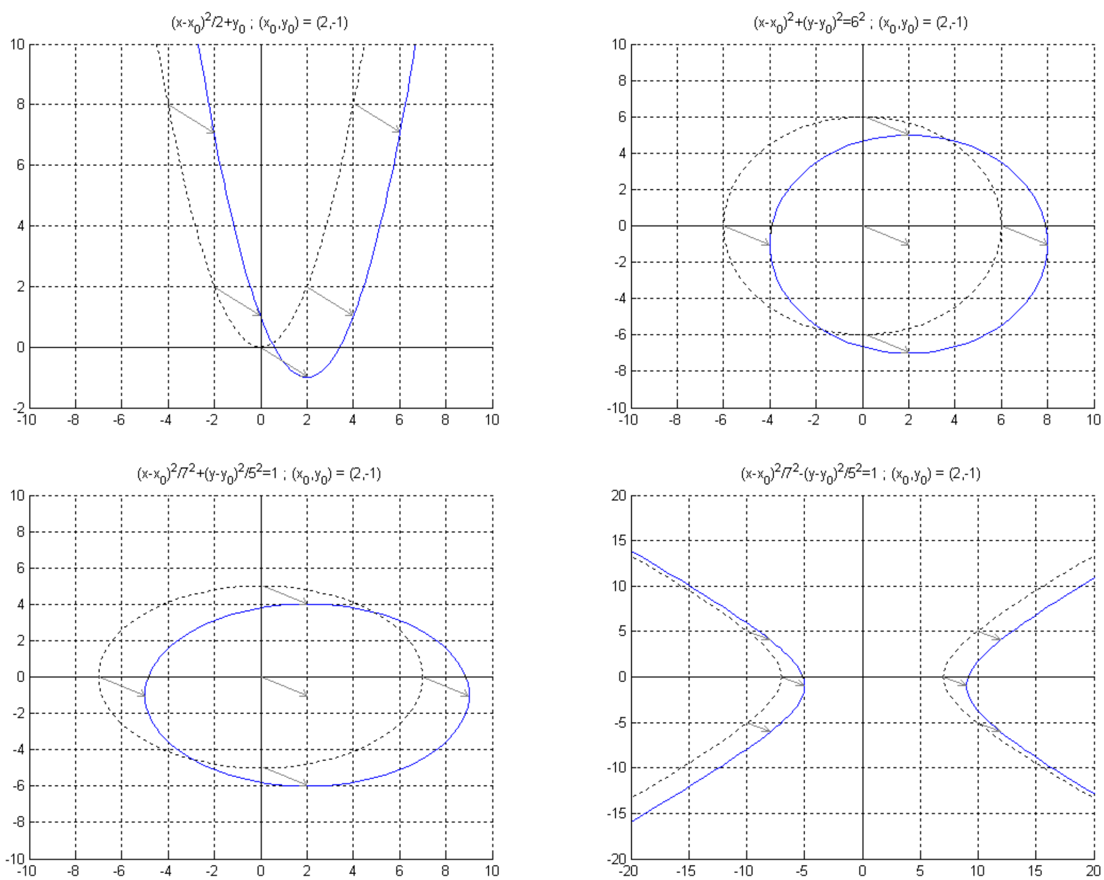


FIG. 8.2 – Translations de vecteur (x_0, y_0) de coniques.

Le cas des rotations est plus complexe. Cependant, avec une rotation de 45^o, une hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ peut devenir une fonction de la forme $yx = k$, donc,

$$y = \frac{k}{x}$$

De même, on rencontre parfois des équations du type

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy\cos\phi}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\phi$$

qui est l'équation d'une ellipse comprise entre les abscisses $-a$ et a, les ordonnées $-b$ et b, centrée en O, mais dont les axes de symétrie sont orientés à ϕ par rapport aux axes Ox et Oy.

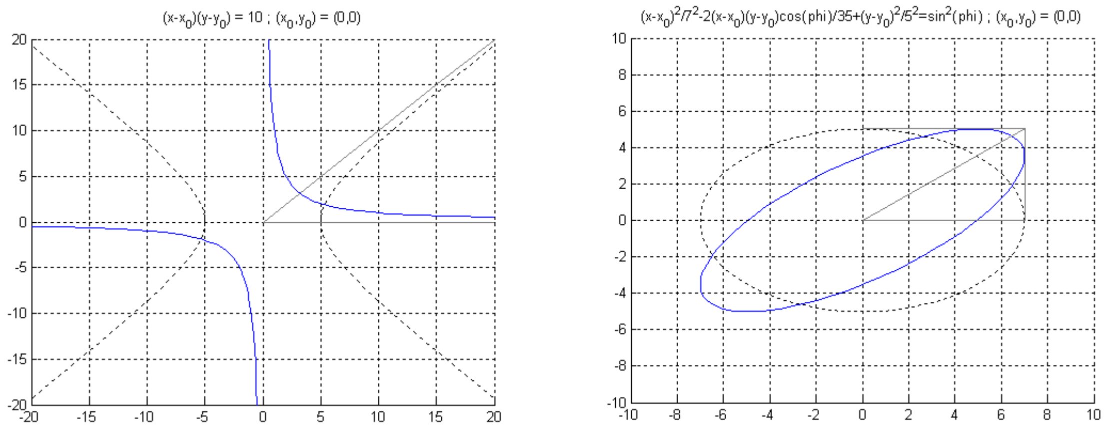


Fig. 8.3 – Rotation d'une hyperbole et d'une ellipse.

Chapitre 9

Exponentielles et logarithmes

9.1 Fonctions exponentielle a^x

Si a est un nombre réel positif et n est un nombre entier, alors l'« exponentielle de n en base a » est égale à « a puissance n » soit :

$$\exp_a(n) = a \times a \times ... \times a \quad \text{(n fois)}$$

On peut étendre cette fonction aux nombres non entiers. Cette fonction correspond à la courbe d'équation

$$y = a^x$$

La courbe sera monotone respectivement croissante ou décroissante selon que la base est $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

9.2 La fonction exponentielle e^x

Il existe une base e telle que dans cette base, la dérivée de la fonction exponentielle est égale à elle-même soit $(e^x)' = e^x$. C'est cette base qui est la plus utilisée, et c'est à elle que l'on se réfère généralement si on n'en précise pas une autre.

$$y = e^x$$

En mathématiques, on appelle fonctions hyperboliques les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique. Les nom de sinus, cosinus et tangente proviennent de leur ressemblance avec les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et le terme de hyperbolique provient de leur relation avec l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

Les fonctions hyperboliques sont analogues aux fonctions trigonométriques ou fonctions circulaires. Ce sont les fonctions :

– sinus hyperbolique définie comme étant la partie impaire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

sinh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante, et impaire. Sa dérivée est cosh. Son application réciproque s'appelle argument sinus hyperbolique et est notée argsh.

– cosinus hyperbolique définie comme étant la partie paire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

cosh est une application de $\mathbb{R}$ dans $[1; +\infty[$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et paire. Sa dérivée est sinh. Sa restriction à $\mathbb{R}^+$ est une bijection dont l'application réciproque, argument cosinus hyperbolique, est notée argch.

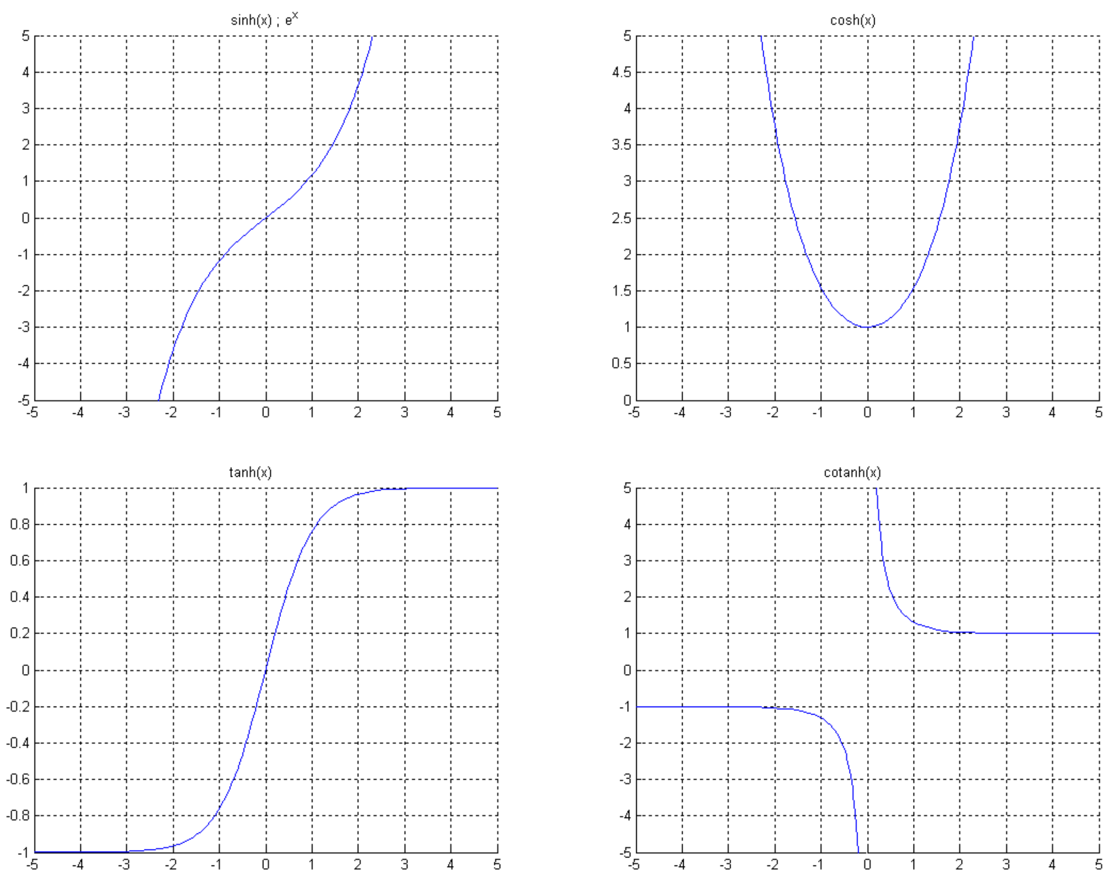


FIG. 9.1 – Fonctions hyperboliques.

– tangente hyperbolique définie par :

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$, strictement croissante, et impaire. Sa dérivée est $\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$. Son application réciproque s'appelle argument tangente hyperbolique et est notée argth.

– cotangente hyperbolique définie par :

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

coth est une bijection de $\mathbb{R}_0$ dans $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. Sa dérivée est $\frac{-1}{sh^2} = 1 - \coth^2$. Son application réciproque, argument cotangente hyperbolique, est notée argcoth.

Par construction, on obtient

$$\begin{aligned} e^x &= \cosh(x) + \sinh(x) \\ e^{-x} &= \cosh(x) - \sinh(x) \end{aligned}$$

Ainsi, la formule suivante est vraie pour tout réel x :

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

De même que les points $(cosx, sinx)$ décrivent un cercle lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, les points $(\cosh x, \sinh x)$ décrivent une branche d'hyperbole.

Le paramètre x ne peut pas être interprété comme un angle, ni comme une longueur d'arc, les fonctions hyperboliques ne sont pas des fonctions périodiques.

9.3 Propriétés des exponentielles

pour tous réels strictement positifs $a \neq 1$ et b, pour tout réel x,

$$\begin{array}{ccc} a^0 = 1 & a^1 = a & a^{-1} = \frac{1}{a} \\ a^{x+y} = a^x a^y & a^{xy} = (a^x)^y & a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} \\ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} & (ab)^x = a^x b^x & \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \end{array}$$

$$(a+b)^x \neq a^x + b^x$$

$$\sqrt{a} = a^{1/2} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

9.4 La fonction logarithme népérien $\ln x$

En mathématiques le logarithme naturel ou logarithme népérien, est le logarithme de base e. C'est la réciproque de la fonction exponentielle de base e.

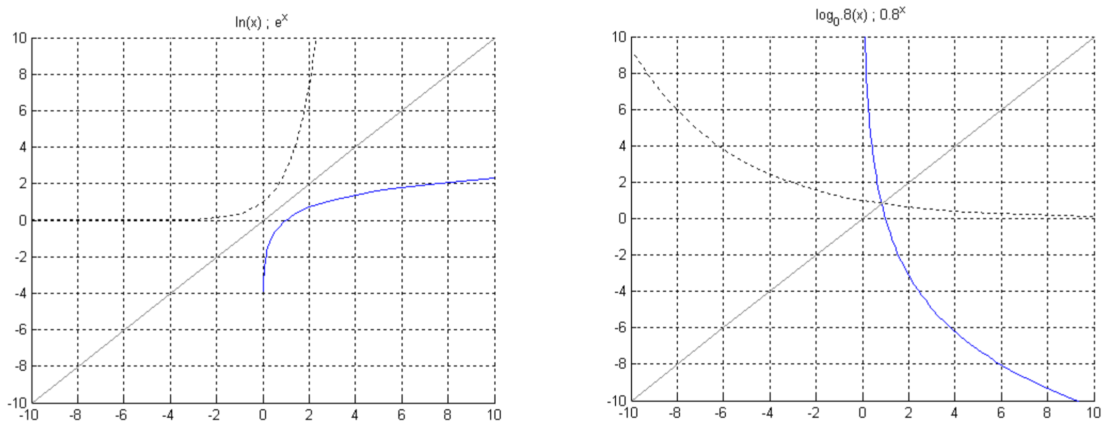


FIG. 9.2 – On démontre que les fonctions logarithmes sont les réciproques des fonctions exponentielles.

Le logarithme de x est la puissance à laquelle il faut élever e pour trouver x.

Cette fonction a été longtemps notée *Log* pour la différencier de la fonction log (logarithme décimal). On préfère de nos jours la notation ln.

Ce logarithme est appelé logarithme népérien en hommage au mathématicien écossais John Napier qui est à l'origine des premières tables logarithmiques. Celles-ci ne furent cependant pas des tables de logarithmes népériens. On date en général la naissance des logarithmes népériens de 1647, date à laquelle Grégoire de Saint-Vincent travaille sur la quadrature de l'hyperbole et démontre que la fonction obtenue vérifie la propriété des fonctions logarithmes (transformation d'un produit en somme). La fonction ln s'est d'ailleurs appelée un certain temps fonction logarithme hyperbolique compte tenu de sa découverte comme aire sous l'hyperbole. Le terme de logarithme naturel apparaît pour la première fois dans une note de Nicolaus Mercator en 1668, quand celui-ci met en place sa série de Mercator. Sa série exploitée par Newton (méthode des fluxions et des suites infinies 1671), permet de calculer assez simplement les valeurs du logarithme de Grégoire de Saint-Vincent. Le calcul des autres logarithmes apparaît alors bien compliqué. Le logarithme de Grégoire de Saint-Vincent devient alors le logarithme le plus « simple » et le plus naturel.

Des égalités

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+,\ e^{\ln(x)} = x$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$$

on déduit l'équivalence $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$ pour tout réel x et tour réel y positif, qui permet de résoudre des équations dans lesquelles l'inconnue apparaît en exposant.

Sa relation avec la fonction exponentielle permet d'exprimer toutes les autres fonctions exponentielles de base a ($a > 0$) par

$$a^x = e^{x\ln(a)}$$

Plus généralement , elle permet de définir x^y pour tout réel x strictement positif et tout réel y comme

$$x^y = e^{y\ln(x)}$$

Cette définition coïncide évidemment avec celle de x^r pour r rationnel.

9.5 Fonctions logarithme $\log_a x$

En 1588, pour faciliter ses calculs, l'astronome suisse Jost Bürgi développa le premier système logarithmique connu.

Lorsqu'en 1614, John Napier ou Neper publie son traité *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, il ne songe pas qu'il est en train de créer de nouvelles fonctions, mais seulement des tables de correspondances (logos = rapport, relation, arithmeticos = nombre) entre deux séries de valeurs possédant la propriété suivante : à un produit dans une colonne, correspond une somme dans une autre. Ces tables de correspondances ont été créées initialement pour simplifier les calculs trigonométriques apparaissant dans les calculs astronomiques et seront utilisées quelques années plus tard par Kepler. En 1619, apparaît une oeuvre posthume de Neper *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, où il explique comment construire une table logarithmique. Son travail sera poursuivi et prolongé par le mathématicien anglais Henry Briggs qui publie les tables de logarithmes décimaux et précise les méthodes d'utilisation des tables pour calculer des sinus, retrouver des angles de tangentes... Le logarithme décimal est parfois appelé logarithme de Briggs en son honneur.

En mathématiques, une fonction logarithme est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et transformant un produit en somme. Le logarithme de base a où a est un réel strictement positif différent de 1 est une fonction de ce type qui vérifie en outre $\log_a(a) = 1$.

9.6 Propriétés des logarithmes

Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, le logarithme de base a : $\log_a$, est la fonction continue définie sur $]0; +\infty[$ vérifiant, pour tous x et y réels strictement positifs

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Cette définition permet de déduire rapidement les propriétés suivantes

$$\begin{array}{ccc} \log_a 1 = 0 & \log_a a = 1 & \log_a \frac{1}{a} = -1 \\ \log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y) & \log_a(x^n) = n\log_a(x) & \log_a(a^r) = r, \forall r \in \mathbb{R} \end{array}$$

Deux fonctions logarithmes ne diffèrent que d'une constante multiplicative près :

$$\begin{aligned} \log_b(x) &= \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \\ \log_a(b)\log_b(x) &= \log_a(x) \end{aligned}$$

En effet log_b est la fonction continue qui transforme un produit en somme et qui vaut 1 en b, mais la fonction $\frac{\log_a}{\log_a(b)}$ est aussi une fonction continue qui transforme un produit en somme et qui vaut 1 en b. Les deux fonctions sont donc identiques.

Toutes les fonctions logarithmes peuvent donc s'exprimer à l'aide d'une seule : $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

9.7 Echelle logarithmique

Une échelle logarithmique est un système de graduation sur une demi-droite [Ox), particulièrement adapté pour rendre compte des ordres de grandeur dans les applications. De plus elle permet de rendre accessible une large gamme de valeurs.

Un repère semi-logarithmique est un repère dans lequel l'un des axes, par exemple celui des abscisses (x), est gradué selon un échelle linéaire, comme les graduations d'un mètre courant, alors que l'autre axe, ici celui des ordonnées (y), est gradué selon une échelle logarithmique.

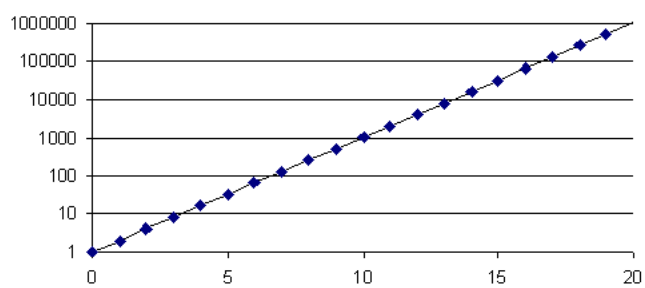


Fig. 9.3 – Représentation graphique des termes de la suite (2^n) dans un repère semi-logarithmique.

Le repère semi-logarithmique permet de représenter des phénomènes exponentiels (ou, plus généralement, elles permettent d'amplifier les variations des valeurs proches de 0 et de rendre moins importantes les variation pour les grands nombres, en mettant en évidence plutôt les variations relatives). On peut donc considérer un phénomène comme exponentiel lorsqu'il forme une droite dans un graphique semi-logarithmique.

Ce type de repère permet aussi d'évaluer les taux de croissance d'une variable évoluant avec le temps. Quel que soit le niveau de la variable, des taux de croissance identiques seront représentés par des segments ayant la même pente. On peut ainsi comparer des taux de croissance en faisant abstraction des effets d'échelle.

Un repère log-log est un repère dans lequel les deux axes sont gradués selon une échelle logarithmique.

Le repère log-log permet de représenter des phénomènes où y est une fonction puissance de x ou, plus généralement, elles permettent d'amplifier les variations des valeurs proches de 0 et de rendre moins importantes les variation pour les grands nombres, en mettant en évidence plutôt les variations relatives.

9.8 Equations logarithmiques et exponentielles

Si $a^n = b$, alors a est la racine n^{eme} de b. Donc, $a = \sqrt[n]{b}$ et

$$n = \log_a b$$

De même, si $\log_a n = b$, alors $a^{\log_a n} = a^b$. Donc,

$$n = a^b$$

Ces propriétés s'étendent à $x \in \mathbb{R}$. On a

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y \quad \text{et} \quad \log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x$$

avec $a, y \in \mathbb{R}_0^+$ et $x \in \mathbb{R}$.

Remarquons que, lors de la résolution d'une équation, si a, x ou y ne satisfont pas aux conditions ci-dessus, nous supposerons que l'équation n'a pas de solution.

Par exemple, l'équation $E \equiv \ln(x^2 - 3x - 4) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car son domaine $dom\ E =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$, qui se déduit de

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3 + \sqrt{3^2 - 4.(-4)}}{2} = 4 \text{ ou } x < \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4.(-4)}}{2} = -1$$

ne contient pas la solution de $x^2 - 3x - 4 = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 4{,}6}{2}$.

Cinquième partie

Exercices

Chapitre 10

Statistiques

10.1 Rappels fondamentaux

10.1.1 Signe sommatoire

Exercice 1

Calculer $\sum_{i=1}^{6}(2i+1)$

Exercice 2

Ecrire en utilisant la notation du signe sommatoire Σ : 3+5+7+9+11+13+15+17

Exercice 3

Soient

i	1	2	3	4
x_i	5	7	-2	-10

Calculer

$$\sum_{i=1}^{4} x_i, \qquad \sum_{i=2}^{3} x_i, \qquad \sum_{i=1}^{4} |x_i|,$$
$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2, \qquad \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2, \qquad \sum_{i=1}^{4}(x_i+2)(x_i-2)$$

Exercice 4

Soient

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	32	-16	8	-4	2	-1	0,5
y_i	0	2	4	6	8	10	12

1. Calculer $\sum_{i=1}^{7} x_i$ et $\sum_{i=1}^{7} y_i$
2. En déduire $\sum_{i=1}^{7}(x_i+y_i)$, $\sum_{i=1}^{7}(x_i-2)$, $\sum_{i=1}^{7} 2x_i$ et $\sum_{i=1}^{7} \frac{y_i}{2}$
3. Calculer $\sum_{i=1}^{7} x_i^2$ et $\sum_{i=1}^{7} y_i^2$
4. En déduire $\sum_{i=1}^{7}(x_i+y_i)^2$ et $\sum_{i=1}^{7}(x_i-2)(y_i-4)$

10.1.2 Moyennes

Exercice 1 : Moyenne arithmétique

Durant la projection d'un film à la télévision sont apparus quatre spots de publicité dont on a noté la durée : 3 minutes, 5 minutes, 6 minutes, 2 minutes.

Quelle est la durée moyenne d'un spot publicitaire ?

Exercice 2 : Moyenne harmonique

Un véhicule automobile accomplit un parcours de 500 km à la vitesse horaire de 125 km/h. Le trajet retour est accompli à la vitesse de 100 km/h. Calculez la vitesse moyenne de l'automobile.

Exercice 3 : Moyenne quadratique

Un courant électrique alternatif a une intensité efficace de 6 A pendant la moitié de sa période, et une intensité efficace de 3 A pendant l'autre moitié : quelle est son intensité efficace[1] moyenne sur toute la période ?

Exercice 4 : Moyenne géométrique

Le chef du bureau d'achat de poudre d'or de la compagnie Goldfout possède une balance Roberval dont les bras n'ont pas exactement la même longueur (on notera a la longueur d'un bras et b la longueur de l'autre bras). Il s'en suit que les masses marquées placées dans l'un des plateaux équilibrent une masse différente placée dans l'autre plateau. Pour effectuer une pesée, le chef du bureau décide d'opérer deux mesures successives. La première, qui est réalisée en plaçant l'or à gauche donne : $M_1 = 1040\ g$. La seconde pesée opérée en plaçant l'or à droite donne : $M_2 = 1160\ g$. Le chef de bureau annonce au mineur une masse de 1100 g. Quel est la masse réele de l'or ?

Exercice 5 : Résumé

Soit la distribution de 40 entreprises selon le nombre de micro-ordinateurs utilisés.

Nombre d'ordinateurs	1	2	3	4
Nombre d'entreprises	5	15	10	10

Calculez les valeurs des moyennes arithmétique, harmonique, quadratique et géométrique et classez-les par ordre croissant.

[1] L'intensité efficace est celle qui donne le même Effet Joule $W = R\, I^2 t$, avec W en Joules, $R =$ résistance en Ohm, $I =$ intensité en Ampères, $t =$ durée en Secondes.

10.2 Statistiques à 1 dimension

Exercice 1

Un contrôle de connaissances effectué sur une population de 120 étudiants a donné les résultats suivants (les travaux ont été notés sur 10).

6	8	4	6	5	7	8	5	6	4	8	5	5	8	4
7	4	6	5	7	10	5	6	5	4	8	4	6	9	8
6	8	4	7	7	5	4	5	6	6	6	1	4	8	7
4	4	7	3	5	8	8	4	3	6	5	3	6	4	7
7	6	4	6	7	8	9	6	7	7	5	4	5	6	5
4	5	8	4	2	3	6	2	4	7	7	4	5	7	5
8	2	3	7	4	7	7	6	5	5	6	6	1	3	1
3	5	4	6	6	5	7	4	7	5	2	3	3	7	6

1. Calculez le mode, la médiane, la moyenne et les quartilles de cette distribution.
2. Calculez l'intervalle de variation, la variance et l'écart-type de cette population.
3. Dessinez l'histogramme, le diagramme en bâtons et le polygone des fréqueces.
4. Dessinez le diagramme et le polygone cumulatif.
5. Estimez le mode, la médiane, la moyenne et les quartilles sur base des graphiques et comparez les avec les résultats calculés précédemment.

Exercice 2

Le kilométrage (exprimé en milliers de km) parcouru par 5000 voitures lors de leur mise hors circulation a donné les résultats suivants :

Classes	$[0, 20[$	$[20, 40[$	$[40, 60[$	$[60, 80[$	$[80, 100[$	$[100, 120[$	$[120, 140[$	$[140, 160[$	total
n_i	400	650	850	800	1600	400	200	100	5000

1. Calculez le mode, la médiane, la moyenne et les quartilles de cette distribution.
2. Calculez l'intervalle de variation, la variance et l'écart-type de cette population.
3. Dessinez l'histogramme, le diagramme en bâtons et le polygone des fréqueces.
4. Dessinez le diagramme et le polygone cumulatif.
5. Estimez le mode, la médiane, la moyenne et les quartilles sur base des graphiques et comparez les avec les résultats calculés précédemment.

Exercice 3

Le pourcentage de 30 élèves en fin d'année est donné par le tableau suivant :

84,6	79,0	76,3	60,5	61,2	74,3	85,9	83,8	83,4	66,3
77,8	76,2	81,2	68,5	80,9	59,1	53,6	71,6	67,9	71,7
63,3	64,3	53,2	62,6	67,0	73,4	69,7	57,9	65,9	65,2

1. Regroupez les données sous forme de classes. (conseil : utilisez 7 classes $[52,5;57,5[$ ... $[82,5;87,5[$)
2. Calculez le mode, la médiane, la moyenne et les quartilles de cette distribution.
3. Calculez l'intervalle de variation, la variance et l'écart-type de cette population.
4. Dessinez l'histogramme, le diagramme en bâtons et le polygone des fréqueces.
5. Dessinez le diagramme et le polygone cumulatif.
6. Estimez le mode, la médiane, la moyenne et les quartilles sur base des graphiques et comparez les avec les résultats calculés précédemment.

Exercice 4

Le taux de glycémie exprimé en cg/l mesuré sur un échantillon de 20 malades a donné les résultats suivants :

95	93	220	245	100	115	130	112	180	150
215	125	80	95	105	90	120	95	90	85

1. Calculez la moyenne et estimez grossièrement la médiane de cet échantillon.
2. Calculez l'intervalle de variation, la variance et la déviation standart de cet échantillon.

Exercice 5

Le quotient intellectiel des 480 enfants d'une école maternelle est donné dans le tableau suivant :

x_i	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
n_i	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

1. Calculez la moyenne et estimez grossièrement la médiane de cet échantillon.
2. Calculez l'intervalle de variation, la variance et la déviation standart de cet échantillon.

Exercice 6

Le tableau ci-dessous représente la distribution exprimée en tonnes des charges maximales supportées par un échantillon des câbles fabriqués par une usine spécialisée.

Classes	n_i
$[9,25;9,75[$	2
$[9,75;10,25[$	5
$[10,25;10,75[$	12
$[10,75;11,25[$	17
$[11,25;11,75[$	14
$[11,75;12,25[$	6
$[12,25;12,75[$	3
$[12,75;13,25[$	1

1. Calculez la charge moyenne supportée par les câbles et estimez grossièrement la médiane de cet échantillon.
2. Calculez l'intervalle de variation et l'intervalle inter-quartille.
3. Calculez la variance et la déviation standart de cet échantillon.

Exercice 7

Lors d'une enquête sur la composition de l'émail dentaire, on a mesuré la concentration en fluor d'un échantillon de 170 dents provenant de différentes régions. On a obtenu les résultats suivants :

Centre de classe	50	150	250	350	450	550	650	750	850
n_i	1	9	20	36	33	16	18	15	6
Centre de classe	950	1050	1150	1250	1350	1450	1550	1650	1750
n_i	4	3	0	1	0	1	3	2	2

1. Calculez la charge moyenne supportée par les câbles et estimez grossièrement la médiane de cet échantillon.
2. Calculez l'intervalle de variation et l'intervalle inter-quartille.
3. Calculez la variance et la déviation standart de cet échantillon.

10.3 Statistiques à 2 dimensions

Exercice 1

On a mesuré la longueur totale (antenne non comprise) x et l'envergure (aile déployée) y de 12 papillons de même espèce. On a obtenu les résultats suivants :

x (mm)	62	63	64	65	66	67	67	68	68	69	70	71
y (mm)	66	66	65	68	65	67	68	71	69	68	68	70

1. Calculez $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x^2, σ_y^2 et σ_{xy}^2 et recherchez l'équation des droites de régression $d_{y/x}$ et $d_{x/y}$.
2. Tracez les deux droites sur le diagramme de dispersion.
3. Calculez le point d'intersection $(\bar{x}, \bar{y})$ et le coefficient de corrélation r.

Exercice 2

On étudie l'influence de la température sur la durée d'incubation des oeufs de grenouille. On a constaté que sur huit échantillons de 200 oeufs chacun, le nombre d'éclosions obtenues au 22^{eme} jour était de :

x	T^o (^oC)	$6,0$	$6,2$	$6,4$	$6,6$	$6,8$	$7,0$	$7,2$	$7,4$
y	Nombre d'éclosions	135	132	150	156	152	155	180	178

1. Recherchez l'équation des droites $d_{y/x}$ et $d_{x/y}$. Tracez ces droites sur le diagramme de dispersion.

2. Calculez le point d'intersection $(\bar{x}, \bar{y})$ et le coefficient de corrélation r.
3. Déterminez le nombre d'éclosions relatif à une température de $7,1\ ^oC$.

Exercice 3

Soit les données (x_i, y_i) suivantes :

x_i	1	3	4	6	8	9	11	14
y_i	1	2	4	4	5	7	8	9

1. Recherchez l'équation des droites $d_{y/x}$ et $d_{x/y}$. Tracez ces droites sur le diagramme de dispersion.
2. Calculez le point d'intersection $(\bar{x}, \bar{y})$ et le coefficient de corrélation r.
3. Déterminez y quand $x = 12$ à partir de $d_{y/x}$.
4. Déterminez x quand $y = 3$ à partir de $d_{x/y}$.

Exercice 4

1. Soit la distribution suivante :

x_i	8	14	27	29	34	43	61
y_i	23	61	160	189	244	330	612

   Ajuster une courbe $y = b\ x^a$ à ces données et calculez le coefficient de corrélation r.

2. Soit la distribution suivante :

x_i	$6,9$	$12,9$	$19,8$	$26,7$	$35,1$
y_i	$21,4$	$15,7$	$12,1$	$8,5$	$5,7$

   Ajuster une courbe $y = b\ a^x$ à ces données et calculez le coefficient de corrélation r.

3. Soit la distribution suivante :

x_i	29	50	74	103	118
y_i	$1,6$	$23,5$	$38,0$	$46,4$	$48,9$

   Ajuster une courbe $y = b + a \ln x$ à ces données et calculez le coefficient de corrélation r.

Exercice 5

Le tableau suivant donne les valeurs expérimentales de la pression p d'une masse d'un gaz pour différentes valeurs du volume V. D'après les principes de la thermodynamique, on a la relation $p\ V^\gamma = C^{te}$ où γ et C^{te} sont des constantes dépendantes des conditions de l'expérience.

Volume	cm^3	$54,3$	$61,8$	$72,4$	$88,7$	$118,6$	$194,0$
pression	$bar(10^5 Pa)$	$61,2$	$49,2$	$37,6$	$28,4$	$19,2$	$10,1$

1. Déterminez l'équation reliant p et V.
2. Estimez la pression p correspondant à un volume V de $100,0\ cm^3$.

Exercice 6

Ajuster les données du tableau suivant par une parabole des moindres carrés :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	$2,4$	$2,1$	$3,2$	$5,6$	$9,3$	$14,6$	$21,9$

Chapitre 11

Analyse

11.1 Préliminaires

11.1.1 Fonctions : domaine, ensemble image, zéros, parité, période

Exercice 1 : les bases

Identifier les zéros, le domaine, l'ensemble image, la parité et la période des fonctions représentées graphiquement dans le cours théorique.

Exercice 2 : les bases

Identifier les zéros, le domaine, l'ensemble image, la parité et la période des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rccc} f(x) = & -2x^2+3x & x^2+4x+2 & 3x^2+5x+1 \\ & -x^2+2 & -2\sqrt{2-x} & x^3-8 \\ & \sin 2x & 2\cos\frac{x}{2} & \tan(\pi - x) \end{array}$$

Exercice 3 : domaine

Identifier le domaine des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rccc} f(x) = & x^3-2x+1 & (x-3)^3(x^2-x-1) & \frac{1-x}{2x-1} \\ & \frac{x}{3x-2)^2} & \frac{x^3}{x^3-9} & \frac{x-1}{5x^2+3x} \\ & \frac{x^2+1}{2x^2-3x+1} & \frac{7}{x^2-5} & \frac{7x-3}{x^2+1} \\ & \frac{x^3}{x^3-3x^2} & \frac{x-2}{x^2+2x+4} & \frac{1}{2x+3} - \frac{2}{x} \\ & \frac{3x}{x^3-3x^2+x-3} - \frac{1}{4x^2-1} & \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-4}} & \frac{1}{1-\frac{3}{1-\frac{1}{x}}} \end{array}$$

Exercice 4 : domaine

Identifier le domaine des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{array}{ccc}
\sqrt{2x-1} & \sqrt{3-2x} & \sqrt{3-x^2} \\
\sqrt{9x^2-16} & \sqrt{6x^2-5x-1} & \sqrt{x^3-x} \\
\sqrt{x^2+x+1} & \sqrt{(x-2)^3(x+1)^2} & \sqrt{x^3-x^2} \\
\frac{2}{\sqrt{2x^3-6x^2}} & \frac{\sqrt{3x-2}}{x+1} & \frac{3x-2}{\sqrt{x+1}} \\
\frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+1}} & \sqrt{\frac{3x-2}{x+1}} & \sqrt{x^2-2x}-\sqrt{1-x^2} \\
\sqrt{x-\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{\sqrt{x-1}} & \frac{1}{2x-1-\sqrt{x+1}} \\
\frac{3x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3-x}} & \sqrt{1-\frac{x+2}{x^2-10}} & \sqrt{1+\frac{4-\sqrt{x+3}}{\sqrt{9-\frac{1}{\sqrt{4x-1}}}}}
\end{array}$$

Exercice 5 : domaine

Identifier le domaine des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{array}{ccc}
\frac{1}{\cos x} & \frac{1}{\sin x} & \tan 2x \\
\cot(\frac{\pi}{6}-x) & \frac{\sin^3 x}{1-\cos x} & \frac{1}{1-2\sin x} \\
\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} & \sqrt{\sin x} & \sqrt{\cos\frac{x}{2}} \\
\sqrt{1-\sin x} & \sqrt{\tan x} & \frac{1}{\sqrt{\sin(x+\frac{\pi}{4}}} \\
\sqrt{\frac{\sin x}{2\cos x-1}} & \sqrt{\sin x+\cos x} & \sqrt{\frac{\sin x}{1-\sqrt{1-\cos x}}}
\end{array}$$

Exercice 6 : domaine

Trouver une fonction ayant pour domaine de définition l'ensemble suivant :

$$dom\ f = \begin{array}{ccc}
\mathbb{R} & \mathbb{R}\backslash\{2\} & \mathbb{R}_0 \\
\mathbb{R}\backslash\{-1,2\} & [1,+\infty[&]-\infty,3] \\
]-2,+\infty[&]-\infty,\frac{5}{2}[& \mathbb{R}^+ \\
[-2,3] & [-2,3[&]-2,3] \\
]-2,3[& [-4,4]\backslash\{1\} & [-3,-1]\cup\{0\} \\
\mathbb{R}^-\cup[2,5[& \mathbb{R}^-\cup[2,5] & \mathbb{R}^-\cup]2,5[
\end{array}$$

Exercice 7 : ensemble image

Identifier l'ensemble image des fonctions suivantes :

$$Im\ f \quad \begin{array}{ccc}
2x+3 & x^2+1 & 4-x^2 \\
x^2-3x+2 & x^3+2 & |2x+1| \\
2|x|+1 & \frac{1}{x+1} & \frac{x-1}{x+2} \\
\frac{x-1}{2x} & \sqrt{x-3} & \sqrt{x}-3 \\
1-3\sqrt{x} & \sin x & \frac{1}{\cos x} \\
|\sin 2x| & 3-\cos x & 5-2\sin x
\end{array}$$

Exercice 8 : zéros

Identifier les zéros des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{array}{ccc} 4x+1 & x^2-5x & x^3+8 \\ 4x^3-9x & \frac{x-2}{x+3} & \frac{1}{x-5} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+2} & \sqrt{x+1}-2 & x-\sqrt{2x-3} \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{2x} & \frac{x^3-x}{\sqrt{x+1}} & \sin x \\ \tan 3x & 1-\frac{1}{2\sin x} & \sin\frac{1}{x} \end{array}$$

Exercice 9 : parité

Identifier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{array}{ccc} x^3-3x & x\tan x & x^4-2x^3+1 \\ \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3 & \sqrt{4x^2-1} & \sqrt{2x} \\ \frac{1}{x^3-5x} & \sqrt{1-\cos x} & \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \\ |\sin x| & \sin^2 x & (x^3-x)^2 \end{array}$$

11.1.2 Eléments de symétrie d'une fonction

Exercice 1 : les bases

Identifier les éléments de symétrie des fonctions représentées dans le cours théorique.

Exercice 2 : les bases

Identifier les éléments de symétrie des fonctions suivantes (centre, axe(s) vertical) :

$$f(x) = \begin{array}{ccc} x^3-1 & x^2-4x-3 & \frac{1}{x^2+4x+4} \\ \cos x & \frac{x-1}{x+2} & \sqrt{x^2-2x} \\ \tan\frac{\pi x}{2} & \tan(\frac{\pi}{2}x-\pi) & \frac{1-x}{x+2} \\ |x^2-6x+9|+1 & \frac{2-x}{x+1} & \frac{\sin\frac{x}{2}}{x} \end{array}$$

11.1.3 Translations et affinités

Exercice 1 : les bases

Déterminer le type des fonctions (classification) représentées sur les graphiques de la figure 11.1.

Exercice 2 : les bases

Représenter sur un même graphique
- $y = x^2$, $y = x^2+4$, $y = x^2-2$.
- $y = x^2$, $y = (x-4)^2$, $y = (x+2)^2$.
- $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = 4x^2$, $y = \frac{x^2}{4}$.

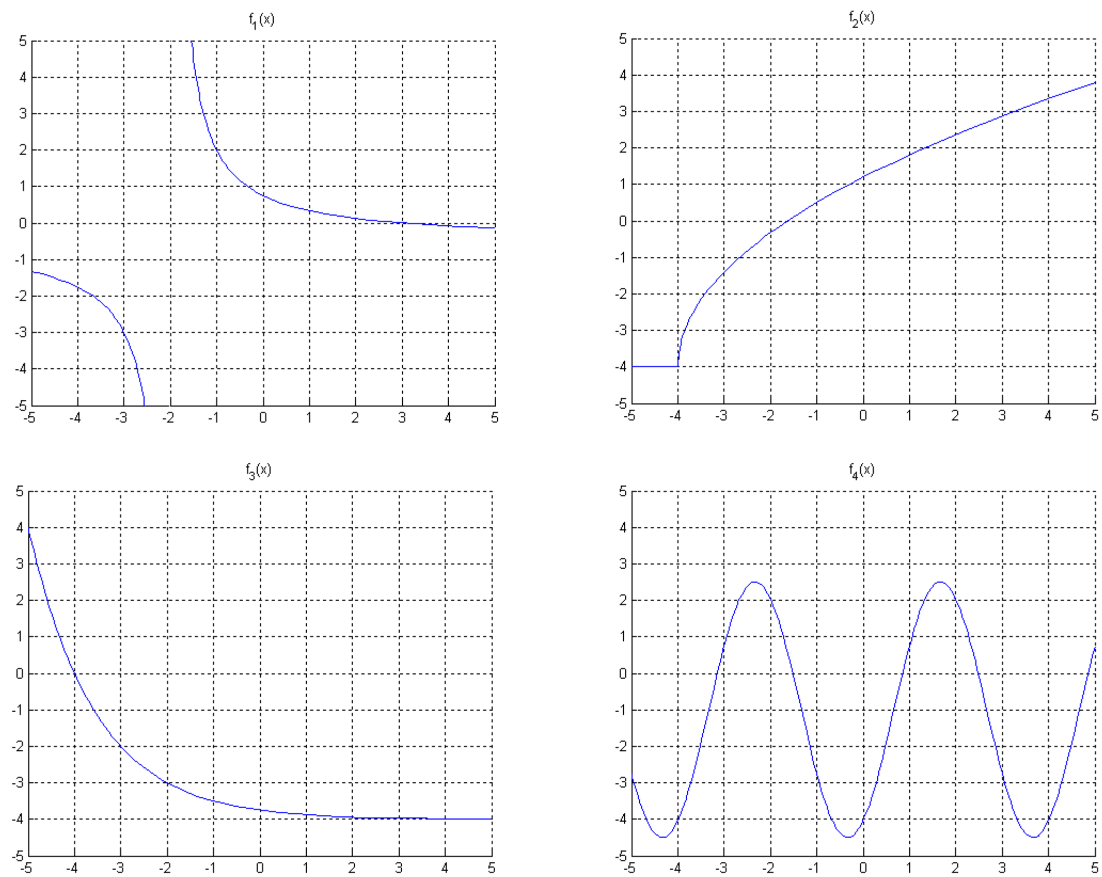


FIG. 11.1 – Exercice 1

Exercice 3 : translations et affinités

Dessiner les graphiques des fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{cccc}
f(x) = & x-3 & x+4 & x+\frac{1}{2} \\
 & x^2-6 & x^2-4x+4 & x^2+x \\
 & 2x-3 & -3x & 4 \\
 & \frac{x}{2}+1 & 4-x^2 & 2x^2 \\
 & \frac{1}{2x} & |(x-2)^2|+4 & \sin\frac{\pi x}{2} \\
 & 35+2x-x^2 & \frac{x^3}{3}-8 & \sqrt{x-9}-2 \\
 & \frac{x+1}{x-2} & \frac{2x+3}{1-x} & -\frac{1}{2}\ln(-3e^{-2}x+e^{-2}) \\
 & e^{x+2} & 4\sin\frac{\pi x}{4} & \pi[\cos\pi x]
\end{array}
$$

Exercice 4 : translations et affinités

Dessiner les graphiques correspondant aux équations suivantes :

$$
\begin{array}{ccc}
y = 2x-5 & 2x-3y=0 & x=3(y-1) \\
4x-3y-6=0 & 2y+7=0 & x^2+2y-x-6=0 \\
y=(x-2)(x+4) & y=(x+2)^2-3 & y=4-(2x+3)^2 \\
(2x-3)(2x+3)-4y=0 & (x-2)(y+3)=4 & 3-2x=\sqrt{3y-2}
\end{array}
$$

11.2 Coniques

11.2.1 Lieux géométriques

Exercice 1

Déterminer le lieu géométrique des points situés à égale distance de deux sommets opposés d'un carré.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré. Déterminer le lieu géométrique des points P tels que $(\vec{PA}+\vec{PB})\cdot(\vec{PC}-\vec{PB}) = |AB|^2$.

Exercice 3

Déterminer le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés de leur distance au sommets d'un triangle équilatéral est égale au carré de la longueur d'un côté de ce triangle. (Indice : placer le système d'axes sur le centre de gravité du triangle.)

11.2.2 Paraboles, ellipses, hyperboles

Parabole

Exercice 1

Tracer une parabole pour laquelle la distance du foyer à la directrice mesure 6 cm.

Exercice 2

Déterminer la coordonnée du foyer et l'équation de la directrice de la parabole P.

$$P \equiv \quad y^2 = 12x \quad y^2 = 3x \quad y = 2x^2$$

Exercice 3

Déterminer le réel a pour que la parabole $P \equiv y = 2x^2$ vérifie la condition suivante :
- P comprend le point $A(6, 2)$,
- P admet $F(0, 1)$ comme foyer,
- P admet $d \equiv 4y + 1 = 0$ comme directrice,
- La distance du foyer à la directrice vaut 6.

Exercice 4

Déterminer la coordonnée des éventuels points communs à la droite d et à la parabole P. Spécifier la position de d par rapport à P.
- $P \equiv y = \frac{x^2}{6}$ et $d \equiv x = 2$,
- $P \equiv y = \frac{x^2}{2}$ et $d \equiv y - 3 = 0$,
- $P \equiv y = \frac{x^2}{2}$ et $d \equiv y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$,
- $P \equiv y = \frac{x^2}{8}$ et $d \equiv y - x + 3 = 0$,
- $P \equiv y^2 = x$ et $d \equiv y = 2x - 3$.

Exercice 5

Déterminer le lieu géométrique des points situés à égale distance d'une droite $d \equiv x = -4$ et d'un point $F \equiv (2, 0)$.

Exercice 6

Déterminer le sommet de la parabole d'équation $y = x^2 + (m + 5)x + (m + 8)$ pour $m = -5$, -8 et 0.

Exercice 7

Trouiver l'équation de la parabole passant par les points $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ et $C(3, 10)$.

Exercice 8

Trouver l'équation de la parabole d'axe parallèle à Oy, de sommet $S(1,3)$ et coupant l'ordonnée en $y = 4$.

Exercice 9

Un train de marchandises roule à la vitesse constante de 54 km/h. Un second train, lancé à 126 km/h, roule sur la même voie et dans le même sens. À un certain moment, le conducteur du second train voit 150 m devant lui le premier train. Il actionne aussitôt les freins, ce qui provoque une décélération constante de 1 m/s^2.

Y aura-t-il collision entre les deux trains ? Si oui, combien de temps aura duré le freinage et quelle distance aura parcourue le second train pendant ce temps ?

Ellipse

Exercice 1

Tracer une ellipse dont le demi-grand axe mesure 5 cm et le demi-petit axe 3 cm.

Exercice 2

Trouver les coordonnées des sommets et des foyers de l'ellipse E.

$$E \equiv \begin{array}{ccc} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 & \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 & \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ \frac{36x^2}{25} + \frac{9y^2}{4} = 1 & x^2 + 5y^2 = 1 & 3x^2 + 4y^2 = 1 \\ x^2 + 8y^2 = 2 & 4x^2 + 16y^2 = 9 & 2x^2 + 4y^2 = 8 \end{array}$$

Exercice 3

Dessiner à main levée les ellipses suivantes et situer leurs foyers :

$$E \equiv \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad 4x^2 + 9y^2 = 16 \quad 4x^2 + 9y^2 = 1$$

Exercice 4

Déterminer les réels a et b pour que l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{t^2}{b^2} = 1$ vérifie les conditions suivantes :

- E comprend les points $P(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3})$ et $Q(2\sqrt{6}, \frac{4}{5})$,
- E admet les points $A(6,0)$ et $B(0,4)$ pour sommets,
- E admet le point $A(13,0)$ pour sommet et le point $F(12,0)$ pour foyer,

- E admet le point $B(3,0)$ pour sommet et le point $F(4,0)$ pour foyer,
- E admet le point $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$ et admet le point $F(2,0)$ comme foyer.

Exercice 5

Déterminer la coordonnée des éventuels points communs à la droite d et à l'ellipse E. Spécifier la position de d par rapport à E.

- $E \equiv \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$ et $d \equiv y+4=0$,
- $E \equiv \frac{x^2}{20}+y^2=1$ et $d \equiv x-2=0$,
- $E \equiv \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ et $d \equiv y-2x=0$,
- $E \equiv \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ et $d \equiv x+y=4$,
- $E \equiv \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ et $d \equiv x+y+5=0$,
- $E \equiv x^2+3y^2=1$ et $d \equiv 2x-4y+1=0$.

Exercice 6

Déterminer l'équation de l'ellipse qui a pour foyers $F \equiv (0,3)$ et $F' \equiv (0,-3)$ et pour demi-grand axe $a=6$.

Exercice 7

Dessiner un cercle, centré à l'origine, de rayon $r=5$ et le point $P(-3,-4)$. Déterminer graphiquement le sinus de l'angle θ formé avec l'axe Ox et la droite OP.

Exercice 8

Sachant que l'accélération gravitationnelle dans le champ de la Terre vaut $G\frac{m_T}{r^2}=\frac{398600}{r^2}\ m/s^2$ où r est la distance, calculer à quelle distance de la surface de la Terre doit se trouver un satellite géostationnaire. (Le rayon de la terre vaut environ 6400 km. Indice : il faut que l'accélération centripète et l'accélération gravitationnelle soient égales.)

Exercice 9

Trouver une équation du cercle satisfaisant aux conditions suivantes :

- De centre $C(2,-3)$ et de rayon $r=5$,
- De centre $C(-4,6)$ et passant par $P(1,2)$,
- Tangent aux deux axes, le centre se trouve dans le 2^e quadrant et le rayon vaut $r=4$,
- Les points $A(4,-3)$ et $B(-2,7)$ sont les extrémités d'un diamètre.

Hyperbole

Exercice 1

Tracer l'hyperbole pour laquelle la distance entre les sommets mesure 4 cm et la distance entre les foyers mesure 6 cm.

Exercice 2

On donne l'hyperbole $H \equiv \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$. La distance d'un point P de cette hyperbole au foyer F est égale à 5. À quelle distance se trouve P par rapport au foyer F' ?

Exercice 3

On donne l'hyperbole $H \equiv \frac{9x^2}{49} - \frac{y^2}{4} = 1$. La distance d'un point P de cette hyperbole au foyer F est égale à $\frac{22}{3}$. À quelle distance peut-il être de l'autre foyer ?

Exercice 4

Déterminer les éléments caractéristiques de l'hyperbole H : coordonnées des sommets et des foyers et équations cartésiennes des asymptotes.

$$H \equiv \begin{array}{lll} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 & \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 & \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 & x^2 - y^2 = 1 & 2x^2 - y^2 = 2 \end{array}$$

Exercice 5

Déterminer les réels a et b pour que l'hyperbole $H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1$ vérifie les conditions suivantes :

- H admet le point $A(2, 0)$ pour sommet et la droite $d \equiv y = 3x$ pour asymptote,
- H admet le point $A(3, 0)$ pour sommet et le point $F(5, 0)$ comme foyer,
- H admet le point $F(\sqrt{5}, 0)$ pour foyer et la droite $d \equiv y = 2x$ pour asymptote,
- H comprend le point $P(3, \frac{5}{2})$ et admet le point $A(2, 0)$ pour sommet,
- H comprend le point $P(\frac{5}{2}, 1)$ et admet le point $F(\sqrt{30}, 0)$ pour foyer,
- H comprend les points $P(4, \sqrt{3})$ et $Q(6, 3\sqrt{2})$.

Exercice 6

Déterminer la coordonnée des éventuels points communs à la droite d et à l'hyperbole H. Spécifier la position de d par rapport à H.

- $H \equiv x^2 - y^2 = 1$ et $d \equiv 2x - y - 4 = 0$,
- $H \equiv 7x^2 - 3y^2 = 1$ et $d \equiv 5x - 3y - 1 = 0$,
- $H \equiv \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ et $d \equiv 6x - 5y - 10 = 0$,
- $H \equiv \frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ et $d \equiv 4x - 5y - 10 = 0$.

11.2.3 Translations et rotations de coniques - coniques dégénérées

Exercice 1 : coniques dégénérées

Soit la forme générale d'une courbe du second degré :

$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0$$

Soit $\delta = aa' - b''^2$. Si
- $\delta > 0$, la courbe est une ellipse,
- $\delta = 0$, la courbe est une parabole,
- $\delta < 0$, la courbe est une hyperbole.

Identifier la nature des courbes Γ telles que

$$\Gamma \equiv \quad (x-y-4)(x+y+3) = 5 \quad (x-y+2)^2 = 0 \quad 2x^2 - 7xy + 3y^2 - 8x - 6y - 24 = 0$$

Quelles sont les particularités de ces courbes ?

Exercice 2 : translations et rotations

Dessiner les coniques suivantes :

$$\Gamma \equiv \begin{array}{ccc} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 & \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 & (x-1)(y-2) \\ 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 = 1 & 4x^2 - 4\sqrt{3}xy + 4y^2 = 1 & 3x + xy - 2y - 6 = 0 \end{array}$$

11.3 Exponentielles et logarithmes

11.3.1 exercices fondamentaux

Résoudre les équations simples

$$\begin{array}{ccc} 2^x = 16 & 5^x = \frac{\sqrt{5}}{5} & 8^x = 2 \\ 5^x = 1 & 2^x = \sqrt[3]{4} & \left(\frac{5}{2}\right)^x = 0,16 \\ 3^x = 243 & \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} & \left(\frac{2}{5}\right)^x = 0,16 \\ 3^x = \sqrt{3} & 10^x = 0,01 & 16^x = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 10^x = 100 & \log x = 2 & \log 1000000 = x \\ 10^x = 0,001 & \log x = -3 & \log 0,01 = x \\ 10^x = 1 & \log x = 0 & \log \frac{10^4}{10^{-3}} = x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \log n = -3 & \frac{1}{2}\log n = 4 & \log(\log n) = 0 \\ 10^{\log n} = 100 & \frac{\log 100}{n} = \frac{3}{2} & \log(\log n) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3^x + 3^{x+1} = 4 & 5^{x+3} - 5^{x+1} = 3000 & 9.22^x = 4.3^x \\ 2^x + 2^{x-2} = \frac{5}{2} & \left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{65}{26} & 30.3^x - 9^x - 81 = 0 \\ 4^{x+3} - 2^{2(x+2)} = 192 & 5.3^{x-1} - 2.3^{1-x} = 3 & 3^x + 3^{1-x} = 4 \end{array}$$

Problèmes d'applications des exponentielles et logarithmes

1. Dans une culture de bactéries, toutes les bactéries se divisent après un certain temps (τ_G) et se transforment en deux bactéries filles. Le temps τ_G qui s'écoule entre 2 divisions est appelé *durée d'une génération*. On suppose que toutes les bactéries présentent dans le milieu de culture se divisent en même temps. Soit N_0 le nombre de bactéries présentes à l'instant $t = 0$ (génération 0).
   – Quel est le nombre N_n de bactéries présentes à la n^{eme} génération ?
   – Si τ_G est la durée d'une génération, quel est le nombre N_t de bactéries présentes à l'instant t ?
   – Si le nombre initial de bactéries vaut $N_0 = 2.10^3$ et $\tau_G = 45\ min$, calculer le nombre de bactéries présentes aux instants $t = 1h$, $2h$, ... $7h$, $8h$.

2. Les noyaux d'une substance radioactive se transforment spontanément en d'autres noyaux. Il s'agit d'un processus aléatoire qui n'est pas prévisible. Cependant, étant donné le très grand nombre d'atomes présents dans la matière, nous pouvons, sous couvert de la régularité statistique, affirmer que le temps mis pour que la moitié des noyaux d'un volume donné de matière se désintègrent ne dépend pas du nombre d'atomes présent (nous ne tiendrons pas en compte les éventuelles réactions en chaîne) et que ce temps est une caractéristique de la substance radioactive considérée. Ce temps est appelé *temps de demi-vie* ($\tau_{1/2}$).
   – Avec la quantité initiale N_0, quel sera le nombre de noyaux présents après un temps égal à 3 demi-vies ?
   – Sous les considérations précédentes, établir la loi exprimant la quantité de noyaux présents à un instant t quelconque.
   – La masse d'un élément radioactif étant proportionnel au nombre de noyaux, établir le graphique de la masse d'un élément radioactif de masse initiale $m_0 = 1\ g$ et de demi-vie $\tau_{1/2} = 0,5\ \mu s$.
   – Cette loi peut aussi s'écrire sous la forme $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$. Déterminer la constante λ.

Calculs et Simplifications

Simplifier

$$\begin{array}{ccc} 10000^{\frac{1}{4}} & \frac{x^2}{64} & (x^4y^4)^{\frac{1}{2}} \\ x^2(x^6)^{-\frac{1}{3}} & (x^4y^{-8})^{\frac{1}{2}} & \sqrt[3]{x^{-9}} \\ 125^{-\frac{1}{3}} & (10^4)^{\frac{3}{4}} & 8^4 \end{array}$$

Sachant que $\log 2 = 0,30103$, calculer

$$\begin{array}{ccc} \log 4 & \log \frac{1}{16} & \log 3,2 \\ \log 0,2 & \log 0,0064 & \log 5 \end{array}$$

Exprimer avec des nombres premiers

$$\begin{array}{ccc} \ln 20 & \log_2 64 & \log_3 41,7 \\ \ln 30 & \log_3 75 & \log_{\frac{1}{2}} 54 \\ \ln 0,16 & \log_7 32,3 & \log_4, 52 \end{array}$$

Simplifier

$$\begin{array}{ccc} e^{2\ln 5} & e^{2\ln x} & e^{2\ln 3x} \\ e^{-\ln 3} & e^{-\ln 3x} & e^{2\ln 5x-\ln 2} \\ \ln e^2 & \ln e^{ex^2} & \ln x^e \\ \ln\sqrt[5]{e} & \ln\sqrt[3]{e^2} & \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)^3 \\ \log_2 16 & \log_8\sqrt{2} & \log_6\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \log_2\sqrt{2} & \log_6\sqrt[3]{36} & \log\sqrt{\frac{1}{100}} \end{array}$$

Résoudre les équations « moins simples »

1. (a) $e^{2x} = e$
   (b) $e^x = \frac{1}{3}$
   (c) $e^{-\frac{x}{2}}$
   (d) $2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$
   (e) $e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0$
   (f) $10^{6x} - 3.10^{3x} - 4 = 0$
   (g) $3^x + \frac{2}{3^x} = 3$
2. (a) $\ln(x+4) = 0$
   (b) $\ln(2x-3) = \ln 12$
   (c) $\ln(4-x) = 2\ln 2$
   (d) $\ln(3x+1) = \ln 7$
   (e) $\ln(-x) = 1$
   (f) $\ln(7-x) = 3\ln 2$
   (g) $2\ln(-2-x) = \ln 9$
   (h) $\ln(-2-5x) = \ln 13$

3. (a) $\ln(2x-3) + \ln(x-4) = 2\ln 5$
   (b) $\ln(x+2) + \ln(-x) = \ln\frac{3}{4}$
   (c) $\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) = \ln 5x$
   (d) $2\ln 2 + \ln(x^2-1) = \ln(4x-1)$
   (e) $\log(x-2) + \log(x+3) = 2$
   (f) $\log(3-x) + \log(-x-6) = 1$
   (g) $8\log^3 x - 9\log^2 x + \log x = 0$
   (h) $\log^4 x - 34\log^2 x + 225 = 0$
4. (a) $\ln(x^2-4x+3) = \ln 3$
   (b) $\ln\sin x = 0$
   (c) $\ln\cos x = -\frac{1}{2}\ln 2$
   (d) $\ln(x+|x-2|) = \ln 10$
   (e) $2\ln(x+1) - \ln(x+4x+3) = 2\ln 3$

Problèmes

1. Un capital est placé au taux annuel de 10 % à intérêts composés. Au bout de combien de temps le capital aura-t-il doublé ? Triplé ?

2. Une formule empirique permet d'estimer la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si $h(x)$ exprime la taille (en cm) à l'âge x (en années) pour $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$, alors $h(x)$ est définie par :

$$h(x) = 70,228 + 5,104.x + 9,222.\ln x$$

   1. Quelle sera la taille probable d'un enfant qui atteint l'âge de deux ans ?
   2. Quel âge probable a un enfant mesurant 100 cm ?
   3. Quel âge probable a un enfant mesurant 50 cm ?

3. Une substance radioactive se désintègre suivant la loi $q(t) = q_0 e^{-\lambda t}$, où q_0 est la quantité initiale de la substance, λ une constante positive (période radioactive) et $q(t)$ la quantité au moment t.
   1. Par une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité de λ dans le système international.
   2. Montrer que la vitesse de désintégration est proportionnelle à $q(t)$. ($(ke^{ax})' = kae^{ax}$)
   3. La demi-vie du césium 137 est de 30 ans. Si l'on en possède $1g$, combien nous en restera-t-il au bout de 15 ans ? 150 ans ? 1500 ans ?

4. L'équipe du laboratoire d'imagerie médicale doit réaliser 2 examens dans la matinée sur deux patients différents. Deux doses de traceur (glucose) contenant le même nombre N_0 de noyaux radioactifs de « fluor 18 » sont fabriquées en même temps avant leur injection pour réaliser ces examens. Au moment de son injection au patient la dose de traceur doit avoir une activité A de 260.10^6 Bq. Lors du premier examen on injectera la dose notée D_1 à 9 h 00. On rappelle que l'activité A d'une source radioactive peut se mettre sous la forme $A = A_0 e^{-\lambda t}$.
   1. Calculer l'activité du « fluor 18 » présent dans le patient lors d'un examen médical effectué 1 h après la première injection. On donne $\lambda = 10 - 4s^{-1}$.
   2. L'injection de la dose D_2 au deuxième patient a lieu à 9 h 30. Calculer le temps nécessaire après l'injection pour que l'activité soit 100 fois plus faible qu'au moment de l'injection.

5. La dimension M d'une mémoire tampon intervenant dans un réseau téléinformatique est donnée par la formule $M(\tau) = -\frac{30}{\log \tau} - 10$ où τ représente l'intensité du trafic ($0 < \tau < 1$). On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,2 ; 0,8] par $f(x) == -\frac{30}{\log x} - 10$.
   1. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $\ln x$.
   2. Représenter graphiquement la fonction $f(x)$.
   3. Déterminer l'intensité du trafic pour une dimension de mémoire tampon de 64 (par calcul et graphiquement).

6. La fonction de croissance W de von Bertanlanffy donne approximativement le poids $W(t)$ (en kg) en fonction de l'âge t (en années) des éléphants africains femelles. Son expression est

$$W(t) = 2600(1 - 0,51.e^{-0,075.t})^3$$

1. Evaluer le poids et le taux de croissance d'une nouvelle née ?
2. Estimer l'âge et le taux de croissance d'une femelle de 1800 kg.
3. Calculer et interpréter $\lim_{t\to+\infty} W(t)$?

7. Un millier de truites stériles, âgées d'un an, sont jetées en 2007 dans un grand étang. On prévoit qu'après t années , le nombre de truites encore en vie sera $N(t) = 1000.(0,9)^t$.
   1. Combien de truites trouvera-t-on dans l'étang en 2008, 2009, ... 2015 ?
   2. En quelle année le nombre de truites atteindra-t-il 206 individus ?
   3. Le poids $P(t)$ (en grammes) d'une truite devrait augmenter selon la formule $P(t) = 90 + 770.t$. Après combien d'années le poids total des truites de l'étang sera-t-il maximal ? (Indice : maximiser la fonction $f(x)$ revient à trouver les zéros de sa dérivée $f'(x)$ pour lesquels la dérivée seconde $f''(x)$ est négative. On pourra utiliser les formules suivantes : $(f(x).g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $(ax + b)' = (ax)' + (b)' = a + 0$ et $(ke^{ax})' = kae^{ax}$.)

8. Lorsqu'un médicament est injecté dans le sang, sa concentration t minutes plus tard est donnée par $C(t) = \frac{k}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$, où a, b et k sont des constantes positives.
   1. A quel moment la concentration sera-t-elle maximale ? ($(ke^{ax})' = kae^{ax}$)
   2. Que peut-on dire de la concentration après une longue période de temps ?
   3. Pour $k = 6$, $a = 1,2$ et $b = 1,728$, à quel moment la concentration sera-t-elle d'un cinquième de la valeur maximale ?

Exercices complémentaires

Exercice 1

Calculer ou simplifier les expressions suivantes

$$\begin{array}{ccc} 2^4 & 3^2 & 2^2 2^3 \\ x^5 x^3 x & 5^{-2} & 5^{-3} 5^4 \\ x^4 x x^{-3} & \frac{x^4}{x^3} & \frac{x^4}{y^4} \\ (a^2 x^4)^{\frac{1}{2}} & (a^3 x^6)^{\frac{1}{2}} & (x^{-2} y^5)^{\frac{1}{2}} \\ 1000^{\frac{1}{3}} & (a+b)(a^2 - ab + b^2) & (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2 \end{array}$$

Exercice 2

Sachant que $\log 2 = 0,3$, calculer

$$\begin{array}{ccc} \log 4 & \log 0,2 & \log \frac{1}{16} \\ \log 0,0064 & \log 3,2 & \log 5 \end{array}$$

Exercice 3

Exprimer, en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$, les valeurs

$$\begin{array}{ccc} \ln 20 & \ln 30 & \ln 0,5 \\ \log_2 64 & \log_3 75 & \log_5 0,3 \end{array}$$

Exercice 4

Résoudre les équations

$$\begin{array}{ccc}
e^{2x} = e & e^x = \frac{1}{3} & e^{-\frac{x}{2}} = 4 \\
2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0 & e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0 & 10^{6x} - 3.10^{3x} - 4 = 0 \\
3^x + \frac{2}{3^x} = 3 & \ln(2x-3) + \ln(x-4) = 2\ln 5 & \ln(x+2) + \ln(-x) = \ln\frac{3}{4} \\
\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) = \ln 5x & 2\ln 2 + \ln(x^2-1) = \ln(4x-1) & \log(x-2) + \log(x+3) = 2 \\
\log(3-x) + \log(-x-6) = 1 & 8\log^3 x - 9\log^2 x + \log x = 0 & \log^4 x - 34\log^2 x + 225 = 0
\end{array}$$

Exercice 5

Au 1^{er} janvier 1999, une ville comptait 3 millions d'habitants. Après enquête, on constate que la population diminue de 4% par an. On suppose que le phénomène continue dans les années suivantes.

- Exprimer le nombre d'habitant en fonction du nombre d'années t qui s'écoule depuis 1999.
- Calculer la population de 2004 à 2009.
- Au cours de quelle année la population de la ville atteindra-t-elle pour la première fois un effectif inférieur à 2 millions d'habitants ?

Exercice 6

La taille d'un séquoïa augmente de 7% par an. Dans combien de temps un séquoïa de 50 cm atteindra-t-il une hauteur de

- 50 m ?
- 140 m ?

Exercice 7

Avant-hier, une population de bactéries était de $4,23.10^5$ individus. Le lundi précédent, elle était de $9,93.10^4$. Estimer la population de bactéries aujourd'hui, lundi et mercredi.

Exercice 8

L'iode 131 (I_{53}^{131}) est utilisé dans le traitement des troubles de la thyroïde. Sa demi-vie dans le traitement est de $8,1$ jours. Si un patient ingère une faible quantité d'iode 131, sans tenir compte de l'élimination par le corps, calculer la fraction $\frac{N}{N_0}$ qui subsisterait après

- $8,1$ jours,
- $16,2$ jours,
- 60 jours.

Exercice 9

En fait, l'iode (y compris l'iode 131) est lentement évacuée par l'organisme (sueur, ...), avec une demi-vie biologique de 180 jours. Corriger les calculs de l'exercice précédent en tenant compte des deux processus d'élimination.

Exercice 10

Afin d'établir un diagnostic, du soufre 35 (emetteur beta de forte energie et de courte durée de vie) est administré à un patient. Déterminer le pourcentage de ce radioisotope qui subsiste dans l'organisme après 116 jours, sachant que la demi-vie biologique du soufre est de 22 jours et que la demi-vie du soufre 35 est de $87,1$ jours.

Exercice 11

Afin d'établir un diagnostic hématologique, du fer 59 (emetteur beta de forte energie et de courte durée de vie) est administré à un patient. Après combien de temps ce radioisotope sera-t-il éliminé jusqu'au seuil de $0,781\%$ de la dose administrée, sachant que la demi-vie biologique du fer est de 65 jours et que la demi-vie du fer 59 est de $46,3$ jours ?

Exercice 12

Un radioélément a une demi-vie de $9,4$ jours. Administré à un patient, il n'en subsiste qu'1% dans son organisme après 50 jours. Calculer la demi-vie biologique de cet élément.

Chapitre 12

Compléments

12.1 Aires et volumes

Exercice 1

Les dimensions d'un parallélipipède rectange sont $L = 48,2 \pm 0,1\ mm$, $l = 3,02 \pm 0,01\ mm$ et $h = 0,61 \pm 0,01\ mm$. Calculer son volume et l'incertitude absolue sur ce volume.

Exercice 2

Le rayon de la base d'un cône est de $4,02 \pm 0,01\ mm$ et la hauteur $7,16 \pm 0,01\ mm$. Calculer son volume et l'incertitude absolue sur ce volume.

Exercice 3

Calculer l'aire d'un disque de rayon $5,32 \pm 0,01\ cm$ et l'incertitude absolue sur cette aire.

Exercice 4

Le diamètre d'une sphère est de $7,898 \pm 0,017\ mm$. Calculer l'aire de cette sphère et l'incertitude absolue sur cette aire.

12.2 Trigonométrie

12.2.1 Fonctions trigonométriques

Exercice 1 : angles opposés, supplémentaires, ...

Exprimer en terme d'un angle aigu positif.

$$\begin{array}{ccc} \sin 145^o & \cos 215^o & \tan 440^o \\ \cot 155^o & \sin -200^o & \cos -760^o \end{array}$$

Exercice 2 : valeurs particulières

Calculer sans calculette.

$$3\cos 0^o \cos 270^o + 2\cos 180^o \tan 45^o \cot 45^o$$
$$3\frac{\cos 0}{\cos\pi} + 5\sin^3\frac{5\pi}{2} - \frac{4}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 3 : manipulation de formules

Vérifier les identités suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2 & = & 2(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha) \\
(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2 & = & 1 \\
2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha) & = & 1 \\
\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha & = & 1 \\
\sin\alpha(1+\tan\alpha)+\cos\alpha(1+\cot\alpha) & = & \frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha} \\
\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-2\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sin^2\alpha & = & 0
\end{array}$$

12.2.2 Fonctions trigonométriques inverses

Exercice 1

Rechercher en fonction de π

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \arctan 1 \quad \arccos\frac{1}{2}$$

Exercice 2

Calculer (avec calculette) et exprimer la réponse en radians et en degrés.

$$\arcsin 0,8 \quad \arctan 12 \quad \arccos 0,05$$

Exercice 3

Calculer.

$$\begin{array}{ccc}
\arcsin(\sin\frac{\pi}{3}) & \arcsin(\sin 30^o) & \arcsin(\sin 330^o) \\
\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3} & \arcsin(\sin\frac{5\pi}{4}) & \arcsin(\cos\frac{5\pi}{6} \\
\arcsin(\tan 225^o) & \cos(\arcsin\frac{1}{2}) & \cos(\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})) \\
\tan(\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})) & \sin(\arctan 1) & \cos(\arctan -1) \\
\arccos(\cos\frac{\pi}{4}) & \arccos(\cos\frac{5\pi}{6} & \arccos(\cos 120^o) \\
\arccos(\cos\frac{13\pi}{10} & \arccos(\cos 320^o) & \arccos(\sin 135^o) \\
\arccos(\sin\frac{7\pi}{4}) & \arccos(\tan 225^o) & \arccos(\tan 180^o) \\
\arctan(\tan\frac{\pi}{4}) & \arctan(\tan\frac{5\pi}{3} & \arctan(\tan 210^o) \\
\arctan(\tan\frac{7\pi}{5} & \arctan(\sin\frac{\pi}{2}) & \arctan(\cos\pi)
\end{array}$$

Exercice 4

Calculer.

$$\begin{array}{cc}
\arcsin\frac{5}{11}+\arcsin\frac{12}{13} & \arcsin\frac{11}{14}-\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14} \\
\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5} & \arccos\frac{11}{13}+\arccos\frac{1}{26} \\
\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3} & \arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}
\end{array}$$

12.3 Equations et inéquations

Exercice 1 : équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
2x+7=1-4x & (x-2)^2=(x-4)(x+5) & 5x<2x^2+3 \\
4-x^2=1 & x\geq x^2 & (7-2x)^2=4 \\
(x-3)^3\leq x(x-1)(x-2) & x>2x & 7x(2x-3)-(3x-2)^2=4x^2+9 \\
(2x-1)^3>(2x+1)^3 & (x+1)^2+(3-x)^2=0 & (x-2)^2-(3-x)^2\leq 0 \\
4x^3+15<20x^2+3x & x^4\geq 16x^2 & (x^2+4)^2-8x^2=x^4+16
\end{array}$$

Exercice 2 : équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=0 & \frac{x+2}{x-5}=2 & \frac{x}{x^2-4}=\frac{x+1}{(x+2)^2} \\
\frac{2x-1}{x+2}=\frac{x-2}{2x+1} & \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=0 & \frac{3x-2}{x-2}=\frac{8}{x^2-2x} \\
\frac{x+2}{x-3}<0 & \frac{5-x^2}{5-x}\geq 0 & \frac{x+1}{x-1}>1 \\
x<\frac{1}{x} & \frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\geq 0 & \frac{2x-x^2}{(2x-1)^2}\leq 2
\end{array}$$

Exercice 3 : systèmes d'inéquations

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} x+1\geq 0 \\ 5-2x\geq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x^2-4\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} 9-4x^2\geq 0 \\ x^2-4x\geq 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x-2\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} 3x\geq 0 \\ 6x^2+5x-1\geq 0 \\ 1-2x^2\geq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x-x^2>0 \\ 1-3x^2\geq 0 \\ 16x^3-8x^2-2x+1>0 \end{array}\right.$$

Exercice 4 : systèmes d'équations

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} 2x=10 \\ 3x+y=4 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+y=10 \\ x-y=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} 2x-y-5=0 \\ x+3y+1=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} 4x-5=0 \\ 8x-3y=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x-y=3x+1 \\ 4(x-1)=3(y+2) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x=5y+3 \\ y=2x-5 \end{array}\right.$$

Exercice 5 : systèmes d'équations

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} x+xy=0 \\ x^2-y^2=4 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x^2+y=32 \\ 3y-2x^2=16 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+2y-3=0 \\ x^2-y^2+3x=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x^2-2xy=0 \\ 4x^2+y^2+4x-9=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x^2+y^2-x+y-2=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2-5x+2y-4=0 \\ x^2+y^2+4x-y+2=0 \end{array}\right.$$

Exercice 5 : équations particulières

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} x^4-3x^2+2=0 & 4x^4+11x^2-3=0 & 5x^2=x^4+6 \\ x^4-20x^2+96=0 & 2x^4+5x^2+4=0 & x^4-6x^2+4=0 \\ x^4+2x^2-1=0 & (x+2)^2+(x-2)^2=144 & x^4-16=0 \end{array}$$

Exercice 6 : équations particulières

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x+5}=x-1 & \sqrt{2x+3}=4 & 2\sqrt{x-1}=3x-4 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{3x+5}=0 & \sqrt{4x-3}+\sqrt{8x+9}=0 & \sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x+3}=0 \\ \sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}=4 & \sqrt{2x-5}+\sqrt{3x}=2 & \sqrt{x^2-9}-\sqrt{1-3x}=x+5 \\ 2\sqrt{-x}=2\sqrt{8x+3}-\sqrt{2(2x+1)} & \sqrt{x}-\sqrt{-x}=\sqrt{2x}+\sqrt{-x}-\sqrt{3x} & \sqrt{-5x-1}+2\sqrt{7x}=0 \end{array}$$

Exercice 7 : équations particulières

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} x^6+19x^3-216=0 & x^8-15x^4-16=0 & (x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0 \\ x^2+\frac{1}{x^2}=3 & \frac{1}{(x+2)^2}+\frac{6}{x+2}+5=0 & x^4-2x^3-x^2+2x+1 \end{array}$$

12.4 Fonctions du 1^{er} degré

Exercice 1

Dessiner la droite qui passe par les points A et B suivants :

A	$(-1,4)$	$(2,5)$	$(4,3)$	$(4,-1)$	$(1,7)$
B	$(3,2)$	$(-2,-1)$	$(-2,3)$	$(4,4)$	$(-3,2)$

Calculer sa pente et écrire son équation.

Exercice 2

Soit la droite $d \equiv y = mx + p$. Rechercher l'équation des droites $d_\parallel$ et $d_\perp$ passant par le point P et qui soient respectivement parallèle et perpendiculaire à d.

m	p	P
$\frac{2}{5}$	$\frac{-9}{5}$	$(3,-4)$
2	-1	$(1,3)$
$\frac{3}{2}$	0	$(-2,3)$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(-3,2)$
0	-7	$(2,5)$
$-\frac{5}{2}$	3	$(-1,-4)$

Exercice 3

Soit la droite $d \equiv ax + by + c = 0$. Rechercher l'équation des droites $d_{\parallel}$ et $d_{\perp}$ passant par le point P et qui soient respectivement parallèle et perpendiculaire à d.

a	b	c	P
2	-5	9	$(1,3)$
2	-3	0	$(-2,3)$
4	3	-6	$(-3,2)$
0	-2	7	$(-1,-4)$
1	0	-1	$(3,-4)$
-2	-5	9	$(2,5)$

Exercice 4

Trouver une équation de la droite d qui satisfasse aux deux conditions suivantes :
- Passer par $A(5,-3)$ et de pente -4.
- Couper l'axe Ox en 4 et l'axe Oy en -3.
- Passer par $A(2,-4)$ et parallèle à la droite $d_{\parallel} \equiv 5x - 2y = 4$.

Exercice 5

Dessiner les graphiques et rechercher les coordonnées des points d'intersection de
- $d_1 \equiv 4x + 3y = 5$ et $d_2 \equiv 3x - 2y = 8$.
- $d_1 \equiv 2x + 3y = 2$ et $d_2 \equiv x - 2y = 8$.
- $d_1 \equiv 2x + 5y = 16$ et $d_2 \equiv 3x - 7y = 24$.

12.5 Fonctions réciproques

Le problème des fonctions réciproques est le suivant : une fonction f fait correspondre à tout x un élément y. Mais réciproquement, existe-t-il une autre fonction g qui à y fasse correspondre x ? Autrement formulé, existe-t-il une fonction f^{-1} telle que $f^{-1}(f(x)) = x$? Existe-t-il un chemin de retour pour la fonction f ?

La fonction f^{-1} ne peut donc pas être définie lorsqu'il existe des réels y qui ont plus d'un antécédent par f. Autrement dit, f^{-1} ne peut pas être définie si la fonction f n'est pas une injection.

Exercice 1

Définir les fonctions réciproque f^{-1} des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{array}{ccc} 2x & -\frac{5x}{2} & -\frac{x}{3} - \frac{4}{3} \\ \frac{1}{x} & -\frac{5}{2x} & -\frac{1}{3x} - \frac{4}{3} \end{array}$$

Exercice 2

Rendre injectives les fonctions suivantes (ajuster le domaine) :

$$\begin{array}{cccc} f(x) = & \sin x & -\cos x & 3\tan\frac{\pi x}{2} \\ & x^2 & \sqrt{x} & -x^2+2x+1 \\ & \ln x & e^x & 4e^{3x-2} \end{array}$$

Exercice 3

Définir les fonctions réciproque f^{-1} des fonctions rendues injectives dans l'exercice précédent.

12.6 Problèmes

Exercice 1

La vitesse à laquelle se dissout un comprimé de vitamine C dépend de son aire. Une marque présente des comprimés cylindriques de 2 cm de hauteur, terminés à chaque bout par un hémisphère de $0,5$ cm de diamètre. Une seconde marque fabrique des comprimés qui ont la forme d'un cylindre circulaire droit (pastille) de $0,5$ cm de hauteur.

- Quel diamètre doit avoir la pastille pour que son aire soit égale à celle du premier comprimé ?
- Calculer le volume de chaque comprimé.

Exercice 2

On doit fabriquer une boîte ouverte à partir d'un carton rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en ôtant à chaque coin un même carré de côté x et en pliant les bords restants. Rechercher l'expression du volume de la boîte en fonction de x.

Exercice 3

Un aquarium ouvert au-dessus de 15 cm de hauteur doit avoir un volume de 600 cm^3. On appelle x la longueur et y la largeur de la base de l'aquarium.

- Exprimer y en fonction de x.
- Exprimer l'aire de la surface totale de verre nécessaire à sa fabrication en fonction de x.

Exercice 4

La tour de contrôle d'un aéroport mesure 20 m de haut et est située à 100 m du début de la piste d'envol des avions. Si x désigne la distance parcourue par un avion qui décolle, exprimez la distance d entre la tour de contrôle et l'avion, en fonction de x.

Exercice 5

Une mongolfière prend son départ à 13 h et s'élève verticalement avec une vitesse constante de 2 m/s. Le point duquel on l'observe est situé à 100 m de son point de décollage. Si t désigne le temps en secondes à partir de 13 h, exprimer la distance d entre la mongolfière et l'observateur, en fonction du temps t.